

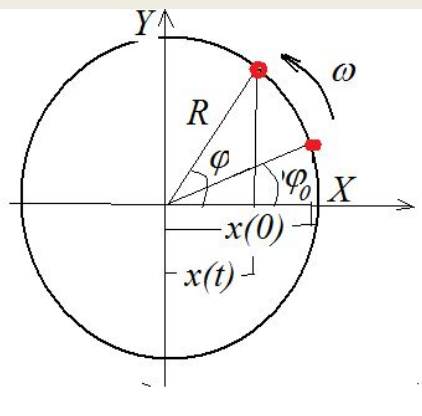
Тема 5 Колебания Часть 1

Основные понятия и классификация колебаний

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания **механические**, **электромагнитные** и **электромеханические**.

Пример колебательного процесса: движение м.т. по окружности с постоянной скоростью.



$$x(0) = R \cos \varphi_0$$

$$x(t) = R \cos \varphi$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Такое движение – суперпозиция колебательных движений во взаимно перпендикулярных направлениях.

Любой повторяющийся процесс, исключая случайный, можно представить в виде конечной суммы колебаний.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).

Вынужденными называют такие колебания, которые происходят в системе под периодическим внешним воздействием

5.1 Гармонические колебания

Гармонические колебания описываются уравнением

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Или, т.к. $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$,

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad , \text{ где } x$$

- смещение колеблющейся величины из положения равновесия

A – амплитуда колебаний

ω_0 – круговая (циклическая) частота

φ – начальная фаза колебаний

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний

Минимальный промежуток времени, по истечении которого колебательный процесс повторяется, называется периодом колебаний T

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi \quad \text{Откуда} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Величина, обратная периоду, называется частотой колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu$

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса); при этом параметры $A, \omega_0, \varphi = \text{const}$.

Колебательная система, в которой могут происходить гармонические колебания, называется **гармоническим осциллятором**

Рассмотрим гармонические колебания материальной точки вдоль оси OX . В момент времени t :

1) Ее смещение

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

2) Скорость

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

3)

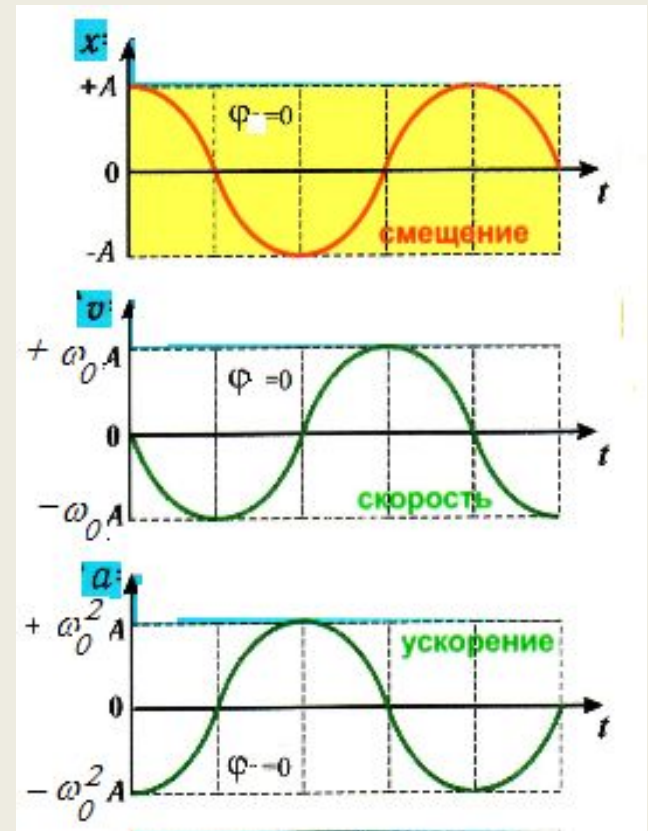
Ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

4) Сила, действующая на м.т.

$$F = ma = -m\omega_0^2 x$$

Она пропорциональна смещению и направлена в противоположную смещению сторону – это квазиупругая сила.



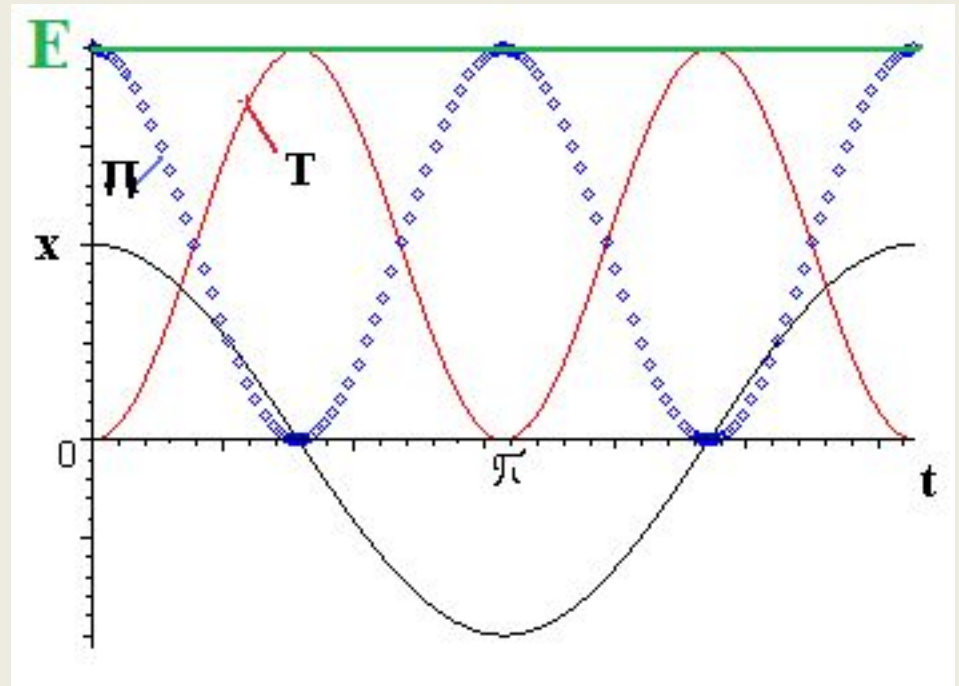
5) Кинетическая энергия м.т. $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

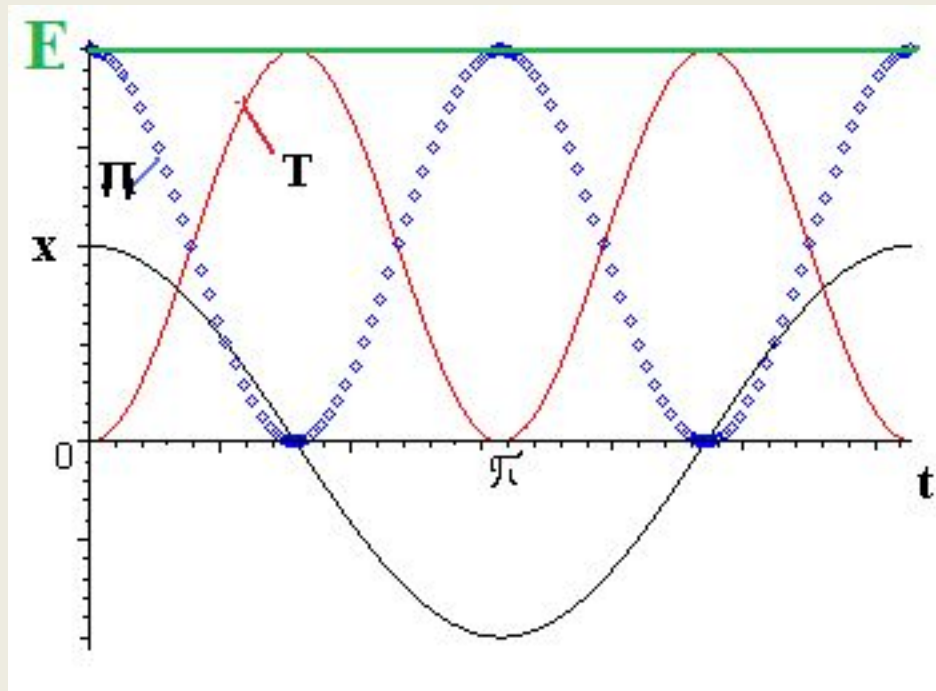
6) Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы F :

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

7) Полная энергия

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$





Колебания потенциальной и кинетической энергий происходят с периодом, в два раза меньшим, чем период колебаний смещения $x(t)$.

Происходит постоянная перекачка энергии из потенциальной Π в кинетическую T и обратно, при этом полная энергия системы E остается постоянной.

8) Дифференциальное уравнение гармонических колебаний м.
т.:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Его решение: $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

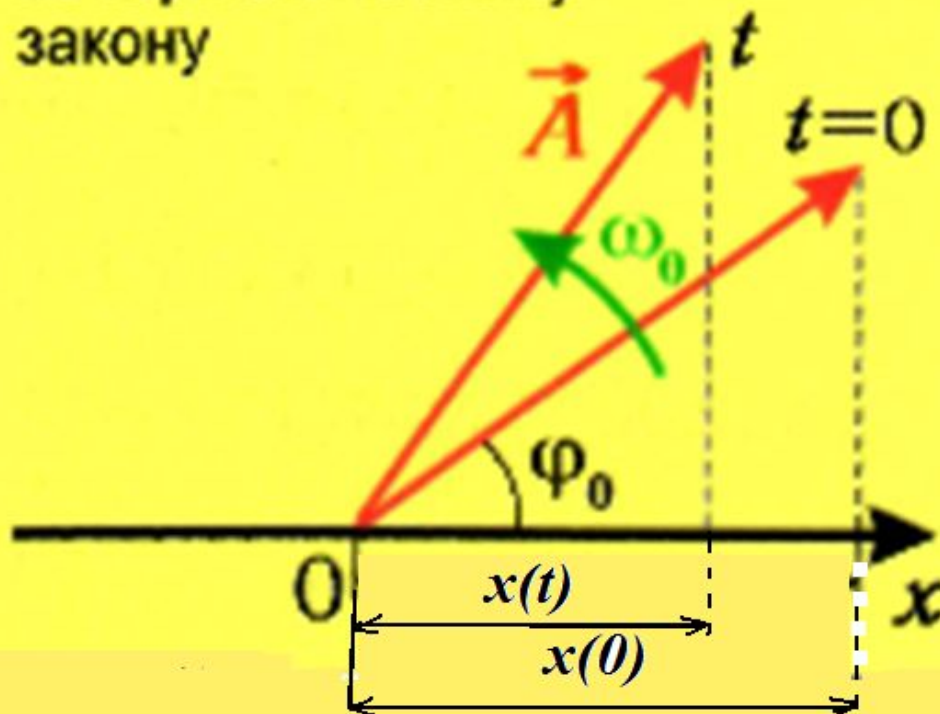
Или с учетом того, что $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Гармонические колебания изображаются графически
методом векторных диаграмм.

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Проекция вектора $\vec{A}$ изменяется по гармоническому закону



Колеблущуюся величину представляют и комплексным числом

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\operatorname{Re}(\tilde{x}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = x$$

Обозначение **Re** вещественной части обычно опускается

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

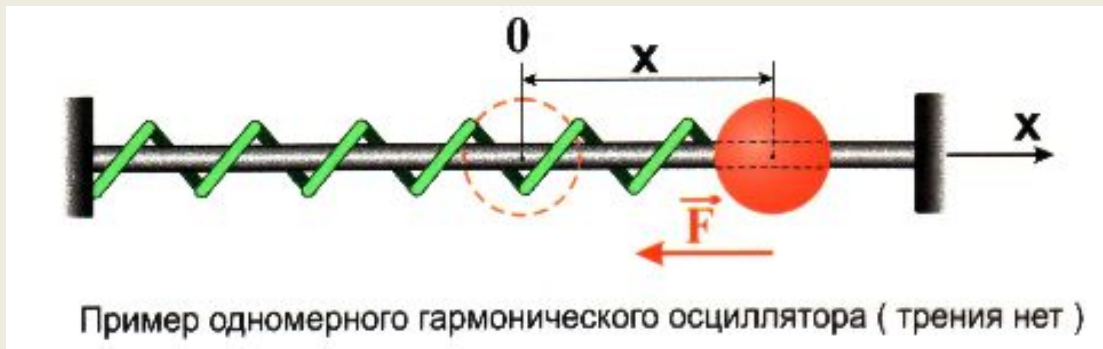
В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина x равна вещественной части комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида:

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Пружинный маятник.



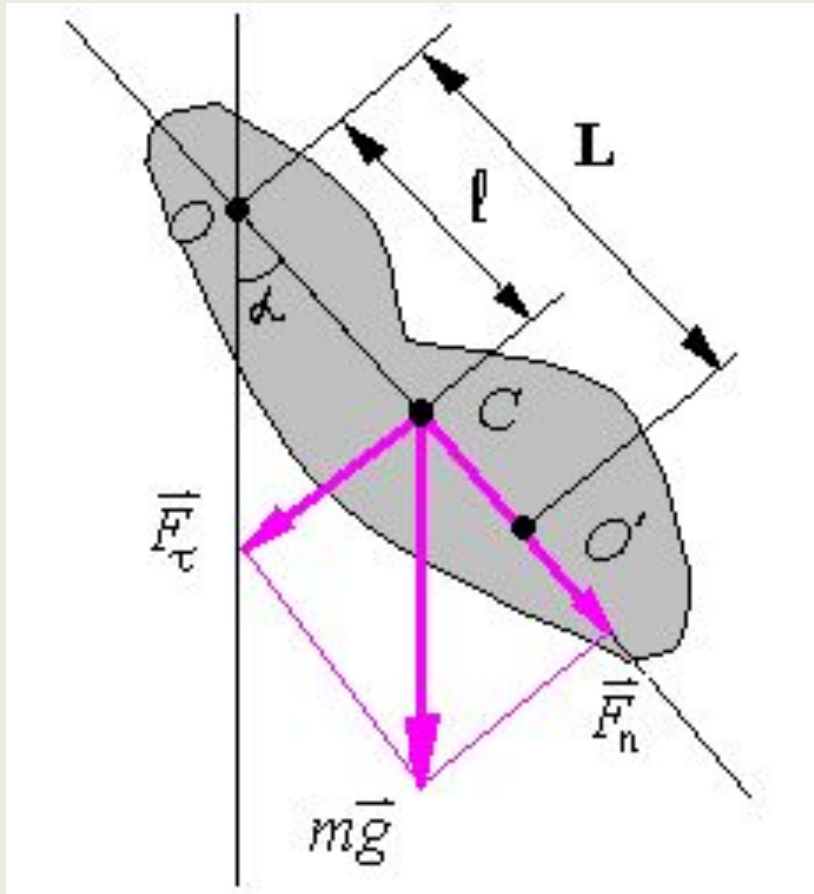
$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Физический маятник.



Физический маятник — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящий через центр масс C тела.

$$M = l \varepsilon = l \alpha = F_{\tau} l =$$

$$= -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha$$

$$l \alpha + mgl \alpha = 0$$

$$\alpha + \frac{mgl}{I} \alpha = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad \alpha + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$-\alpha + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad ;$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{I}{ml} \text{ — приведенная длина физического маятника}$$

Математический маятник.

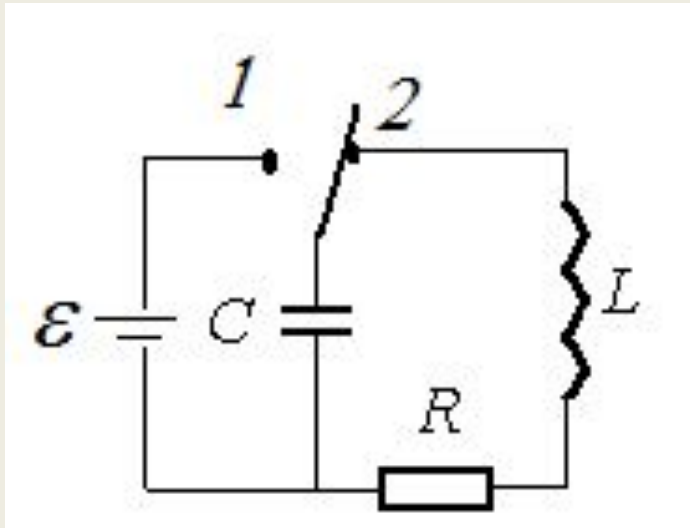
Математический маятник — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

$$I = ml^2 \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}$$

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Свободные гармонические колебания в колебательном контуре.



$$IR + U_C = \mathcal{E}_S$$

$$L \frac{dl}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (*)$$

$$R = 0: \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$Q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{Формула Томсона}$$

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Отсюда видно, что колебания тока опережают по фазе колебания заряда на $\frac{\pi}{2}$.

Колебания электрической энергии , запасенной в конденсаторе

$$W_E = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Колебания энергии магнитного поля в катушке

$$W_H = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Полная энергия, запасенная в контуре

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{C}{2} \frac{Q_0^2}{C^2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{2} \frac{Q_0^2}{LC} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{Q_0^2}{2C} = const$$

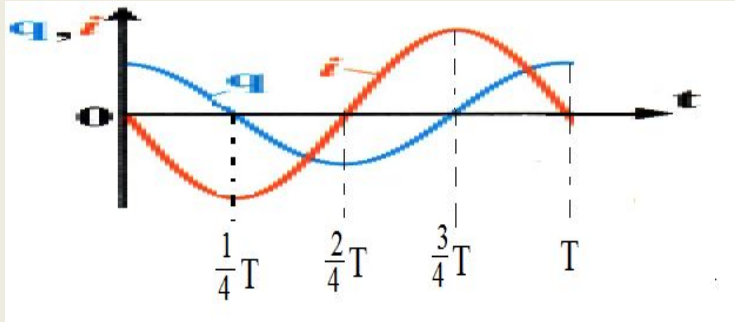
Связь амплитудных значений тока и напряжения

$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \quad \longrightarrow \quad U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0$$

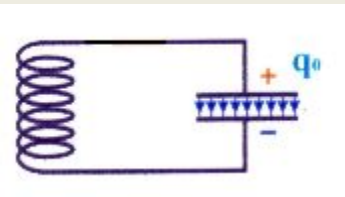
Преобразования энергии в колебательном контуре

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

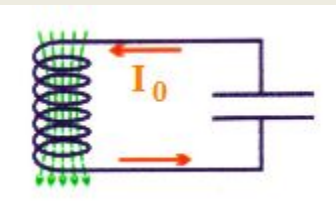
$$I = -I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



В последующие полпериода процесс повторяется в обратном направлении.

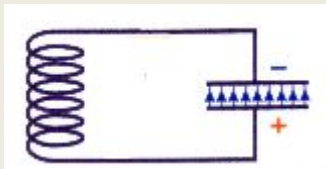


$t = 0 : q_{\max} = q_0, E = \frac{q_0^2}{2C}$ - мгновенной разрядке С препятствует ε_s , сдерживающая процесс нарастания I в катушке.



$$t = \frac{1}{4}T, q = 0, I_{\max} = I_0, E = \frac{LI_0^2}{2}$$

- С разряжен, ток и энергия магнитного поля максимальны. Мгновенному убыванию тока I препятствует появление ε_s .



$$t = \frac{2}{4}T, I = 0, q = -q_0, E = \frac{q_0^2}{2C}$$

- С зарядился индукционным током катушки.