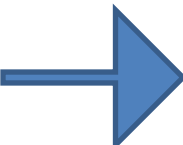


Численные методы

Решение уравнений



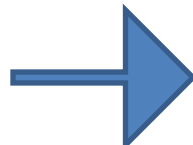
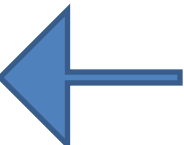
Решение уравнений

1. Основные понятия

2. Метод дихотомии

3. Метод итераций

4. Метод Ньютона (метод касательных)



Задача: решить уравнение

$$x^2 = 5 \cos x \Leftrightarrow x^2 - 5 \cos x = 0$$

$$f(x) = 0$$

Типы решения:

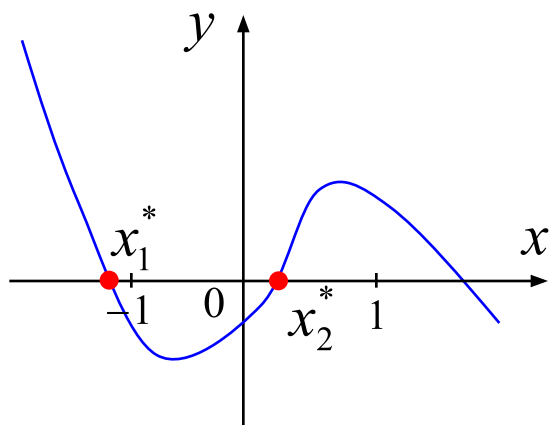
- аналитическое (точное, в виде формулы)

$$x^* = \dots$$

- приближенное (неточное)



графический метод



численные методы

$x_0 = -1$ начальное приближение

$$x_1 = -1,102$$

$$x_2 = -1,215$$

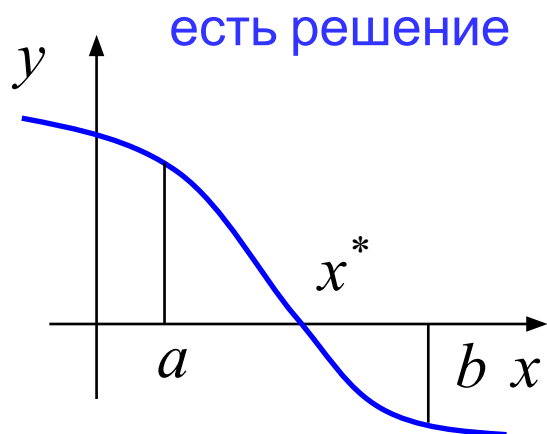


при $N \rightarrow \infty$

$$x^* \approx -1,252\dots$$

Есть ли решение на $[a, b]$?

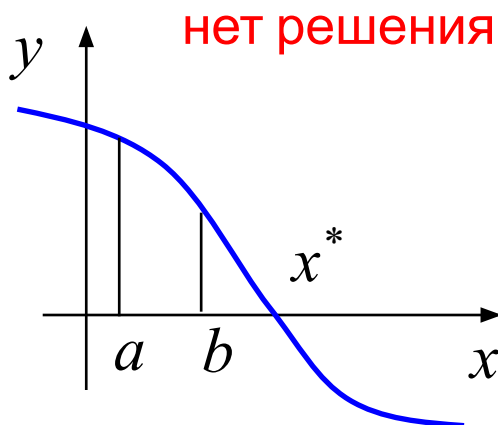
МЕНЮ



$$f(a) > 0$$

$$f(b) < 0$$

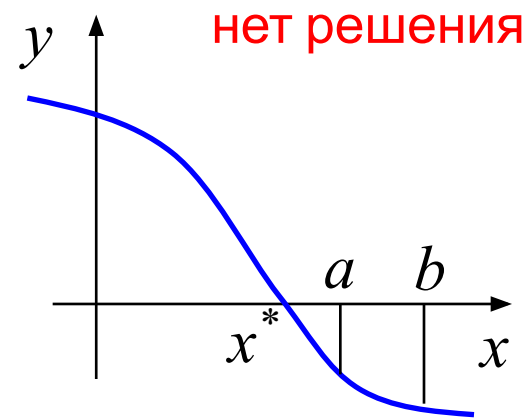
$$f(a)f(b) < 0$$



$$f(a) > 0$$

$$f(b) > 0$$

$$f(a)f(b) > 0$$



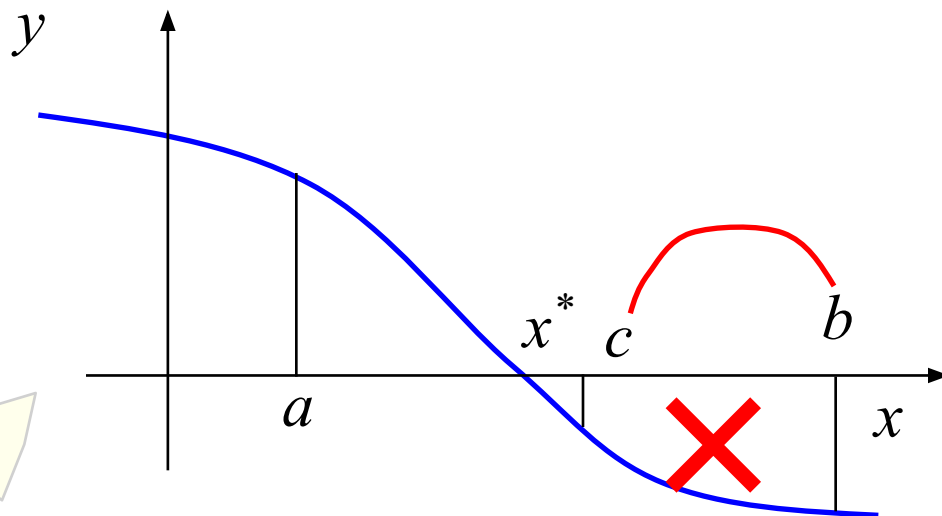
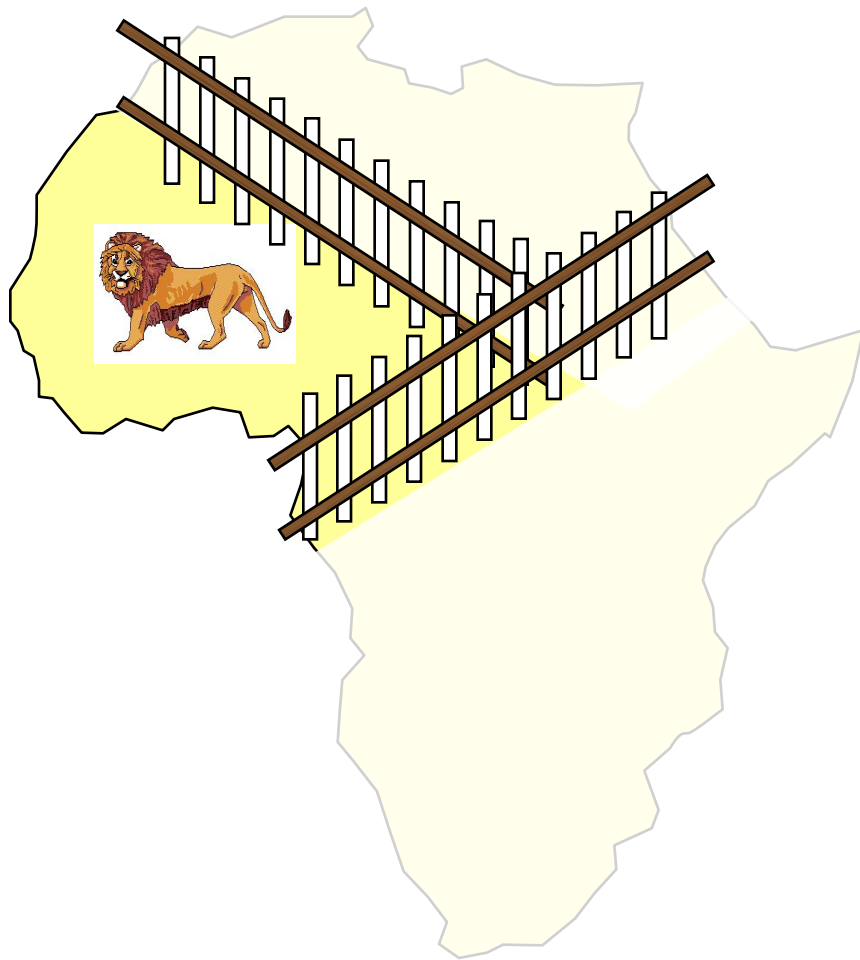
$$f(a) < 0$$

$$f(b) < 0$$



Если **непрерывная** функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервалы $[a, b]$, то в некоторой точке внутри $[a, b]$ имеем $f(x) = 0$!

Метод дихотомии (деление пополам)МЕНЮ



1. Найти середину отрезка $[a, b]$:
$$c = (a + b) / 2;$$
2. Если $f(c) * f(a) < 0$, сдвинуть правую границу интервала
$$b = c;$$
3. Если $f(c) * f(a) \geq 0$, сдвинуть левую границу интервала
$$a = c;$$
4. Повторять шаги 1-3, пока не будет $b - a \leq \varepsilon$.

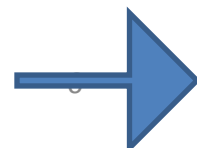
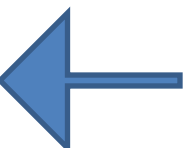
Метод дихотомии (деления пополам) МЕНЮ



- простота
- можно получить решение с заданной точностью (в пределах точности машинных вычислений)



- нужно знать интервал $[a, b]$
- на интервале $[a, b]$ должно быть только одно решение
- большое число шагов для достижения высокой точности
- только для функций одной переменной



Задача: $f(x) = 0$ $x = ?$

Эквивалентные преобразования:

$b \cdot f(x) = 0$ имеет те же решения при $b \neq 0$

$$x + b \cdot f(x) = x$$

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = x + b \cdot f(x)$$

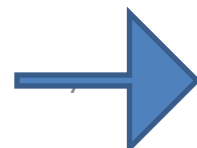
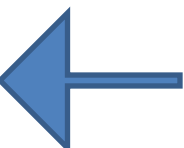
Идея решения:

x_0 – начальное приближение (например, с графика)

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Проблемы:

- 1) как лучше выбрать? b
- 2) всегда ли так можно найти решение?



Сходимость итераций

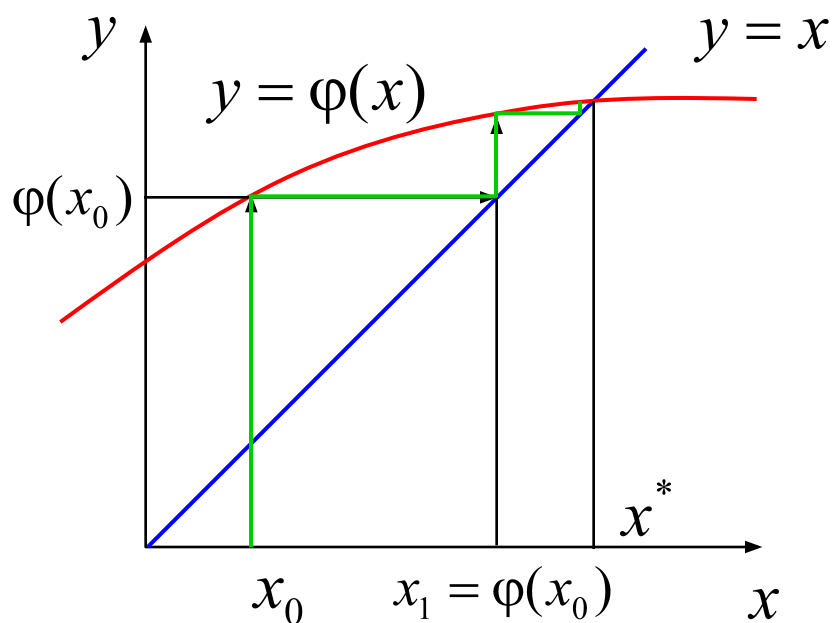
МЕНЮ

Сходящийся итерационный процесс: последовательность приближается (сходится) к точному решению.

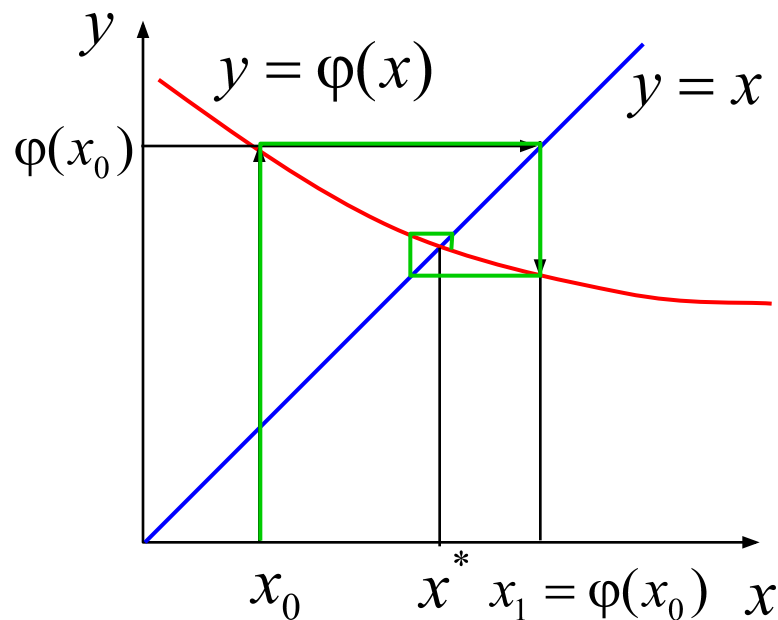
$$x_0, x_1, \dots$$

$$x^* = \varphi(x^*)$$

$$x_0, x_1, x_2, \dots \rightarrow x^*$$



односторонняя сходимость



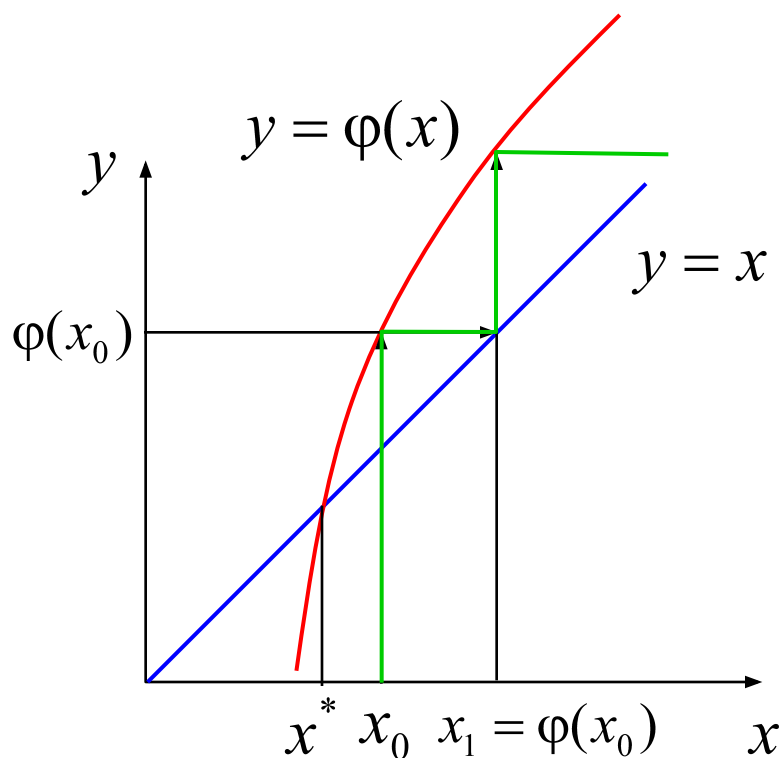
двусторонняя сходимость

Расходимость итераций

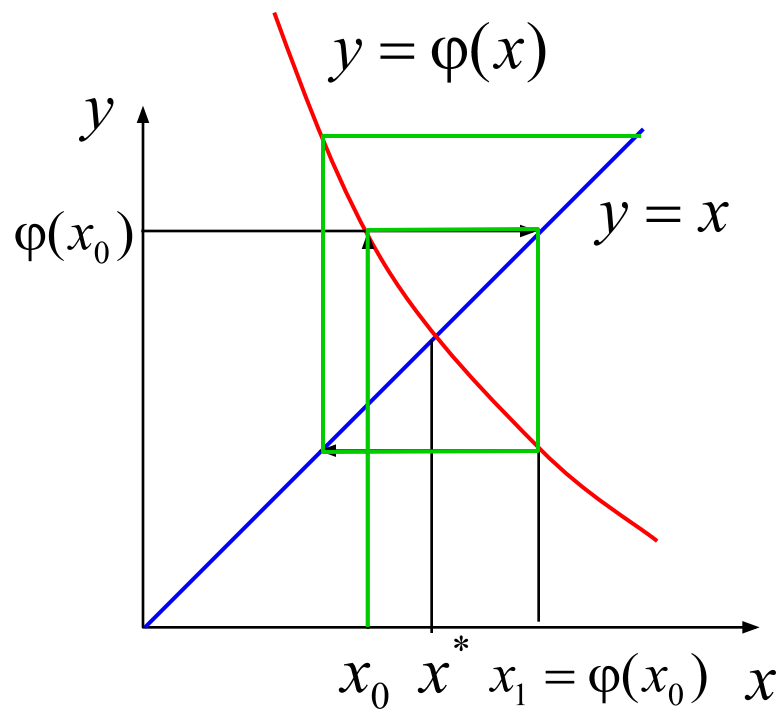
МЕНЮ

Расходящийся итерационный процесс:

последовательность $x_0, x_1, \dots$ неограниченно возрастает или убывает, не приближается к решению.



односторонняя расходимость



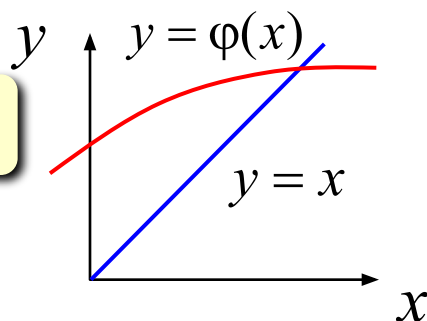
двусторонняя расходимость

От чего зависит сходимость?

МЕНЮ

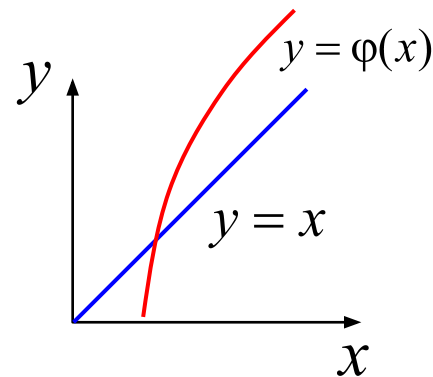
сходится

$$0 < \varphi'(x) < 1$$

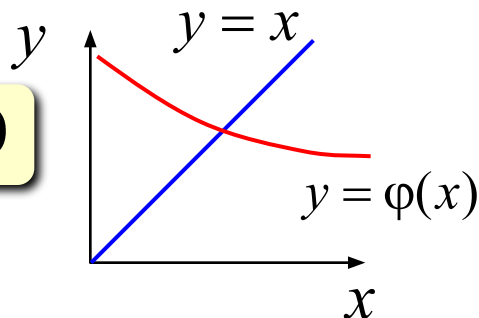


расходится

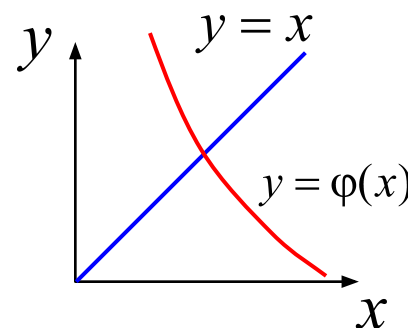
$$\varphi'(x) > 1$$



$$-1 < \varphi'(x) < 0$$



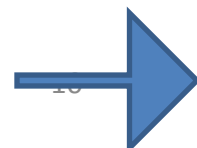
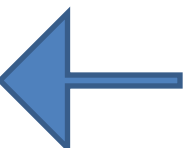
$$\varphi'(x) < -1$$



Выводы:

- сходимость итераций зависит от производной $\varphi'(x)$
- итерации сходятся при $|\varphi'(x)| < 1$ и расходятся при $|\varphi'(x)| > 1$
- сходимость определяется выбором параметра b

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x)$$



Как выбрать b ?

МЕНЮ

- наугад, пробовать разные варианты
- для начального приближения x_0

$$-1 < 1 + b \cdot f'(x_0) < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < b \cdot f'(x_0) < 0$$

$$f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{f'(x_0)} < b < 0$$

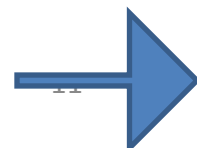
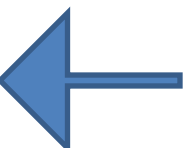
$$f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < -\frac{2}{f'(x_0)}$$

- пересчитывать на каждом шаге, например:

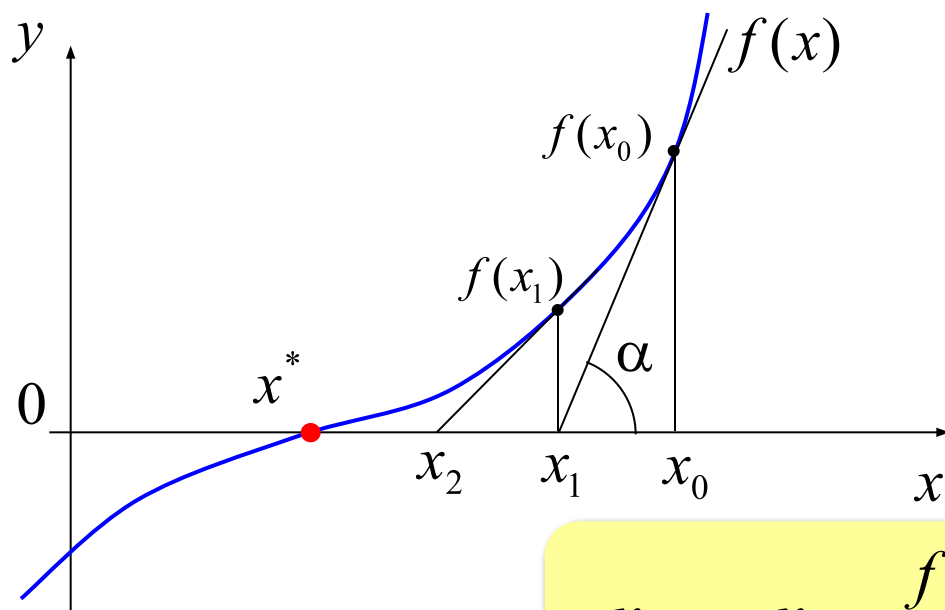
$$1 + b \cdot f'(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_k)}$$



Какие могут быть проблемы?



Метод Ньютона (метод касательных)МЕНЮ



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Какая связь с методом итераций?

$$x_k = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_{k-1})}$$



- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на k -ом шаге обратно пропорциональна k^2
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функции нескольких переменных



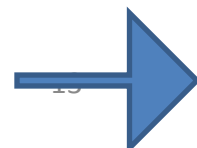
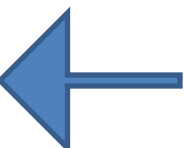
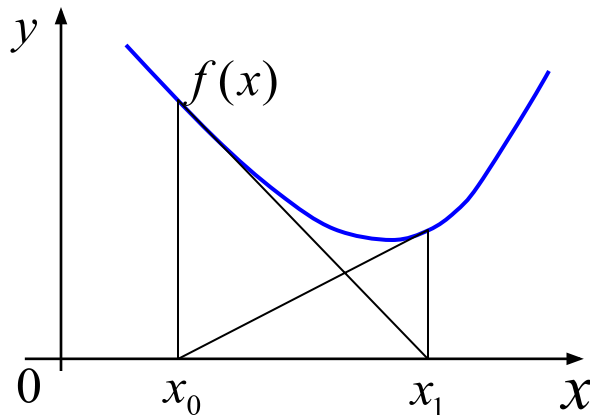
- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

- может закликиваться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$



**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!!!**

