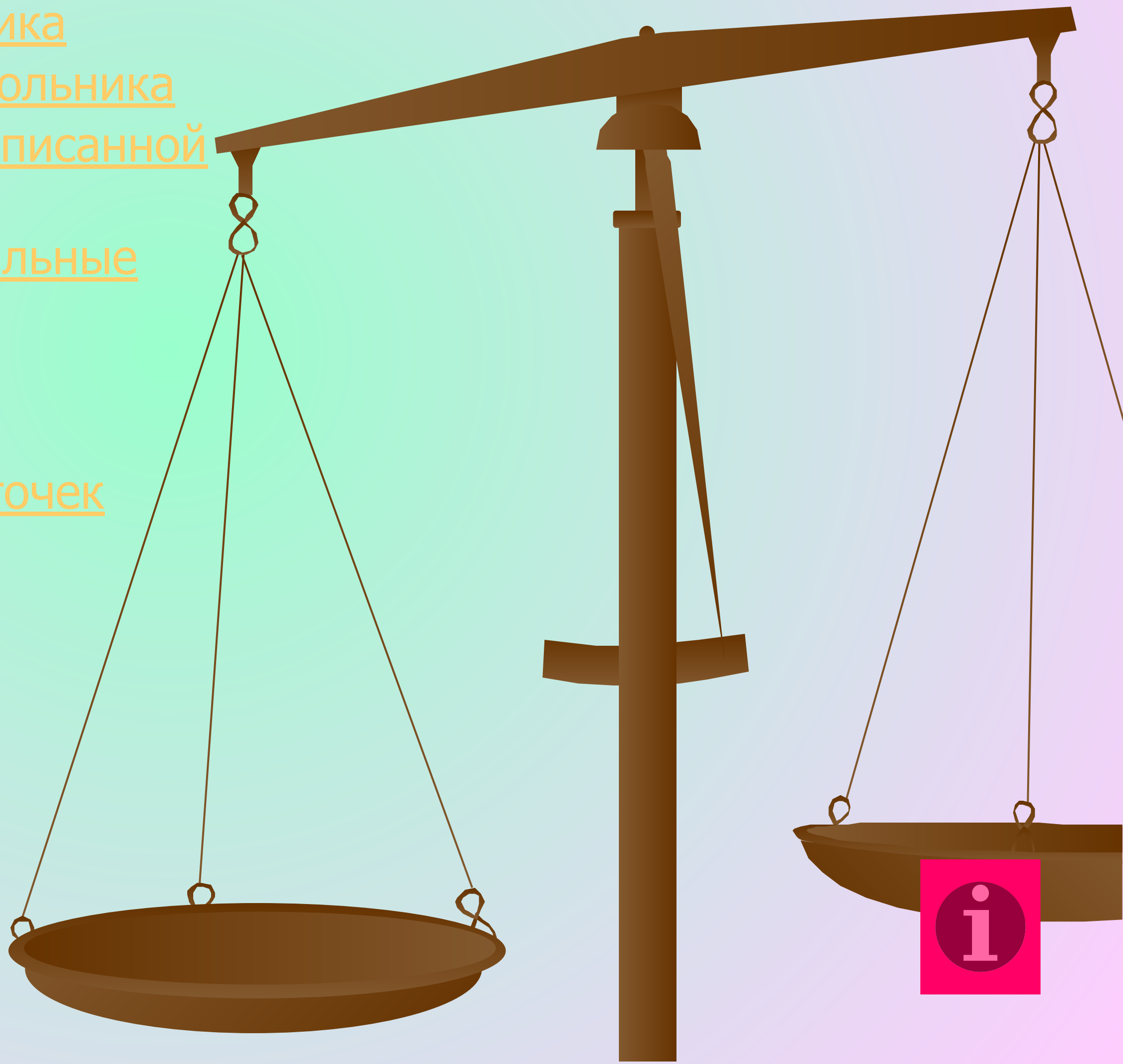
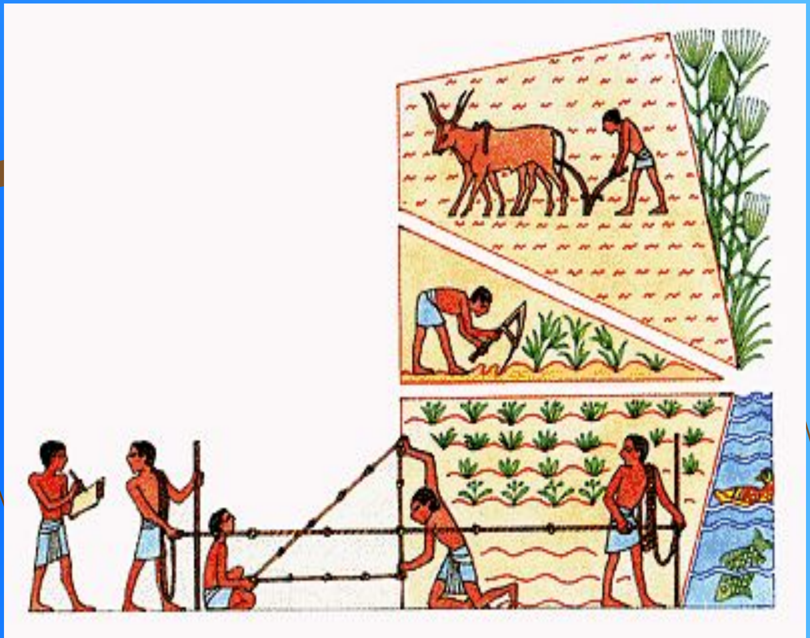
Замечательные точки треугольника

Оглавление

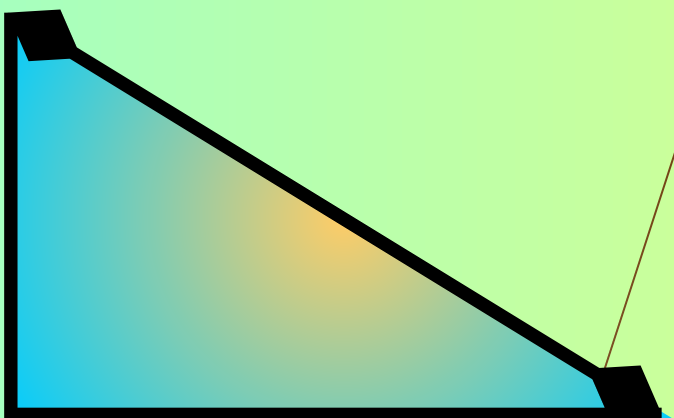


Треугольник

Крупнейший древнегреческий историк Геродот (V век до нашей эры) оставил описание того, как египтяне после каждого разлива Нила заново размечали плодородные участки его берегов, с которых ушла вода. По Геродоту, с этого и началась геометрия – "землемерие" (от греческого "гео" – "земля" и "метрео" – "измеряю").



- Треугольник по праву считается простейшей из фигур: любая плоская, то есть простирающаяся в двух измерениях, фигура должна содержать хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить эти точки попарно прямолинейными отрезками, то построенная фигура и будет ***треугольником***.



Из трехсторонних фигур
равносторонний треугольник
есть фигура, имеющая три равные стороны

равнобедренный же –
имеющая только две равные стороны

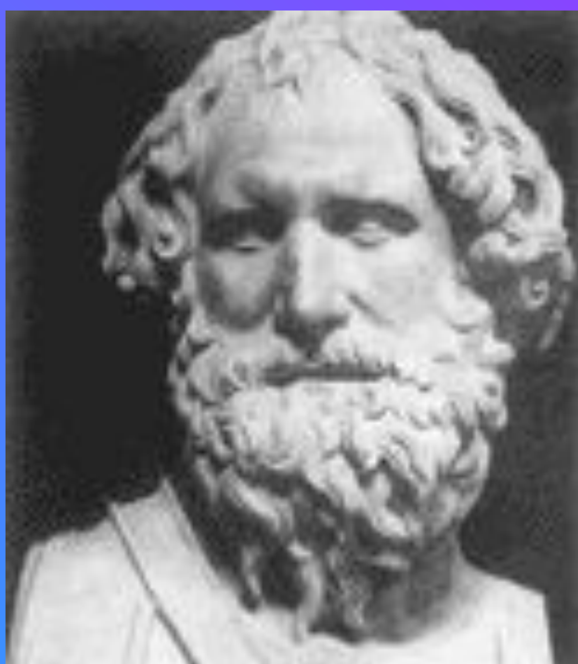
разносторонний –
имеющая три неравные стороны

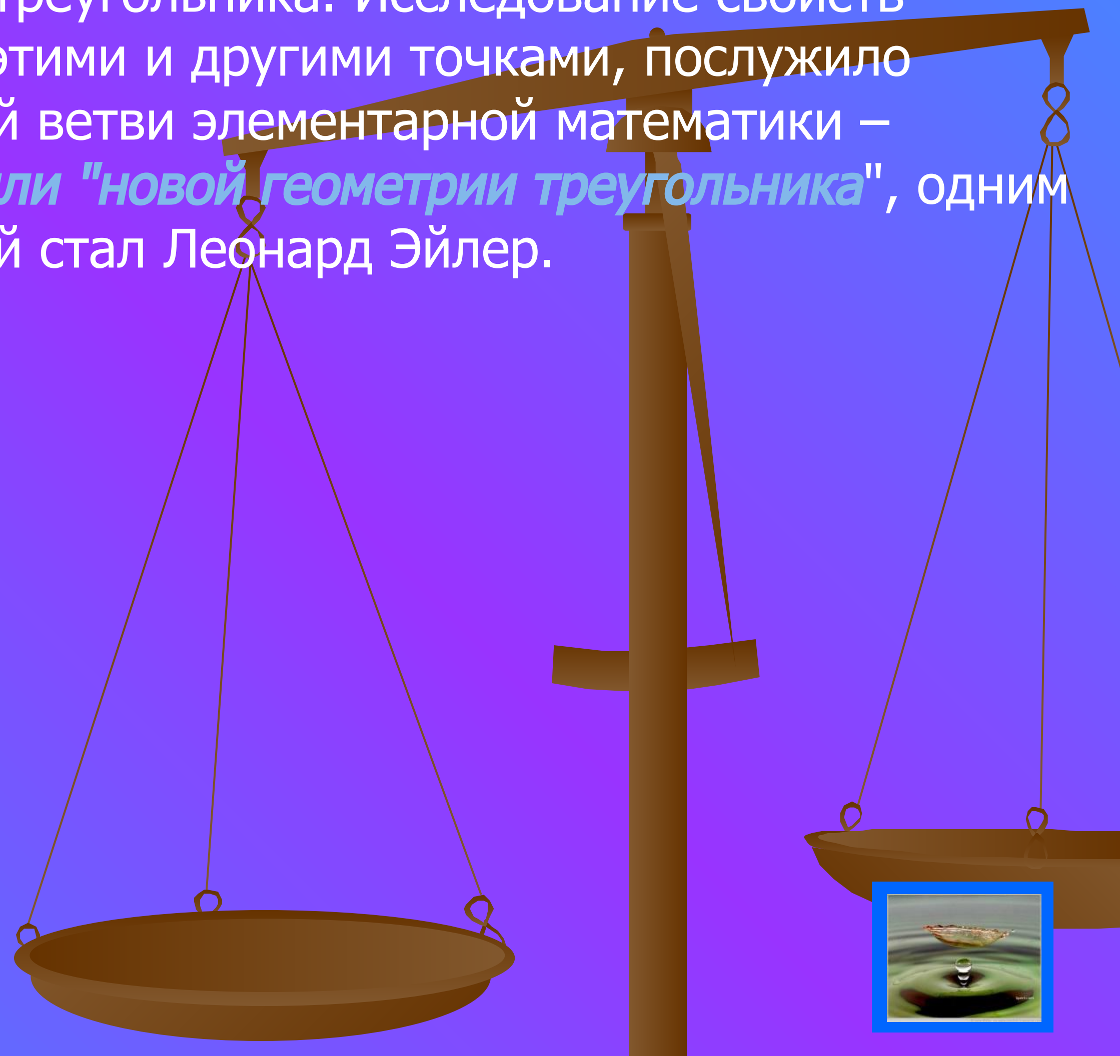
ИЗ ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

- В четвертой книге "Начал" Евклид решает задачу: "Вписать круг в данный треугольник". Из решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – ***центре вписанного круга.*** Из решения другой задачи Евклида вытекает, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке – центре описанного круга. И три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром (греческое слово "***ортос***" означает "прямой", "правильный"). Это предложение было, однако, известно Архимеду, Паппу, Проклу.

- Четвертой особенной точкой треугольника является точка пересечения медиан. Архимед доказал, что она является центром тяжести (***барицентром***) треугольника.

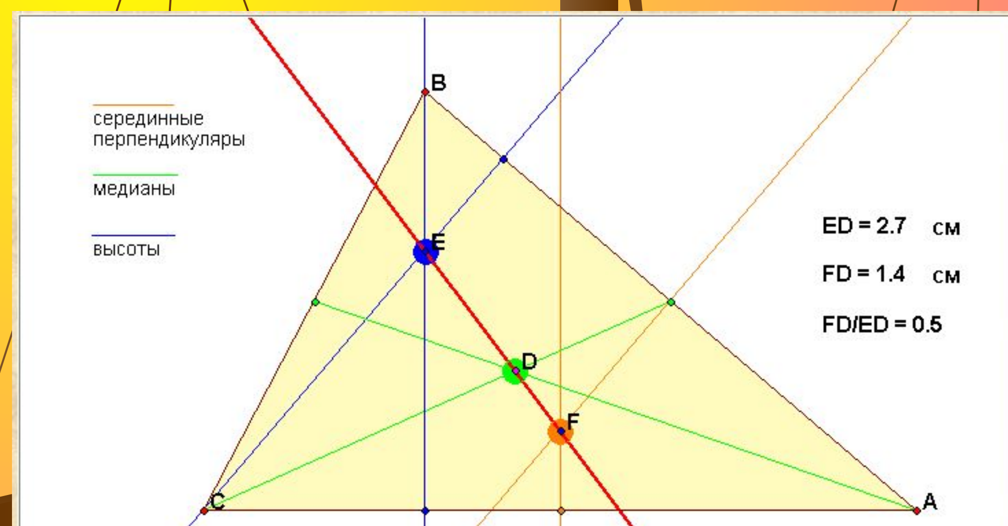
  На вышеназванные четыре точки было обращено особое внимание, и начиная с XVIII века они были названы "замечательными" или "особенными" точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики – "***геометрии треугольника" или "новой геометрии треугольника***", одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.



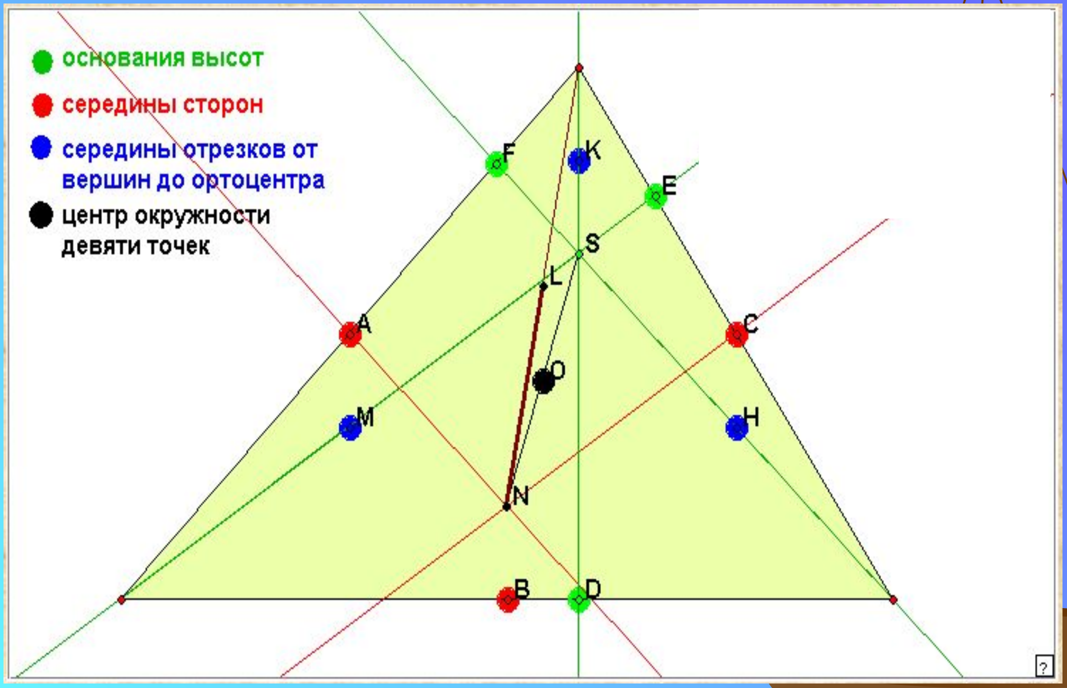


- В 1765 году Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже "прямой Эйлера". В двадцатых годах XIX века французские математики Ж. Понселе, Ш. Брианшон и другие установили независимо друг от друга следующую теорему: основания медиан, основания высот и середины отрезков высот, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной и той же окружности.

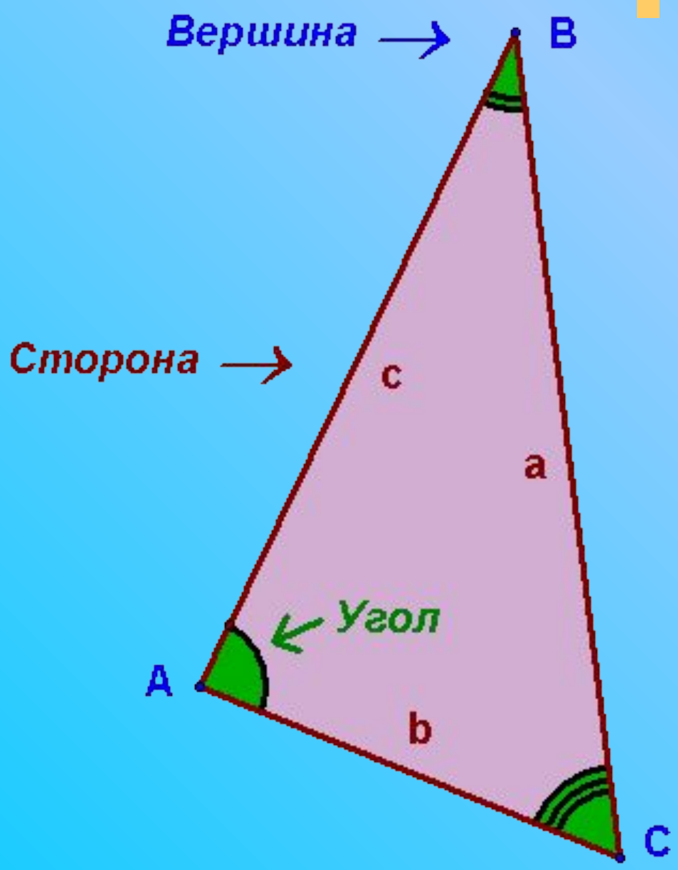

Эйлер



- Эта окружность называется "окружностью девяти точек", или "окружностью Фейербаха", или "окружностью Эйлера". Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на прямой Эйлера.
 Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX – XX веков Лемуан, Брокар, Тебо и другие.



ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА



- Основными элементами треугольника ABC являются:

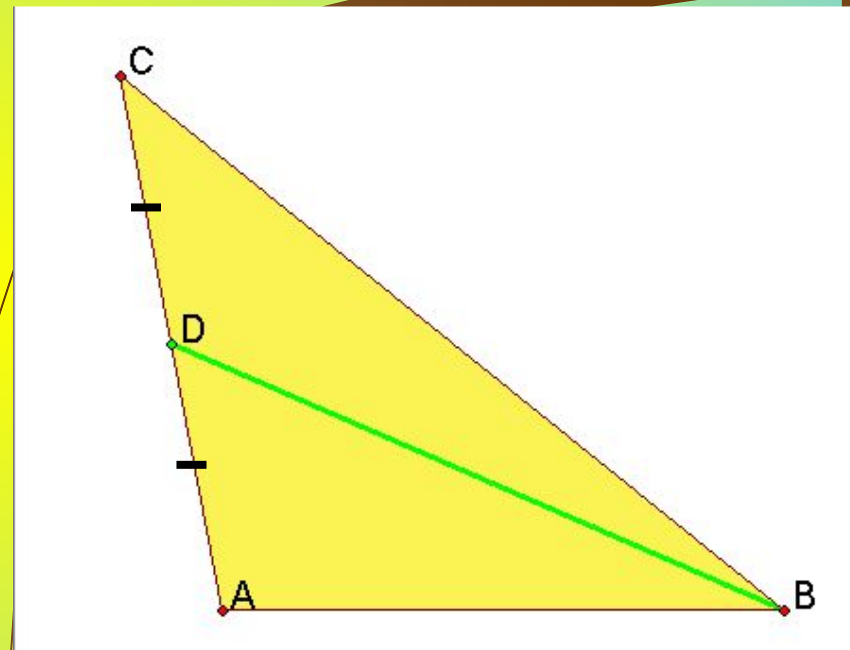
вершины - точки **A**, **B**, и **C**;

стороны - отрезки **a = BC**, **b = AC** и **c = AB**, соединяющие вершины;

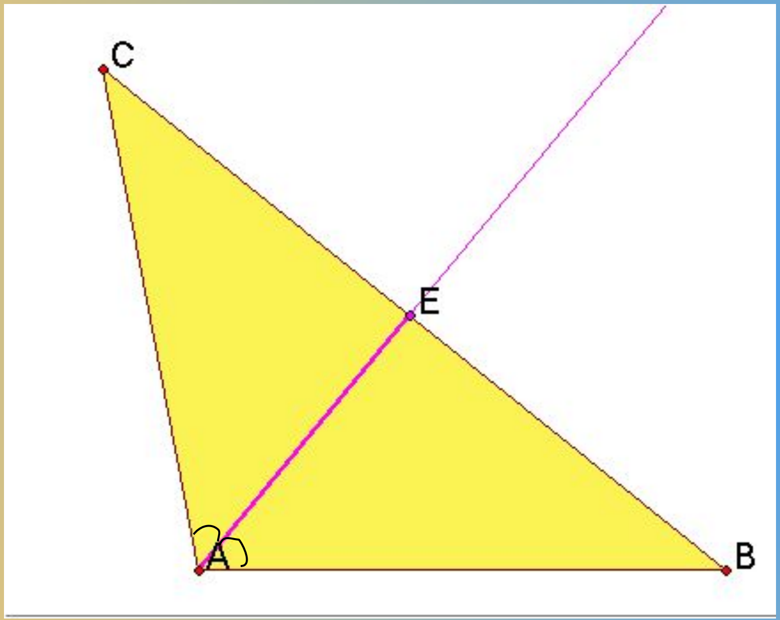
углы, образованные тремя парами сторон. Углы часто обозначают так же, как и вершины, - буквами **A**, **B** и **C**.

МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

- **Медиана треугольника** - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Поэтому, для построения медианы необходимо выполнить следующие действия:
1) найти середину стороны;
2) соединить точку, являющуюся серединой стороны треугольника, с противолежащей вершиной отрезком - это и будет **медиана**.



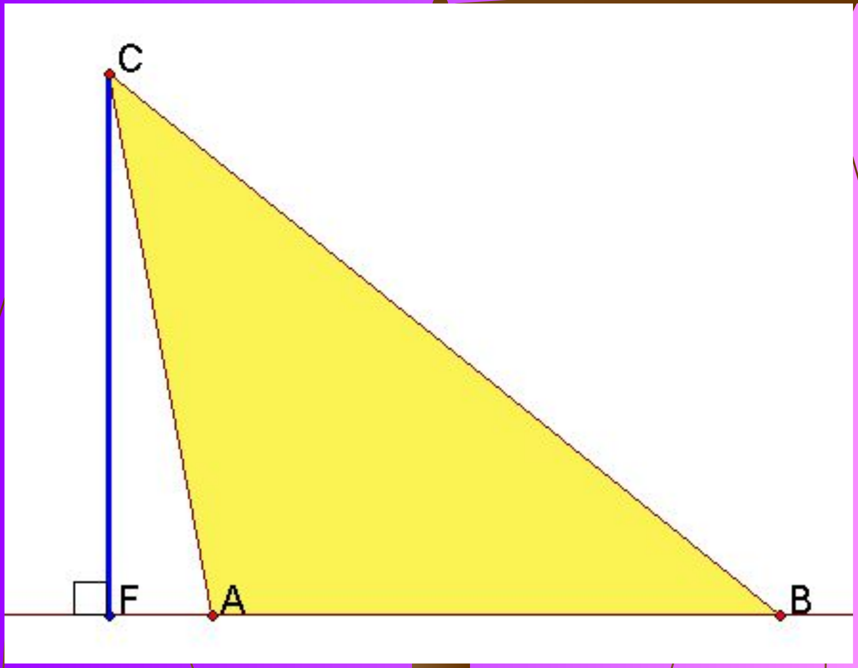
БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



- **Биссектриса треугольника** - это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне. Поэтому, для построения биссектрисы необходимо выполнить следующие действия:
1) построить биссектрису какого-либо угла треугольника (а биссектриса угла - это луч, выходящий из вершины угла и делящий его на две равные части);
2) найти точку пересечения биссектрисы угла треугольника с противоположной стороной;
3) соединить вершину треугольника с точкой пересечения на противоположной стороне отрезком - это и будет **биссектриса**.

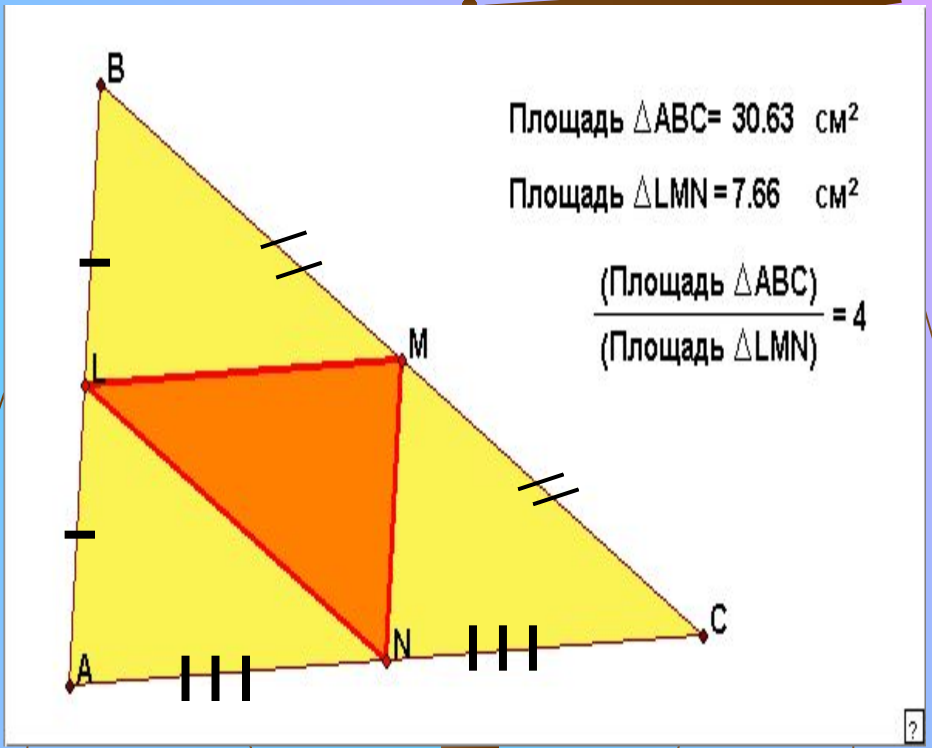
ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

- **Высота треугольника** - это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону. Поэтому, для построения высоты необходимо выполнить следующие действия: 1) провести прямую, содержащую одну из сторон треугольника (в случае, если проводится высота из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике); 2) из вершины, лежащей напротив проведенной прямой, опустить перпендикуляр к ней (а перпендикуляр - это отрезок, проведенный из точки к прямой, составляющей с ней угол 90 градусов) - это и будет **высота**.



СРЕДНИЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

- *Средние линии* - это отрезки, соединяющие середины двух сторон. Поэтому для построения средней линии необходимо выполнить следующие действия:
  1) найти середины двух сторон треугольника;
  2) соединить середины сторон отрезком - это и будет *средняя линия.*
- Три средние линии треугольника образуют "вписанный" в него треугольник, называемый *серединным*. Его площадь в четыре раза меньше площади данного треугольника. А периметр в два раза меньше периметра данного треугольника.



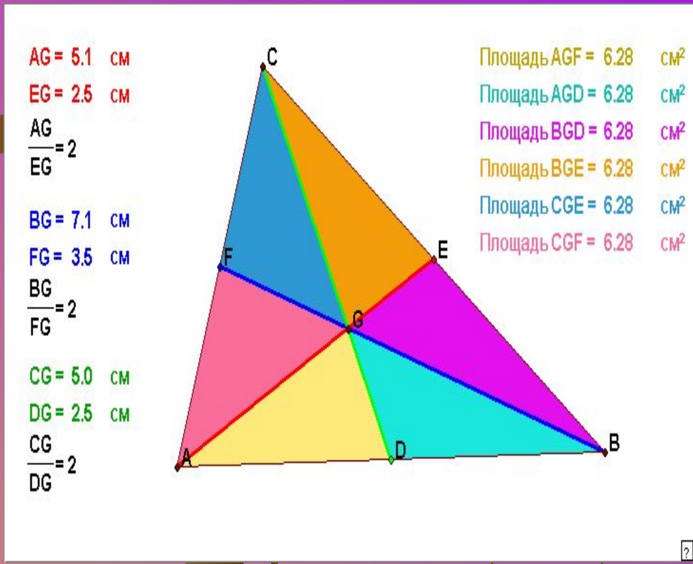
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА (точка пересечения медиан)

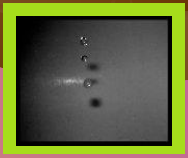
- 1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношениии 2:1, начиная от вершины треугольника.

  2. Медианы треугольника делят его на равновеликие треугольники. Треугольники называются равновеликими, если у них равны площади.

  3. Точку пересечения медиан треугольника называют *центром тяжести* или *центром масс*. Оказывается, если поместить в вершины треугольника равные массы, то их центр попадет в эту точку. Центр равных масс иногда называют *центроидом*. В этой же точке располагается и центр масс однородной треугольной пластинки. Если подобную пластинку поместить на булавку так, чтобы острие последней попало точно в центроид, то пластинка будет находиться в равновесии.

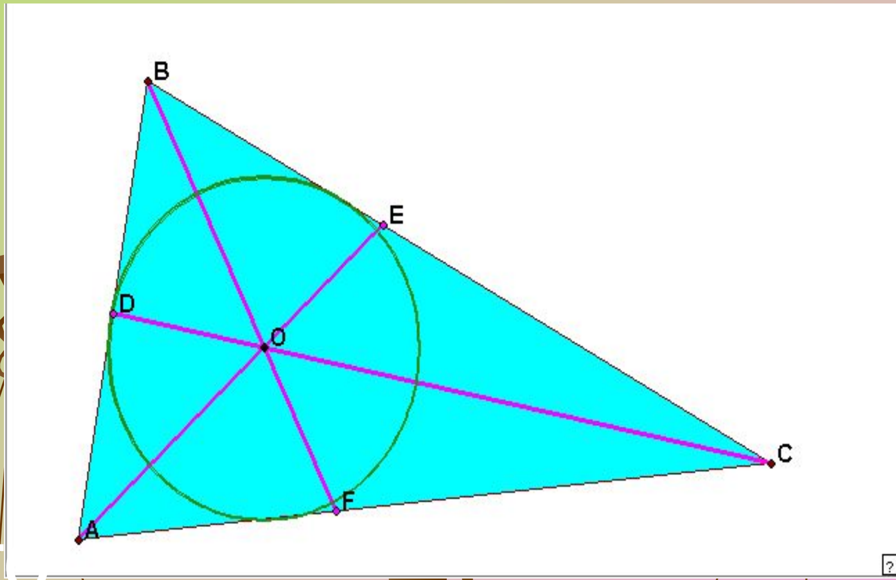
  За особенности, описанные в пунктах 1-3, точку пересечения медиан и называют замечательной точкой треугольника.





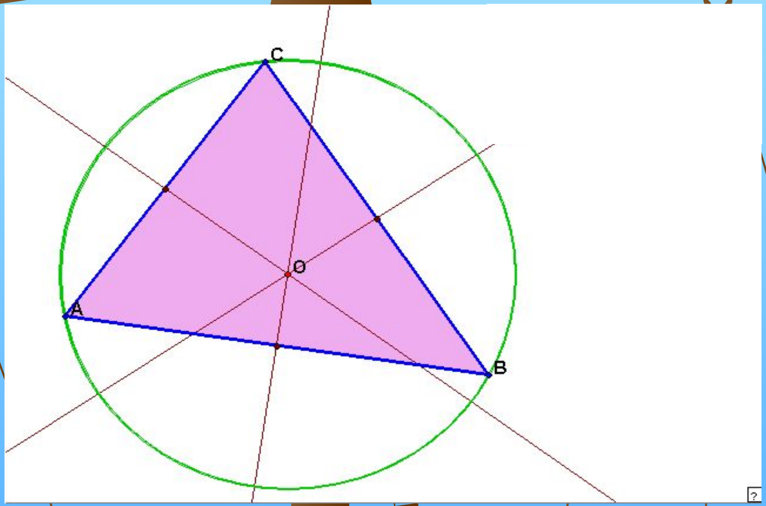
ЦЕНТР ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
(точка пересечения биссектрис)

- Биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, которая равноудалена от всех сторон треугольника, то есть является ***центром вписанной окружности***.



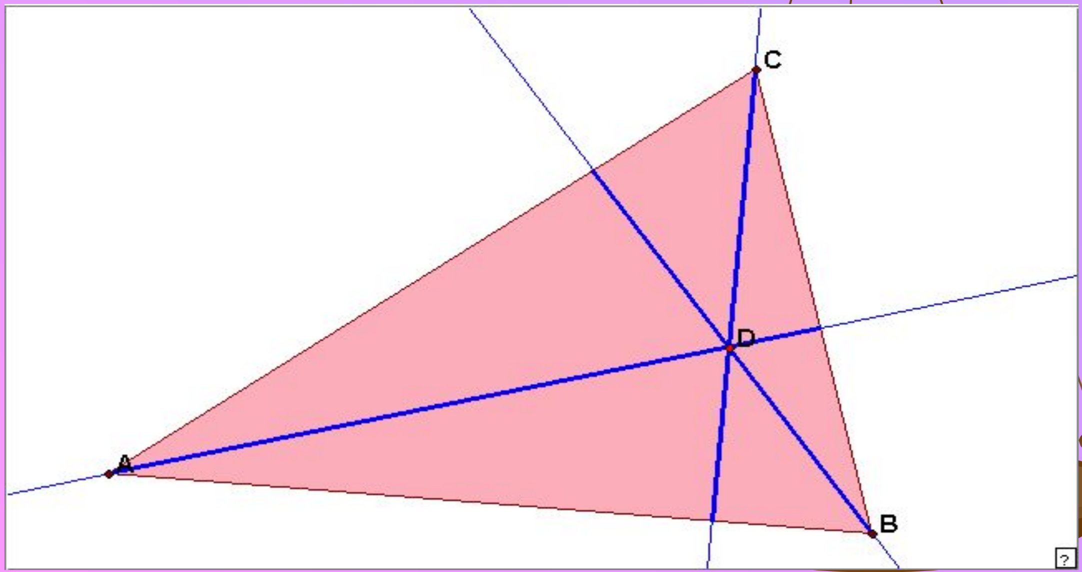
ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
(точка пересечения серединных перпендикуляров)

- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является ***центром описанной окружности***. Точка пересечения серединных перпендикуляров в остроугольном треугольнике лежит внутри треугольника, в прямоугольном - на середине гипотенузы, а в тупоугольном - вне треугольника.



ОРТОЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА (точка пересечения высот)

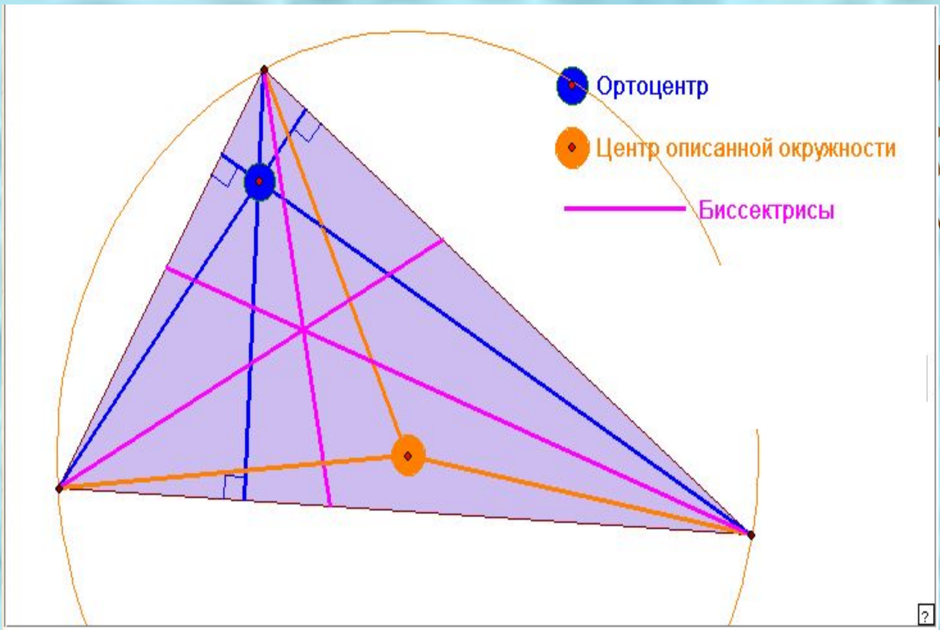
- Высоты треугольника (или их продолжения) всегда пересекаются в одной точке, называемой его *ортоцентром*. В остроугольгом треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника, в прямоугольном - совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике - находится вне треугольника на пересечении продолжений высот.



ИЗОГОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

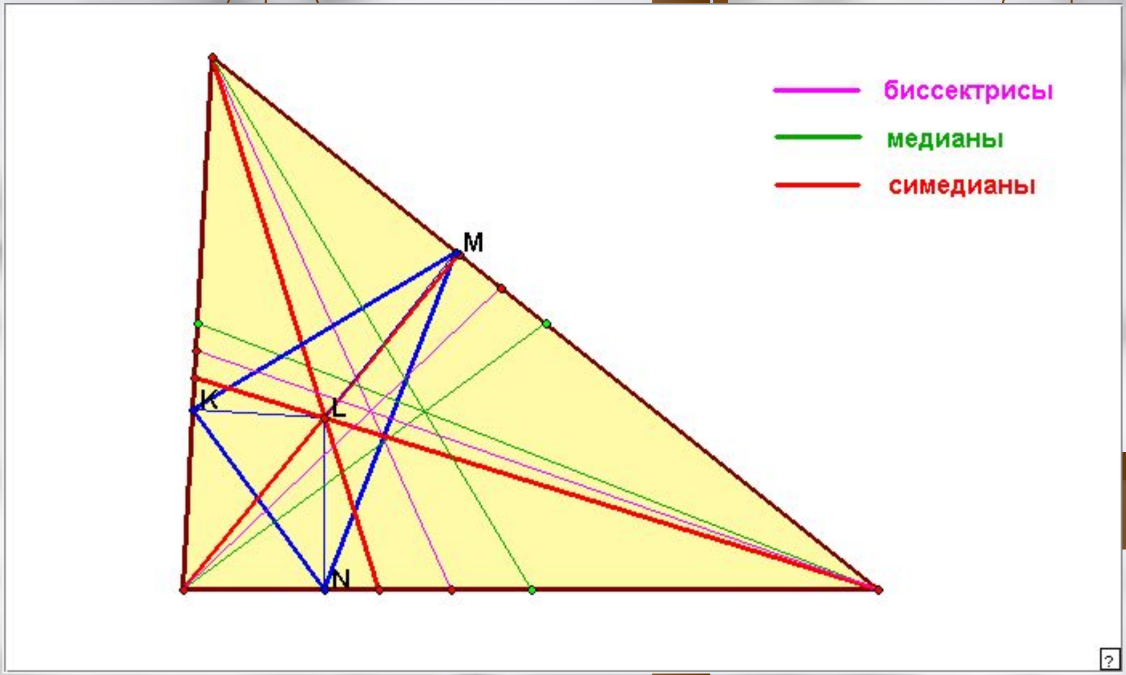
- Прямые, симметричные высотам относительно соответствующих биссектрис, проходят через центр описанной окружности, то есть содержат ее радиусы.

  Подобные две точки (синяя и оранжевая) называются ***изогональными***. Таким образом, ортоцентр треугольника (синяя точка) изогонален центру описанной окружности (оранжевая точка)



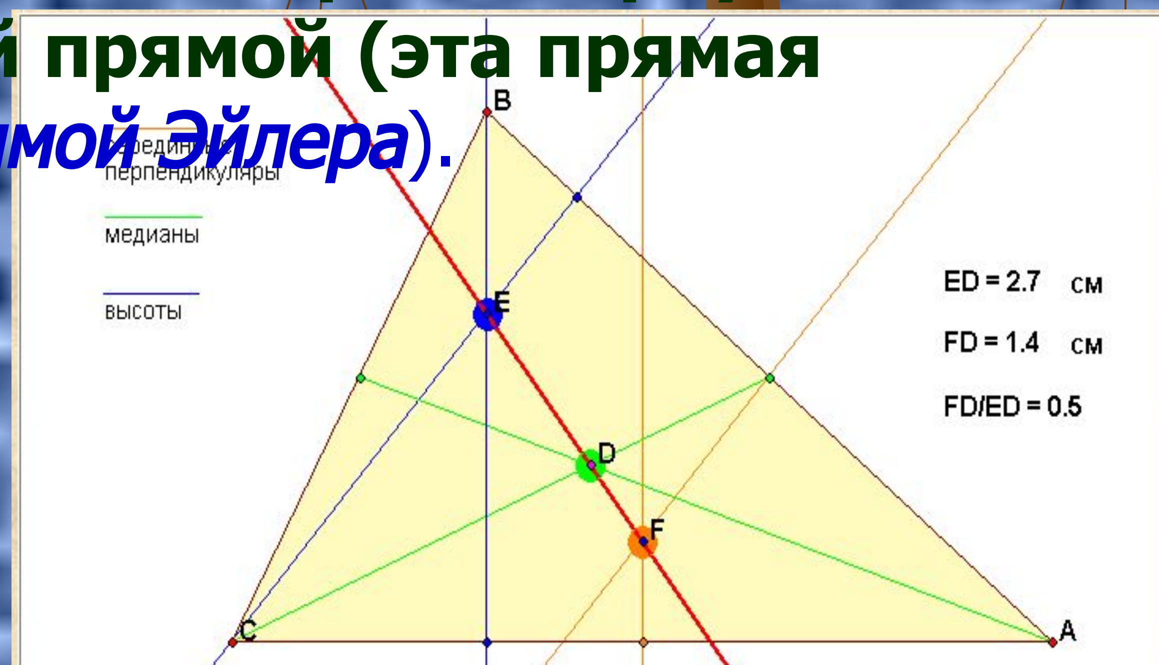
ТОЧКА ЛЕМУАНА

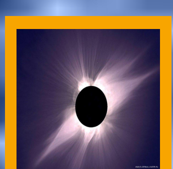
- Отразив относительно **биссектрис** треугольника соответствующие **медианы**, получаем новые замечательные линии - ***симедианы***. Точка L их пересечения называется ***точкой Лемуана*** треугольника. Она является центроидом треугольника KMN, образованного ее проекциями на стороны исходного треугольника.



ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

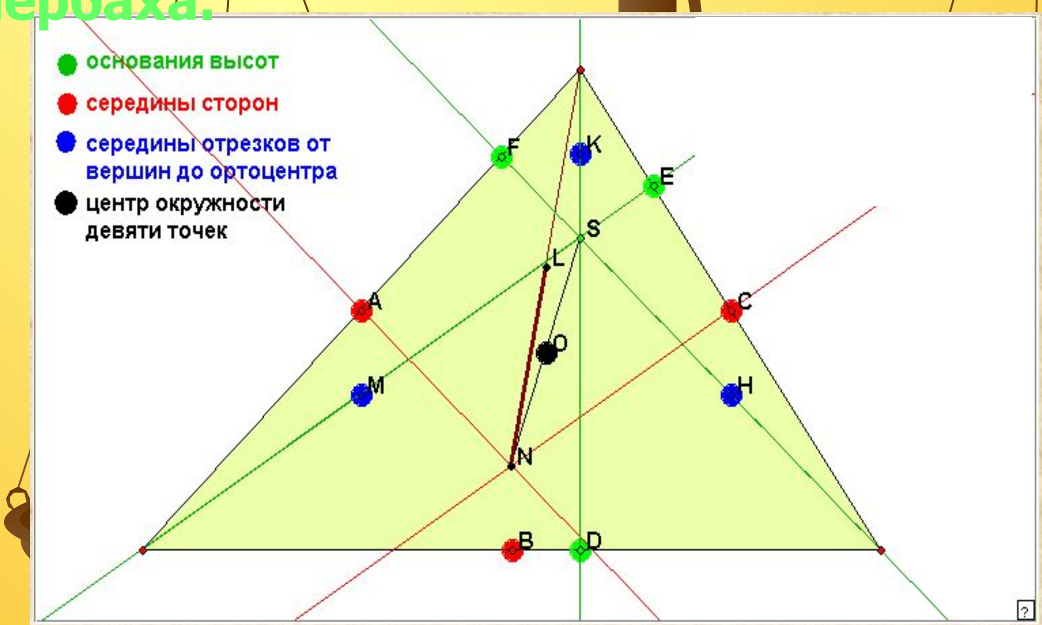
- **Во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой (эта прямая называется *прямой Эйлера*).**

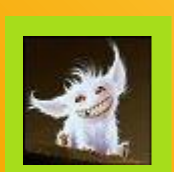




ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК

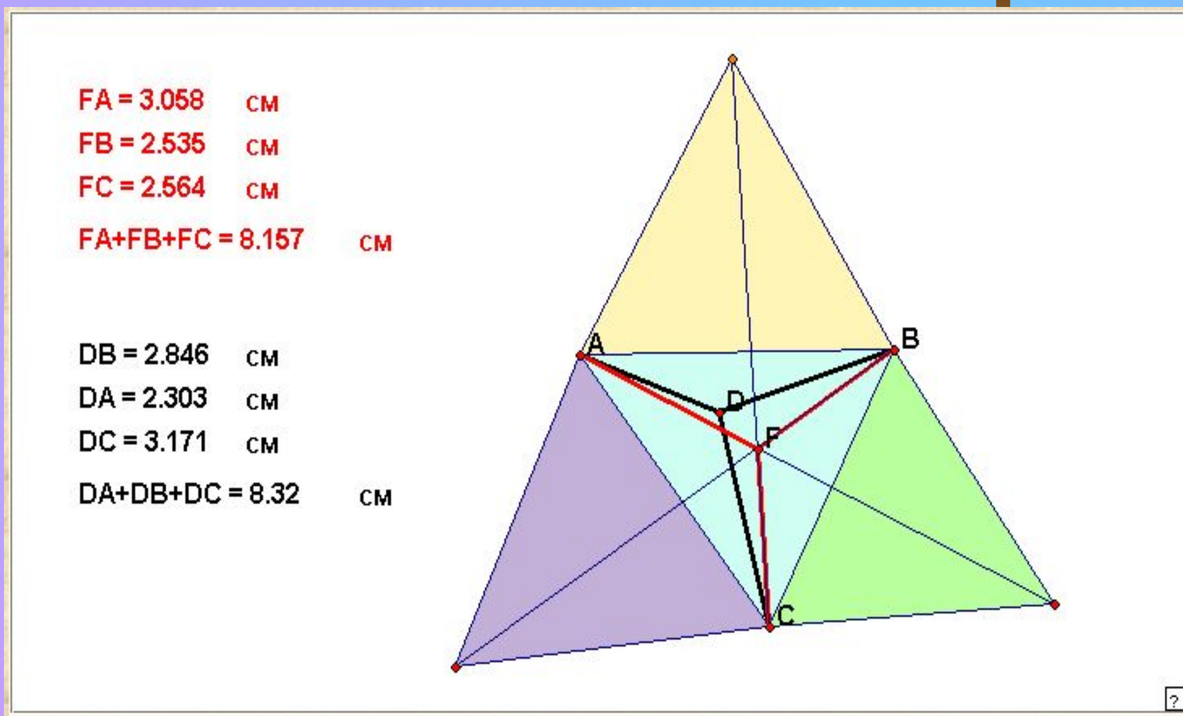
- Середины сторон треугольника (точки **A**, **B** и **C**), основания его высот (точки **D**, **E** и **F**) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (точки **M**, **K** и **H**) лежат на одной окружности. Ее радиус равен половине радиуса описанной окружности (отрезок **NL**), а центр **O** лежит посередине отрезка **NS**, где **N** - центр описанной окружности, а точка **S** - ортоцентр треугольника. Такая окружность называется ***окружностью девяти точек***, или ***окружностью Эйлера, или окружностью Фейербаха*** - по имени Карла Фейербаха, провинциального учителя математики из Германии, родного брата философа **Людовика Фейербаха.**





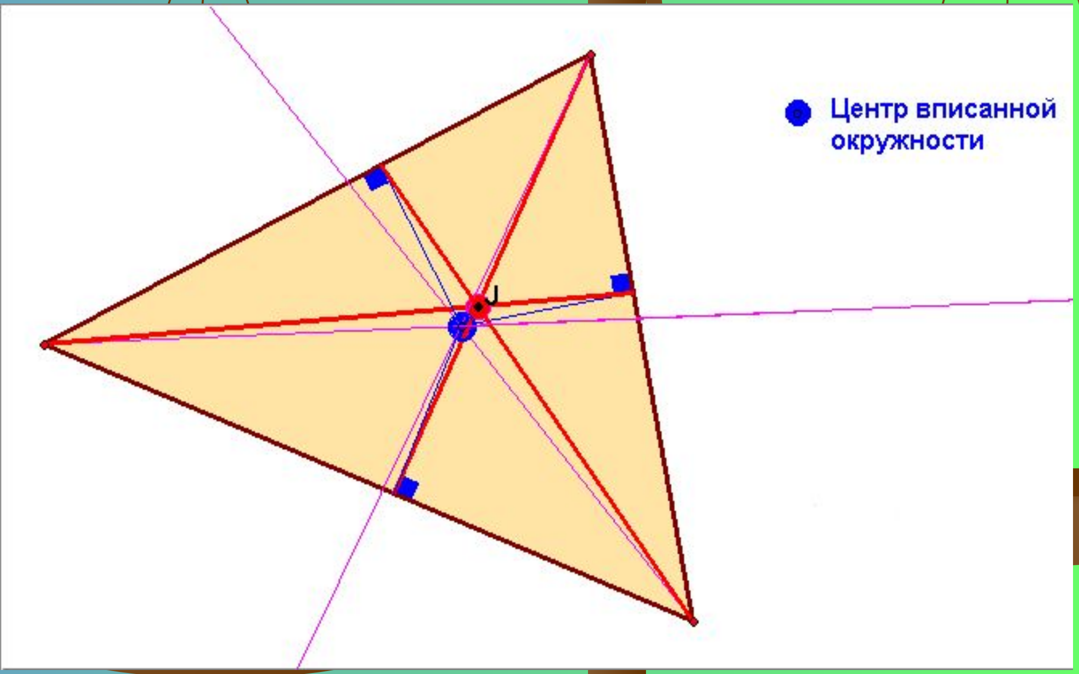
ТОЧКА ФЕРМА

- Точка F - ***точка Ферма***, то есть точка, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника ABC минимальна



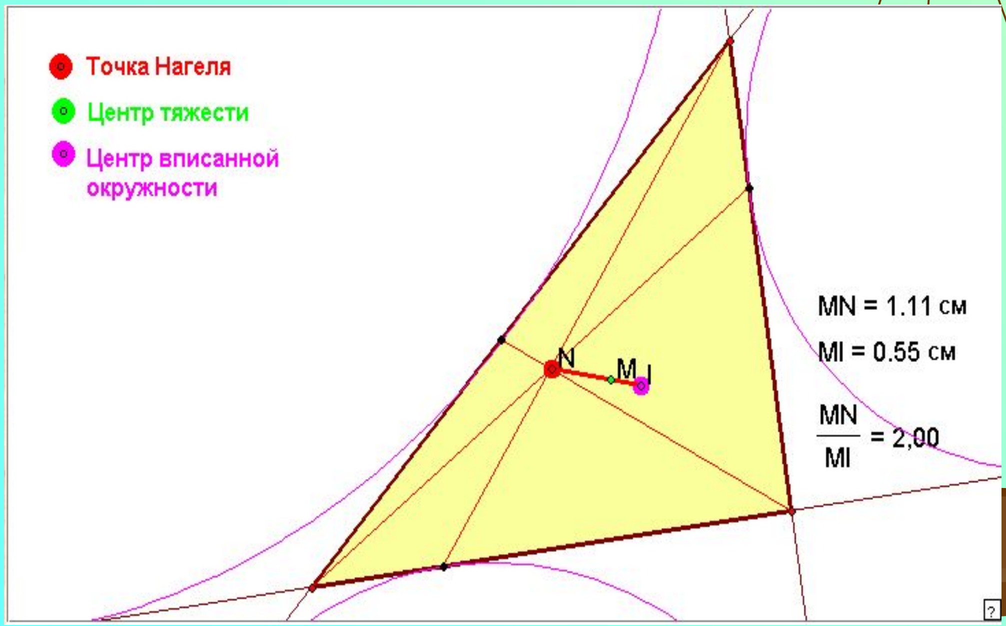
ТОЧКА ЖЕРГОННА

- Три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная в него окружность касается соответственно противоположных вершинам сторон, пересекаются в одной точке J. Она называется ***точкой Жергонна***.



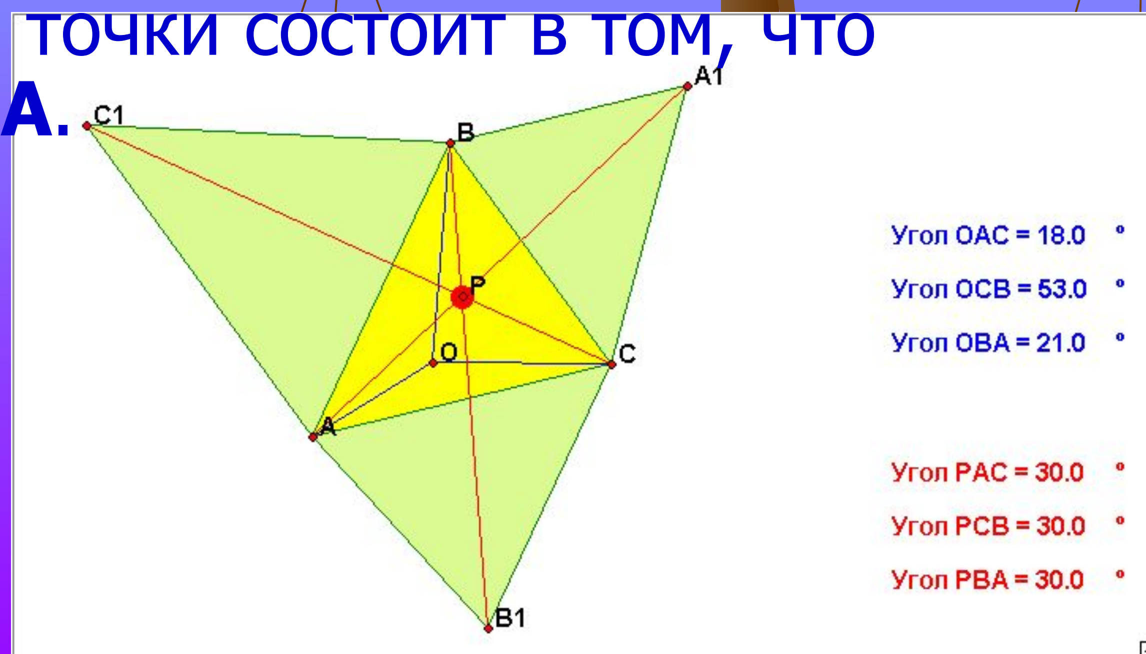
ТОЧКА НАГЕЛЯ

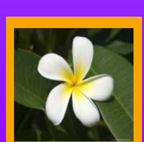
- Отрезки, соединяющие каждую из вершин треугольника с точкой, в которой противоположная сторона касается соответствующей вневписанной окружности, пересекаются в одной точке ***N*** – ***точке Нагеля***. Она интересна тем, что отрезок NI, где ***I*** – ***центр вписанной окружности***, проходит через ***центр тяжести M*** (точка пересечения медиан) треугольника и делится им в отношении NM : MI = 2 : 1.



ТОЧКА БРОКАРА

- Если на сторонах треугольника **ABC** внешним образом построить подобные ему треугольники **CA1B**, **CAB1** и **C1AB** (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т.д.), то прямые **AA1, BB1** и **CC1** пересекутся в точке ***P***, которую называют *точкой Брокара*. Одна из особеностей этой точки состоит в том, что **PAC** = **PCB** = **PBA**.





ПРЯМАЯ СИМСОНА

- *Основания перпендикуляров*, опущенных из точки Р *описанной окружности* треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой – ***Прямой Симсона***.
  Верно и обратное утверждение: если *основания перпендикуляров*, опущенных из некоторой точки Р на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка Р лежит на *описанной окружности* треугольника.