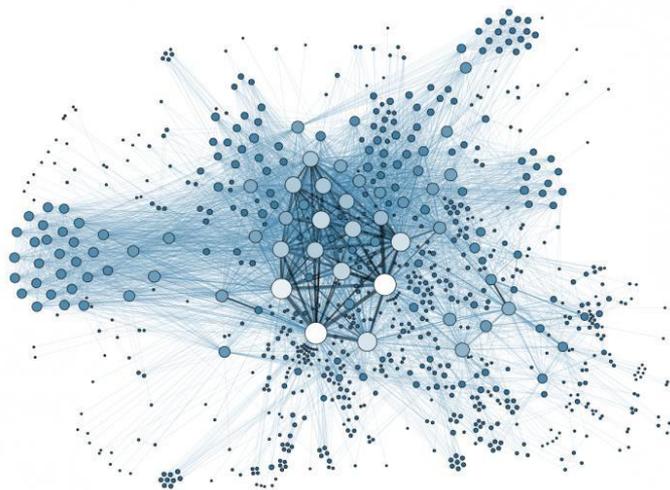
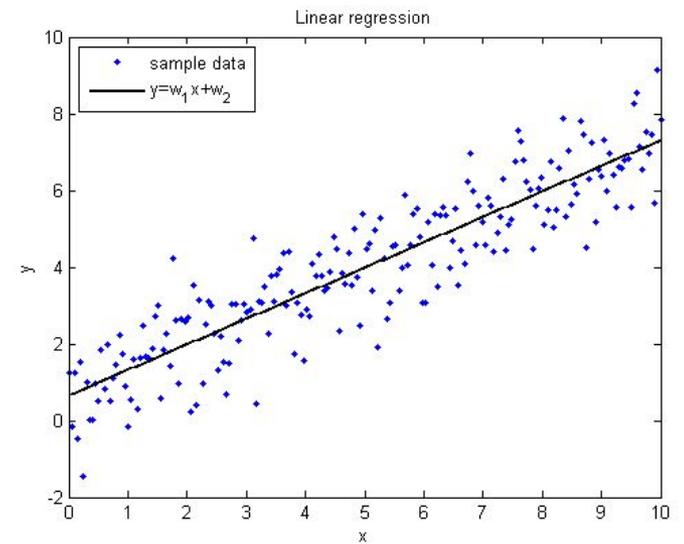


# Лекция 6



## Корреляционный и регрессионный анализ

Цель лекции: изучить основы корреляционного и регрессионного анализа и их реализацию в решении задач



План лекции:

1. Основы корреляционного и регрессионного анализа.
2. Линейные и нелинейные регрессии.
3. Реализация регрессионного анализа.
4. Реализация корреляционного анализа. <sup>2</sup>

# 1. Основы корреляционного и регрессионного анализа.

**Корреляция** — статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми).

**Корреляционный анализ** — метод обработки статистических данных, с помощью которого измеряется теснота связи между двумя или более переменными.

## Ограничения корреляционного анализа:

- 1) Применение возможно при наличии достаточного количества наблюдений для изучения. На практике считается, что число наблюдений должно не менее чем в 56 раз превышать число факторов.
- 2) Необходимо, чтобы совокупность значений всех факторных и результативного признаков подчинялась многомерному нормальному распределению.
- 3) Исходная совокупность значений должна быть качественно однородной.
- 4) Сам по себе факт корреляционной зависимости не даёт основания утверждать, что одна из переменных предшествует или является причиной изменений, или то, что переменные вообще причинно связаны между собой, а не наблюдается действие третьего фактора.

**Регрессия** – зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин.

**Регрессионный анализ** – раздел математической статистики, объединяющий практические методы исследования регрессионной зависимости между величинами по данным статистических наблюдений.

## **Задача корреляционного анализа –**

определение тесноты и направления связи между изучаемыми величинами.

В ходе **регрессионного анализа** определяется аналитическое выражение связи зависимой случайной величины  $Y$  (результативный признак) с независимыми случайными величинами  $X_1, X_2, \dots, X_m$  (факторами).

Практически речь идёт о том, чтобы, анализируя множество точек на графике (т.е. множество статистических данных), найти линию, по возможности точно отражающую заключённую в этом множестве закономерность, тенденцию – **линию регрессии**.

**Уравнение регрессии** - это форма связи результативного признака  $Y$  с факторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . В зависимости от типа выбранного уравнения различают линейную и нелинейную (квадратичную, экспоненциальную, логарифмическую и т.д.) регрессию.

В зависимости от числа взаимосвязанных признаков различают **парную** и **множественную регрессию**.

**Парная** – исследуется связь между двумя признаками (результативным и факторным).

**Множественная** (многофакторная) – между тремя признаками (результативным и несколькими факторными).

# Последовательность этапов регрессионного анализа

- 1) Формулировка задачи. На этом этапе формируются предварительные гипотезы о зависимости исследуемых явлений.
- 2) Определение зависимых и независимых (объясняющих) переменных.
- 3) Сбор статистических данных. Данные должны быть собраны для каждой из переменных, включенных в регрессионную модель.
- 4) Формулировка гипотезы о форме связи (парная или множественная, линейная или нелинейная).
- 5) Определение **функции регрессии** (заключается в расчете численных значений параметров уравнения регрессии)
- 6) Оценка точности регрессионного анализа.
- 7) Интерпретация полученных результатов. Полученные результаты регрессионного анализа сравниваются с предварительными гипотезами. Оценивается корректность и правдоподобие полученных результатов.
- 8) Предсказание неизвестных значений зависимой переменной.

## 2. Линейные и нелинейные регрессии.

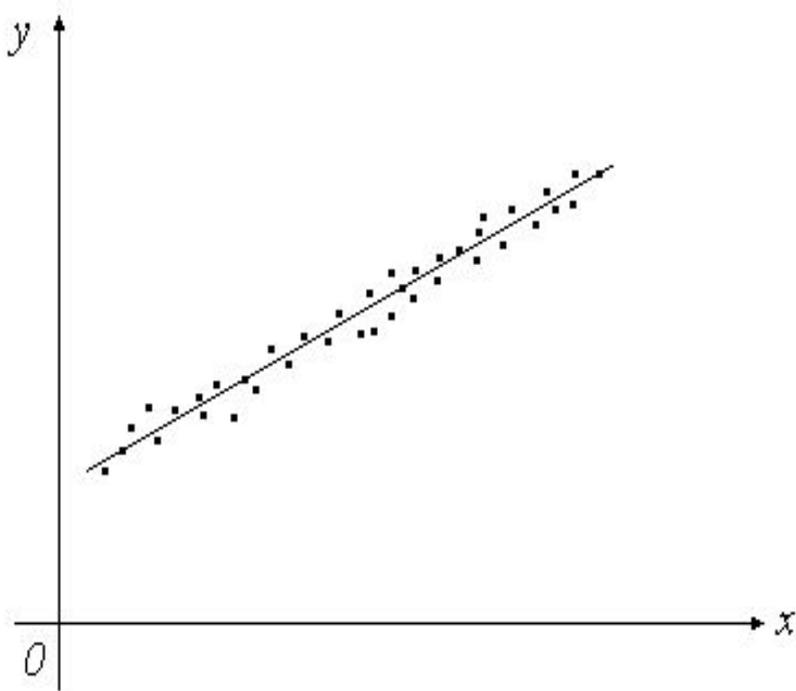


Рисунок 1 – Линейная регрессия

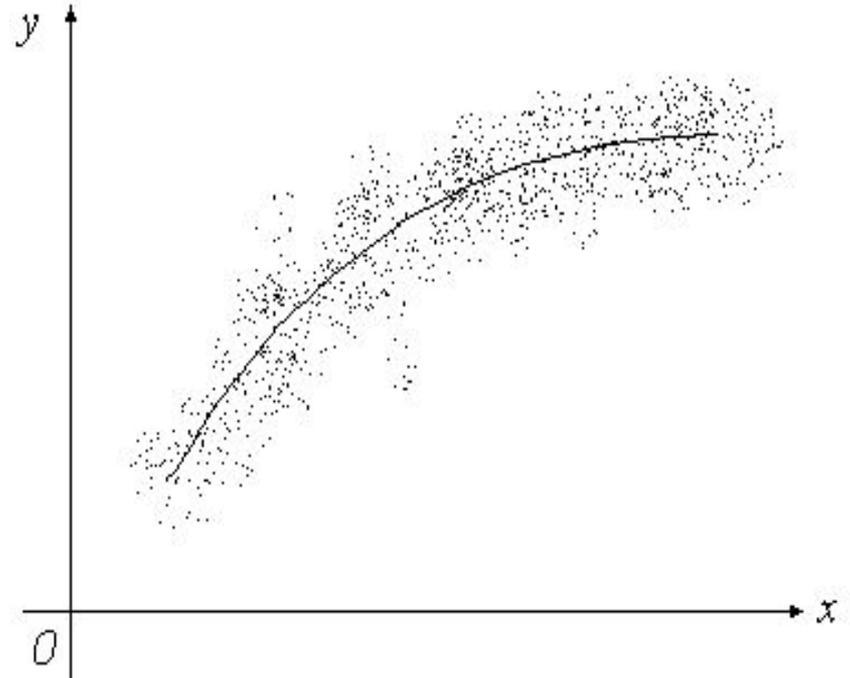


Рисунок 2 – Нелинейная регрессия

# Линейная регрессия

При моделировании технологических процессов во многих случаях связь между входными ( $x$ ) и выходными ( $y$ ) параметрами можно аппроксимировать линейным полиномом (зависимостью)

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_i$$

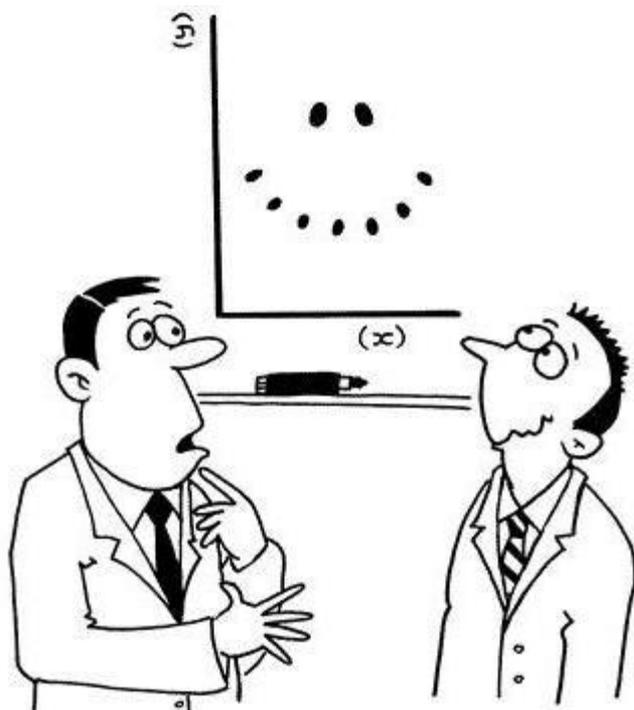
Для получения вида математической модели необходимо определить коэффициенты уравнения регрессии  $b_0$  и  $b_1$ . Для этого применяется метод наименьших квадратов.

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

# Пример определения линейной регрессии

	$X_i$	$Y_i$	$X_i^2$	$X_i Y_i$	$Y_i - Y_{cp}$	$(Y_i - Y_{cp})^2$	Функция
Значения	1	30					
	2	7					
	3	8					
	4	1					
Сумма	<b>10</b>	<b>46</b>					



# Нелинейная регрессия

1) Полиномиальная

$$y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3$$

2) Гиперболическая

$$y = a + \frac{b}{x}$$

3) Степенная

$$y = a \cdot x^b$$

4) Показательная

$$y = a \cdot b^x$$

5) Экспоненциальная

$$y = b_0 \cdot e^{b_1 x}$$

### 3. Реализация регрессионного анализа.

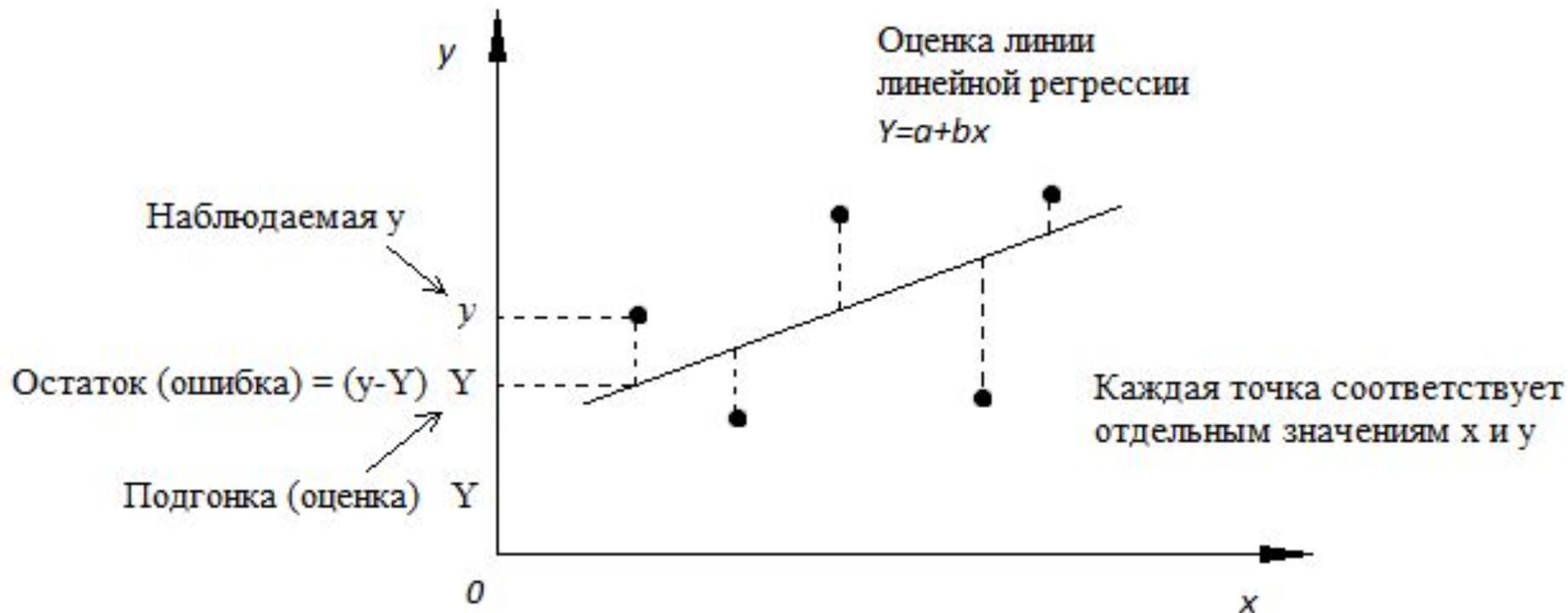
Уравнение множественной линейной регрессии

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m,$$

где  $\hat{y}$  – теоретические значения результативного признака, полученные путем подстановки соответствующих значений факторных признаков в уравнение регрессии;

$x_1, x_2, \dots, x_m$  – значения факторных признаков;

$a_0, a_1, \dots, a_m$  – параметры уравнения (коэффициенты регрессии).



*Рисунок - Линия линейной регрессии с изображенными остатками (вертикальные пунктирные линии) для каждой точки.*

# Метод наименьших квадратов

**Параметры уравнения регрессии** могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов, который используется в пакете анализа данных «Регрессия» (MS Excel):

находятся параметры модели, при которых минимизируется сумма квадратов отклонений эмпирических (фактических) значений результативного признака от теоретических, полученных по выбранному уравнению регрессии, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} - \dots - a_m x_{mi})^2 \rightarrow \min.$$

Рассматривая  $S$  в качестве функции параметров  $a_i$  и проводя математические преобразования (дифференцирование), получаем систему нормальных уравнений с  $m$  неизвестными (по числу параметров  $a_i$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum y = na_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + \dots + a_m \sum x_m, \\ \sum yx_1 = a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_2x_1 + \dots + a_m \sum x_mx_1, \\ \dots \\ \sum yx_m = a_0 \sum x_m + a_1 \sum x_1x_m + a_2 \sum x_2x_m + \dots + a_m \sum x_m^2. \end{array} \right.$$

Здесь  $n$  – число наблюдений,  $m$  – число факторов в уравнении регрессии.

Решение системы позволяет получить значения параметров регрессии  $a_i$ .

Для определения величины степени стохастической взаимосвязи результативного признака  $Y$  и факторов  $X$  необходимо знать следующие дисперсии:

**общую дисперсию** результативного признака  $Y$ , отображающую влияние как основных, так и остаточных факторов:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n},$$

где  $\bar{y}$  - среднее значение результативного признака  $Y$ .

- **факторную дисперсию** результативного признака  $Y$ , отображающую влияние только основных факторов

$$\sigma_F^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{n};$$

- **остаточную дисперсию** результативного признака  $Y$ , отображающую влияние только остаточных факторов

$$\sigma_O^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n - (m + 1)}.$$

При корреляционной связи результативного признака и факторов выполняется соотношение

$$\sigma_F^2 < \sigma_Y^2,$$

при этом

$$\sigma_Y^2 = \sigma_F^2 + \sigma_O^2.$$

## Определение коэффициента детерминации $R^2$

Для анализа общего качества уравнения линейной многофакторной регрессии используют множественный коэффициент детерминации  $R^2$ , называемый также квадратом коэффициента множественной корреляции  $R$

$$R^2 = \frac{\sigma_F^2}{\sigma_y^2}$$

и определяет долю вариации результативного признака, обусловленную изменением факторных признаков, входящих в многофакторную регрессионную модель.

Величина *R-квадрат*, называемая также мерой определенности, характеризует качество полученной регрессионной прямой. Это качество выражается степенью соответствия между исходными данными и регрессионной моделью (расчетными данными). Мера определенности всегда находится в пределах интервала  $[0;1]$ .

В большинстве случаев значение *R-квадрат* находится между этими значениями, называемыми экстремальными, т.е. между нулем и единицей.

Если значение *R-квадрата* близко к единице, это означает, что построенная модель объясняет почти всю изменчивость соответствующих переменных. И наоборот, значение *R-квадрата*, близкое к нулю, означает плохое качество построенной модели.

**Множественный R** - коэффициент множественной корреляции R - выражает степень зависимости независимых переменных (X) и зависимой переменной (Y).

*Множественный R* равен квадратному корню из коэффициента детерминации, эта величина принимает значения в интервале от нуля до единицы.

В простом линейном регрессионном анализе *множественный R* равен коэффициенту корреляции Пирсона.

# Определение F критерия Фишера

Так как в большинстве случаев уравнение регрессии приходится строить на основе выборочных данных, то возникает вопрос об адекватности построенного уравнения данным генеральной совокупности. Для этого проводится проверка статистической значимости коэффициента детерминации  $R^2$  на основе F-критерия Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m},$$

где  $n$  – число наблюдений;

$m$  – число факторов в уравнении регрессии.

Если в уравнении регрессии свободный член  $a_0 = 0$ , то числитель  $n-m-1$  следует увеличить на 1, т.е. он будет равен  $n-m$ .

# Определение ошибки аппроксимации

Для оценки адекватности уравнения регрессии часто также используют показатель средней ошибки аппроксимации

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}|}{y_i} \cdot 100\%.$$

Возможна ситуация, когда часть вычисленных коэффициентов регрессии не обладает необходимой степенью значимости, т.е. значения данных коэффициентов будут меньше их стандартной ошибки. В этом случае такие коэффициенты должны быть *исключены* из уравнения регрессии.

Поэтому проверка адекватности построенного уравнения регрессии наряду с проверкой значимости коэффициента детерминации  $R^2$  включает также и проверку значимости каждого коэффициента регрессии.

# Определение t-критерия

Для оценки адекватности уравнения регрессии часто также используют показатель средней ошибки аппроксимации

$$t = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}},$$

где  $\sigma_{a_i}$  - стандартное значение ошибки для коэффициента регрессии  $a_i$ .  
В математической статистике доказывается, что если гипотеза

$H_0 : a_i = 0$  выполняется, то величина  $t$  имеет распределение Стьюдента с  $k=n-m-1$  числом степеней свободы, т.е.

$$\frac{a_i}{\sigma_{a_i}} = t(k = n - m - 1).$$

Гипотеза  $H_0 : a_i = 0$  о незначимости коэффициента регрессии отвергается, если  $|t_p| > |t_{kp}|$ .

# Определение границ доверительных интервалов

Зная значение  $t_{kp}$ , можно найти границы доверительных интервалов для коэффициентов регрессии

$$a_i^{\min} = a_i - t_{kp} \sigma_{a_i};$$

$$a_i^{\max} = a_i + t_{kp} \sigma_{a_i}.$$

# Результаты регрессионного анализа, полученные с помощью MS Excel

Показывает, что 91,5% общей вариации результативного признака объясняется вариацией факторных признаков  $X_i$ .

Расчетное значение критерия Фишера: должно находиться в доверительном интервале (Фкрит), которое определяется по таблице =FРАСПОБР(0,05; k; n-k-1)

Уровень значимости: должен быть меньше 0,05

Число степеней свободы  
Число наблюдений  
Определяется числом переменных  $k$   
 $ko = n - (m + 1)$

СКО эмпирических данных от теоретических

Дисперсия факторных признаков

	A		E	F	G		
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	Регрессионная статистика						
4	Множественный R	0,956697117					
5	R-квадрат	0,915269373					
6	Нормированный R-квадрат						
7	Стандартная ошибка						
8	Наблюдения						
9							
10	Дисперсионный анализ						
11							
12	Регрессия	5	467533909	162446636,3	14,40281045	0,013074704	
13	Остаток	4	45115260,5	11278815,13			
14	Итого	7	532455169,5				
15							
16		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
17	Y-пересечение	-4326,547909	3824,113175	-1,131385948	0,321126121	-14943,9882	6290,8924
18	Переменная X 1	750,7161125	121,4702651	6,180245936	0,003482475	413,4605895	1087,97164
19	Переменная X 2	14,88213576	6,744514864	2,206553927	0,091978433	-3,84363952	33,607911
20	Переменная X 3	15,1512605	39,91165855	0,379619917	0,723521764	-95,6612685	125,96379
21							

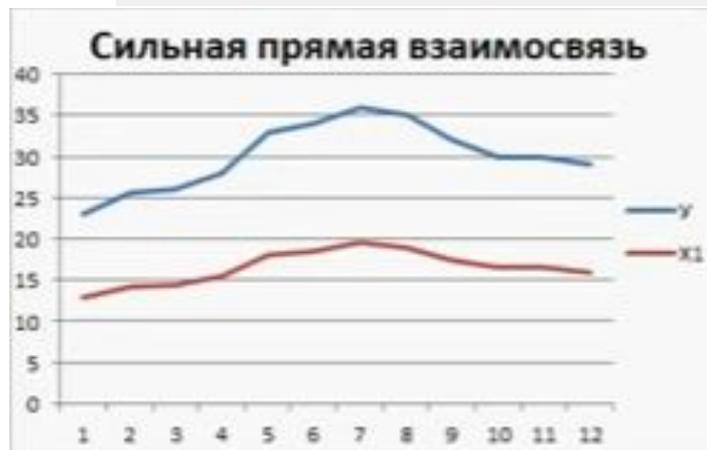
# Оценка коэффициентов регрессии

	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	<i>Регрессионная статистика</i>						
4	Множественный R	0,956697117					
5	R-квадрат	0,915269373					
6	Нормированный R-квадрат	0,851721402					
7	Стандартная ошибка	3358,394724					
8	Наблюдения	8					
9							
10	Дисперсионный анализ	<b>Значения используемые в построении регрессии</b>	<b>Должны быть меньше значения коэффициента</b>	<b>Должен попадать в область отрицательных значений =СТЮДРАТ</b>	<b>Значение должно быть меньше значимого</b>	<b>Показывает нижние и верхние границы доверительных интервалов. Не должен проходить через 0.</b>	
11							
12	Регрессия						
13	Остаток						
14	Итого						
15							
16		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
17	Y-пересечение	-4326,547909	3824,113175	-1,131385948	0,321126121	-14943,9882	6290,8924
18	Переменная X 1	750,7161125	121,4702651	6,180245936	0,003482475	413,4605895	1087,97164
19	Переменная X 2	14,88213576	6,744514864	2,206553927	0,091978433	-3,84363952	33,607911
20	Переменная X 3	15,1512605	39,91165855	0,379619917	0,723521764	-95,6612685	125,96379
21							

Таким образом, регрессионная модель будет иметь вид:

$$\hat{y} = 750 \cdot x_1$$

# 4. Реализация корреляционного анализа.



# Определение коэффициента корреляции

Пусть  $r$  обозначает выборочный коэффициент корреляции, полученный по извлеченным из двумерного нормального распределения пар наблюдений  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

Коэффициент корреляции неизвестен, но может быть оценен по выборке с помощью выборочного коэффициента корреляции  $r$ :

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

Если  $r_{xy} \leq 0,3$  – корреляция слабая;  
 $0,3 \leq r_{xy} < 0,7$  – корреляция средняя ;  
 $r_{xy} \geq 0,7$  – корреляция сильная .

# Проверка значимости коэффициента корреляции.

Нулевая гипотеза состоит в том, что коэффициент корреляции равен нулю, альтернативная - не равен нулю:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

Очевидно, достаточно большое по *абсолютной* величине значение величины  $r$  будет стремиться опровергнуть нулевую гипотезу.

Возникает вопрос.

Насколько большое должно быть абсолютное значение величины  $r$ ?

Для того чтобы проверить гипотезу, мы должны знать распределение величины  $r$ .

Собственное распределение величины  $r$  довольно сложное, поэтому мы применим преобразование:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}$$

Итак, выборочное распределение этой статистики есть распределение [Стьюдента](#) с  $n-2$  степенями свободы.

При заданном уровне значимости ( $\alpha$ ) определяем критическое значение  $t_{кр}$ .

Принимаем решение об отклонении или не отклонении нулевой гипотезы:

$$\begin{aligned} \cdot |t| > t_{кр} & \text{ яем } H_0 \\ - |t| < t_{кр} & \text{ оняем } H_0 \end{aligned}$$

# Вычисление уровня значимости коэффициента корреляции

Для определения фактического уровня значимости коэффициента корреляции запишем:

$$SL = P(T \geq |t|) + P(T \leq -|t|) = 2P(T \geq |t|)$$

Где  $T$  подчиняется распределению Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы, а значение величины  $t$  вычисляется в соответствии с формулой

Вычисление уровня значимости эквивалентно определению площади под правым и левым хвостами функции, ограниченной значениями  $-t$  и  $t$

