Производн
ая

Содержание

Понятие производной

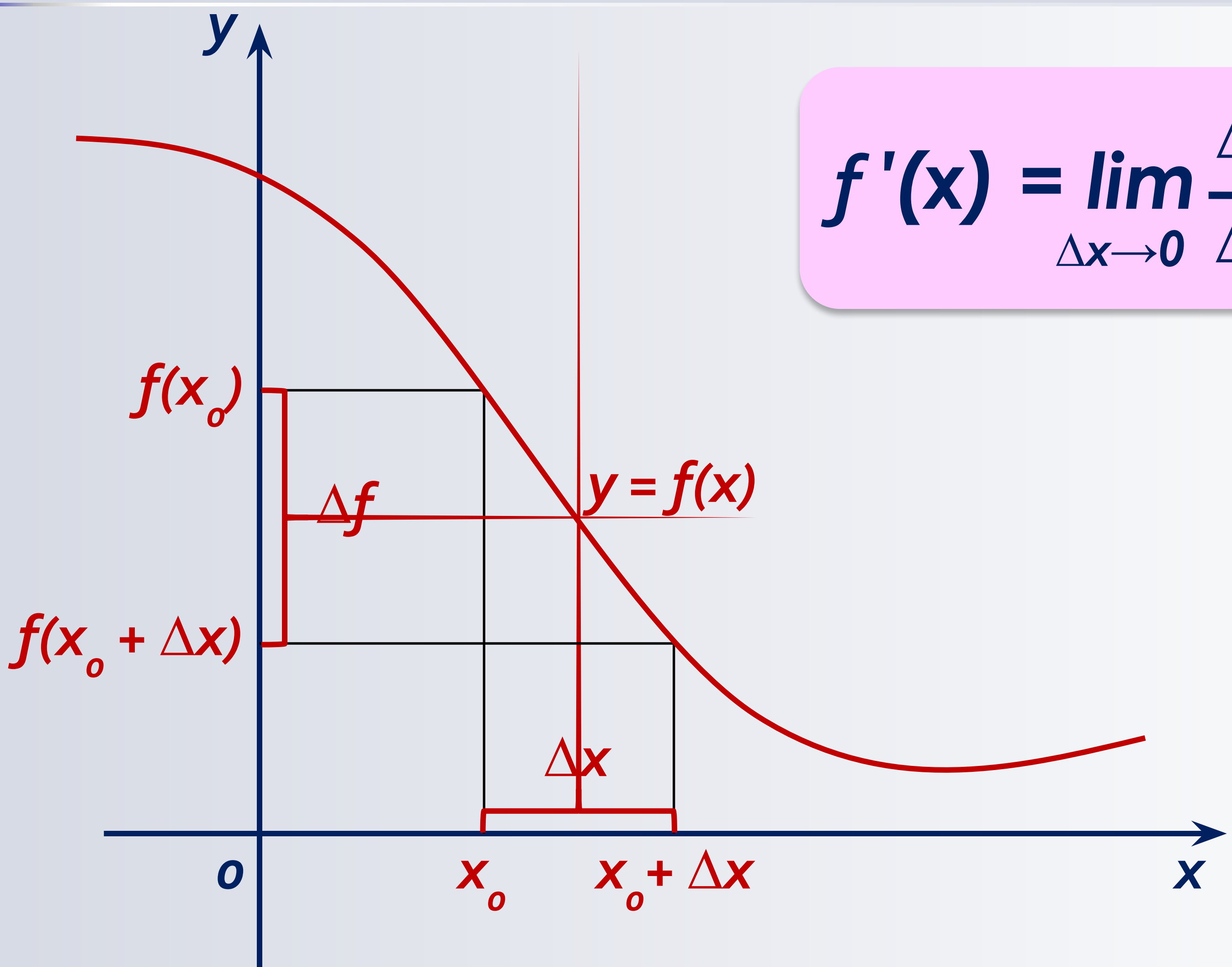
Производной функции y = f(x), заданной на некотором интервале (a; b), в некоторой точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют дифференцированием

Понятие производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Алгоритм нахождения производной

1. *Зафиксировать значение* x_o, *найти* $f(x_o)$.
2. *Дать аргументу* x_o *приращение* Δx, *перейти в новую точку* $x_o + \Delta x$, *найти* $f(x_o + \Delta x)$.
3. *Найти приращение функции:* $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.
4. *Составить отношение* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. *Вычислить* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. *Этот предел и есть* $f'(x_o)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_o

1. $f(x_o) = kx_o + b$
2. $f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - (kx_o + b) =$
   $= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (k) = k$

$$\boxed{(kx + b)' = k}$$

Примеры

2. Найти производную функции $y = C$ (C – const) в точке x_o

1. $f\left(x_o\right) = C$
2. $f\left(x_o + \Delta x\right) = C$
3. $\Delta f = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_o\right) = C - C = 0$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$\boxed{(C)' = 0}$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_o

1. $f(x_o) = (x_o)^2$
2. $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$

   $= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_o + \Delta x) = 2x_o$

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_o

1. $f(x_o) = \sqrt{x_o}$

2. $f(x_o + \Delta x) = \sqrt{x_o + \Delta x}$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ *в точке* x_o

$$1.\ f(x_o) = \frac{1}{x_o}$$

$$2.\ f(x_o + \Delta x) = \frac{1}{x_o + \Delta x}$$

$$3.\ \Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \frac{1}{x_o + \Delta x} - \frac{1}{x_o} =$$

$$= \frac{x_o - (x_o + \Delta x)}{x_o(x_o + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ *в точке* x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{x_o^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = s(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

Правила нахождения производной

1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их сумма $u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция $u(x)$ имеет в точке x производную и C – данное число, то функция $C \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют в точке* x *производные, то их произведение* $u(x) \cdot v(x)$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ *имеет в точке* x *производную и* $v(x) \neq 0$, *то функция* $\frac{1}{v(x)}$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Примеры:

1. $((5x-3)^3)' = 3(5x-3)^2\cdot(5x-3)' =$
   $= 3(5x-3)^2\cdot 5 = 15(5x-3)^2$

2. $(\sin(4x+8))' = \cos(4x+8)\cdot(4x+8)' =$
   $= \cos(4x+8)\cdot 4 = 4\cos(4x+8)$

Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x, то она непрерывна в этой точке.