Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Школа №80»

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ НА ТЕМУ:
«10 СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Выполнила:
Ученик
Огнев Давид
.

Г. Новосибирск

2022 г.

Содержание проекта:

- Введение;
- Объект исследования;
- Предмет исследования;
- Задачи;
- Гипотезы;
- Основная часть;
- Заключение;

Введение:

Квадратные уравнения изучают в 8 классе. Актуальность этой темы выражена в том, что квадратные уравнения - это базовая тема школьного курса математики. Умение решать их нам пригодятся всегда, и особенно, при подготовке к ГИА и ЕГЭ, а так же к решению квадратных уравнений сводятся решения дробно-рациональных уравнений и текстовых задач в основной школе, показательных, тригонометрических и логарифмических уравнений в средней школе. В учебниках по алгебре в курсе школьной программы рассматриваются только два способа решения квадратных уравнений. Однако имеются и другие приёмы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать уравнения. Данные приёмы заслуживают особого внимания, поскольку они не отражены в школьных учебниках математики. Овладение данными приёмами поможет мне в экономии времени и повышении качества выполнения заданий ОГЭ.

Объект исследования: квадратные уравнения**.**

Предмет исследования: способы решения квадратных уравнений.

Цель исследования: выявить способы решения квадратных уравнения и рассмотреть применение

данных способов на конкретных примерах.

Задача*: о*писать технологии различных существующих способов решения квадратных уравнений;

Гипотеза: любое квадратное уравнение можно решить всеми способами.

•

1. СПОСОБ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение

$x2 + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть на множители:
$x2 + 10x - 24 = x2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.
Следовательно, уравнение можно переписать так:
$(x + 12)(x - 2) = 0$
Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и - 12 являются корнями уравнения $x2 + 10x - 24 = 0$.

2. СПОСОБ: Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение

x2 + 6x - 7 = 0.

Выделим в левой части полный квадрат.
Для этого запишем выражение x2 + 6x в следующем виде:
x2 + 6x = x2 + 2• x • 3.
В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как
x2 + 2• x • 3 + 32 = (x + 3)2.
Преобразуем теперь левую часть уравнения
x2 + 6x - 7 = 0,
прибавляя к ней и вычитая 32. Имеем:
x2 + 6x - 7 = x2 + 2• x • 3 + 32- 32- 7 = (x + 3)2- 9 - 7 = (x + 3)2- 16.
Таким образом, данное уравнение можно записать так:
(x + 3)2- 16 =0, (x + 3)2 = 16.
Следовательно, x + 3 - 4 = 0, x1 = 1, или x + 3 = -4, x2= -7.

3. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

на 4а и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Если дикриминант положительный, то уравнение имеет два различных корня.

Если дискриминант равен нулю, то уравнение

имеет единственный корень.

Если дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет корней.

4. СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + c = 0$.

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$x_1 x_2 = q,$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

Можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки).

а) Если сводный член q приведенного уравнения положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p > 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = -3 < 0$;

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

$x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, так как $q = -5 < 0$ и $p = 4 > 0$.

5. СПОСОБ: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0,$ где $a \neq 0.$

Умножая обе его части на а, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0.$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0,$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a.$

$2x^2 – 11x + 15 = 0.$

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 – 11y + 30 = 0.$

Согласно теореме Виета

$y_1 = 5\ x_1 = 5/2\ x_1 = 2,5 \quad y_2 = 6\ x_2 = 6/2\ x_2 = 3.$

Ответ: 2,5; 3.

При этом способе коэффициент *a* умножается на свободный член,

как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*.

6. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$, *то*

$x_1 = 1,$

$x_2 = c/a.$

2)Если a + c = b, то

x1=-1,

x2=-c/a.

-

7. СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения.

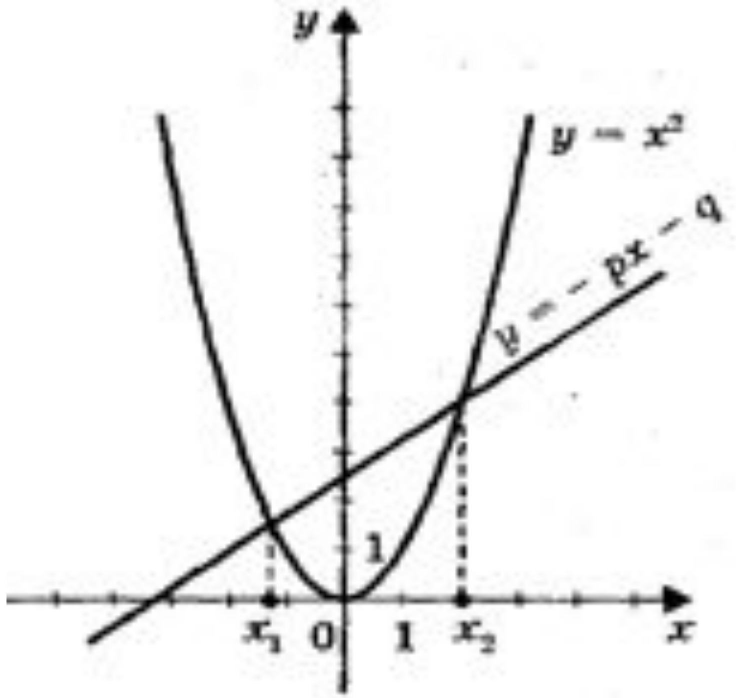

Рис. 1

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$x^2 = - px - q.$

Построим графики зависимости

$y = x^2$ и $y = - px - q$.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квад- ратного уравнения;

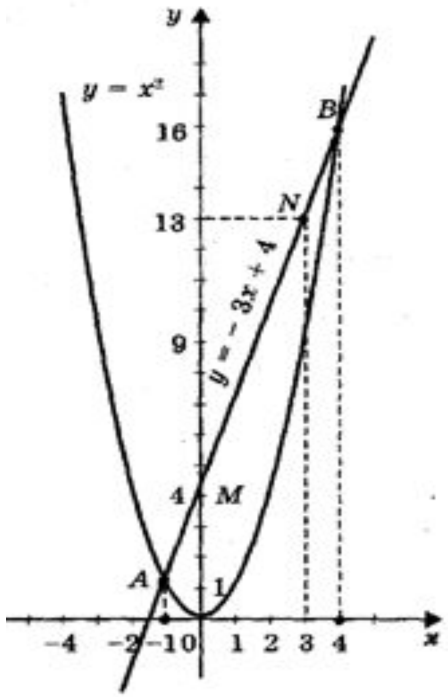

Рис. 2

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

8. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Допустим, что искомая окружность пересекает ось

абсцисс в точках *B(x1; 0)* и *D (x2; 0),* где *x1* и *x2* - корни уравнения *ax2 + bx + c = 0,* и проходит через точки

A(0; 1) и *C(0; c/a)* на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем *OB • OD = OA • OC*, откуда *OC = OB • OD*/ *OA= x1x2/ 1 = c/a.*

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров *SF* и *SK*, восстановленных в поэтому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$$

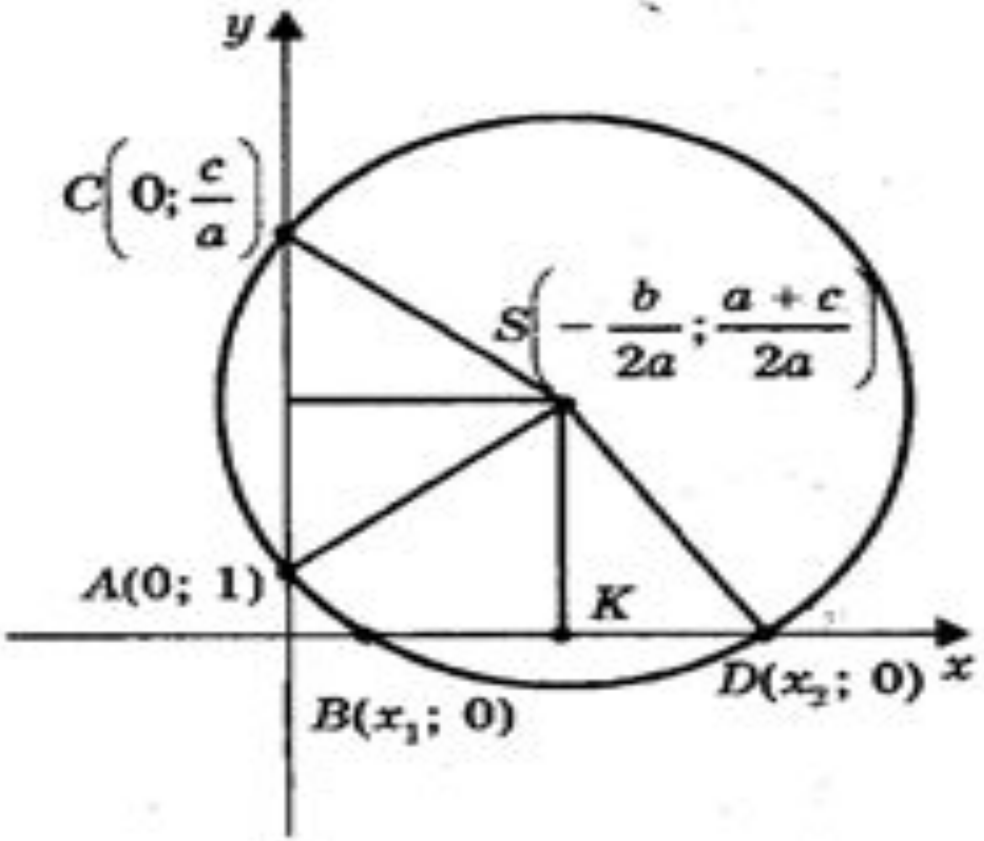

Рис. 5

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

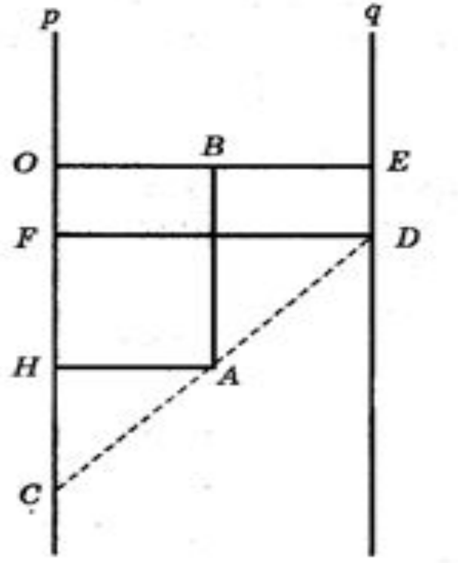

Рис. 11

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDF получ им пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

$z^2 + pz + q = 0,$

причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

10 СПОСОБ: Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна 2,5x. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата , сторона каждого их них 2,5, а площадь 6,25.

Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников $(4 \cdot 2{,}5x = 10x)$ и четырех пристроенных квадратов $(6{,}25 \cdot 4 = 25)$, т.е. $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя

$x^2 + 10x$ числом 39, получим, что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим:

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

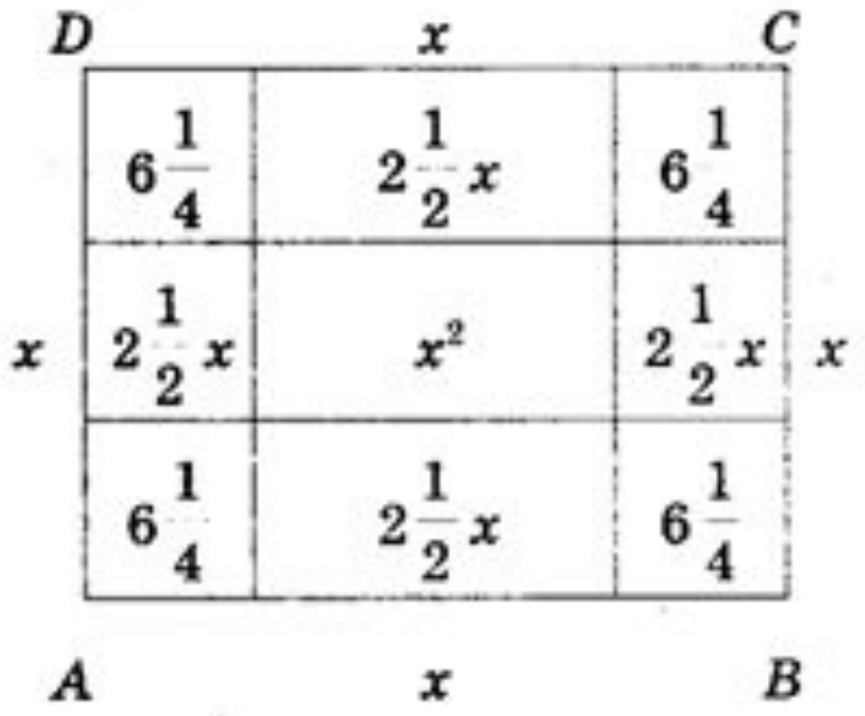

Рис. 15

Заключение

В данной работе рассмотрены способы решения квадратных уравнений.

Данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку некоторые из них не отражены в школьных учебниках математики. Овладение данными приёмами поможет мне экономить время и эффективно решать уравнения.

Таким образом, цель работы - выявить способы решения квадратных уравнения и рассмотреть применение данных способов на конкретных примерах - *достигнута, а гипотеза* - любое квадратное уравнение можно решить всеми способами - подтверждена.

-