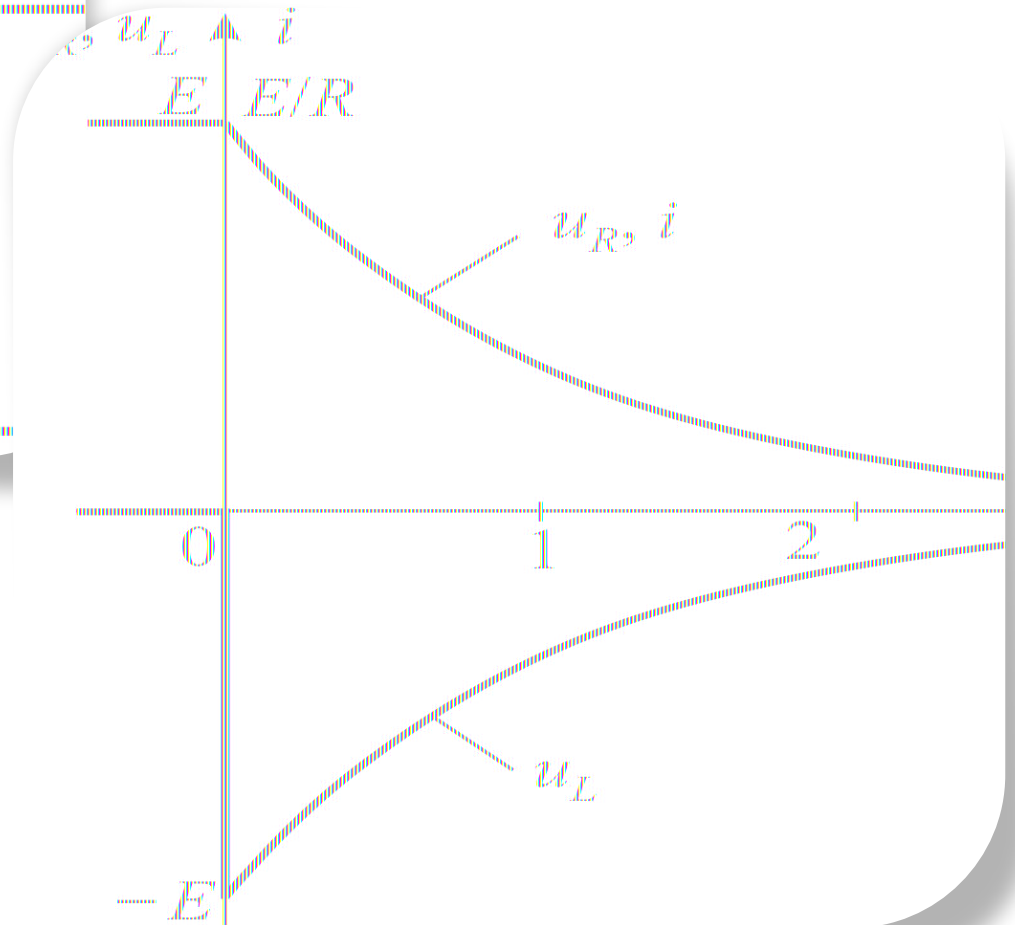
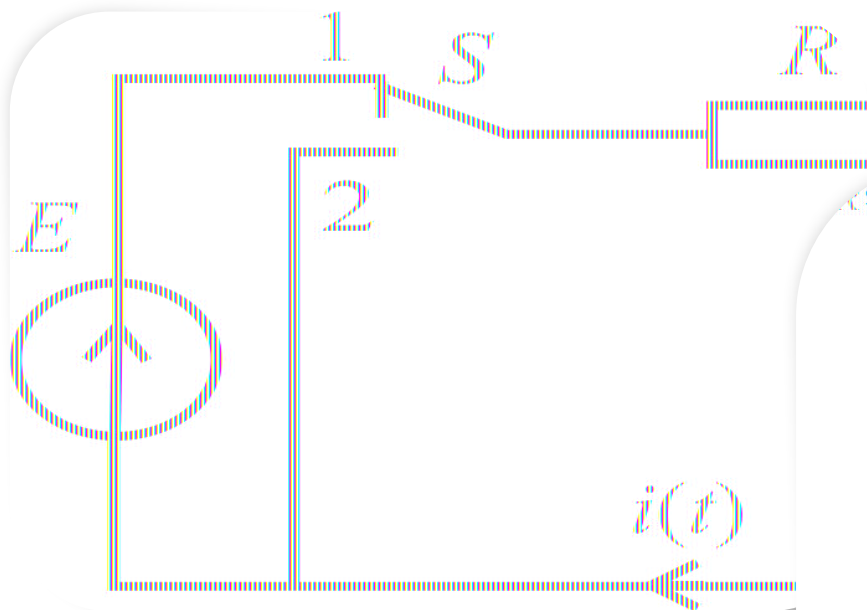


Переходные процессы в линейных электрических цепях



Коммутация – скачкообразное изменения структуры цепи, параметров ее элементов, а также подключением или отключением источников энергии.

Момент времени непосредственно до коммутации $t = 0_-$

Момент времени сразу же после коммутации $t = 0_+$

Ключевые элементы

Замыкающий Размыкающий Переключающий



1 закон коммутации. Если в процессе коммутации индуктивность элемента не изменяется, то значение тока в ней до коммутации $i_L(0_-)$ равно значению тока сразу же после коммутации $i_L(0_+)$, а затем плавно изменяется от этого значения

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad \text{при } L = \text{const.}$$

2 закон коммутации. Если в процессе коммутации емкость элемента не изменяется, то значение напряжения в ней до коммутации $u_C(0_-)$ равно значению напряжения сразу же после коммутации $u_C(0_+)$, а затем плавно изменяется от этого значения

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad \text{при } C = \text{const.}$$

Значения токов и напряжений в момент времени $t = 0_-$ называются **начальными значениями**.

Независимые начальные значения: ННУ

$$i_L(0_-), u_C(0_-).$$

Зависимые начальные значения: ЗНУ

$$u_L(0_-), i_C(0_-), u_R(0_-), i_R(0_-).$$

Установившиеся значения –

значения токов и напряжений в цепи после переходного процесса, т.е. при $t \rightarrow \infty$.

Классический метод расчета переходных процессов

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i = f(t)$$

$$i = i_{np} + \boxed{i_{cв}}$$



$$\boxed{a_n \frac{d^n i_{cв}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{cв}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i_{cв} = 0}$$


$$a_n \frac{d^n i_{св}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{св}}{dt^{n-1}} + \dots a_0 i_{св} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Для простых корней

$$i_{св} = A_n e^{p_n t} + A_{n-1} e^{p_{n-1} t} + \dots + A_1 e^{p_1 t}$$

Для кратных корней

$$i_{св} = \left(A_n t^{n-1} + A_{n-1} t^{n-2} + \dots + A_1 \right) e^{p t}$$

$$a_n \frac{d^n i_{CB}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{CB}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i_{CB} = f(t)$$

Общее решение дифференциального уравнения

Для простых корней

$$i = i_{np} + A_n e^{p_n t} + A_{n-1} e^{p_{n-1} t} + \dots + A_1 e^{p_1 t}$$

Для кратных корней

$$i = i_{пр} + \left(A_n t^{n-1} + A_{n-1} t^{n-2} + \dots + A_1 \right) e^{p t}$$

Для нахождения постоянных интегрирования A_i записывают выражения для искомого тока $i(t)$ и его $(n - 1)$ производных в момент $t = 0_+$.

Для простых корней

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n + A_{n-1} + \dots + A_1 = i(0_+) - i_{np}; \\ p_n A_n + p_{n-1} A_{n-1} + \dots + p_1 A_1 = \frac{di(0_+)}{dt} - \frac{di_{np}}{dt}; \\ p_n^{n-1} A_n + p_{n-1}^{n-1} A_{n-1} + \dots + p_1^{n-1} A_1 = \frac{d^{n-1}i(0_+)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1}i_{np}}{dt^{n-1}}. \end{array} \right.$$

$$\Delta \cdot \mathbf{A} =$$

$\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Решение системы

$$\mathbf{A} = \Delta^{-1} \cdot$$

$\mathbf{C}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} i(0_+) - i_{np} \\ \frac{di(0_+)}{dt} - \frac{di_{np}}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1}i(0_+)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1}i_{np}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}$$

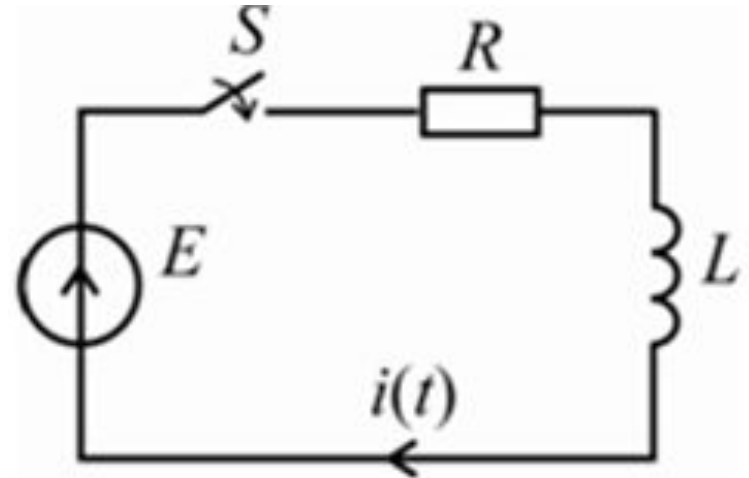
Рекомендуемую последовательность расчета классическим методом

1. Анализ цепи *до коммутации* и определение независимых начальных условий;
2. Составление гармонических уравнений Кирхгофа для цепи *после коммутации*;
3. Составление и решение характеристического уравнения. Определение свободной составляющей решения;
4. Составление уравнений Кирхгофа для цепи *после коммутации* и определение принужденной составляющей решения;
5. Нахождение общего вида решения в виде суммы принужденной и свободной составляющих;
6. Определение постоянных интегрирования.

Переходный процесс в цепи с R и L элементами

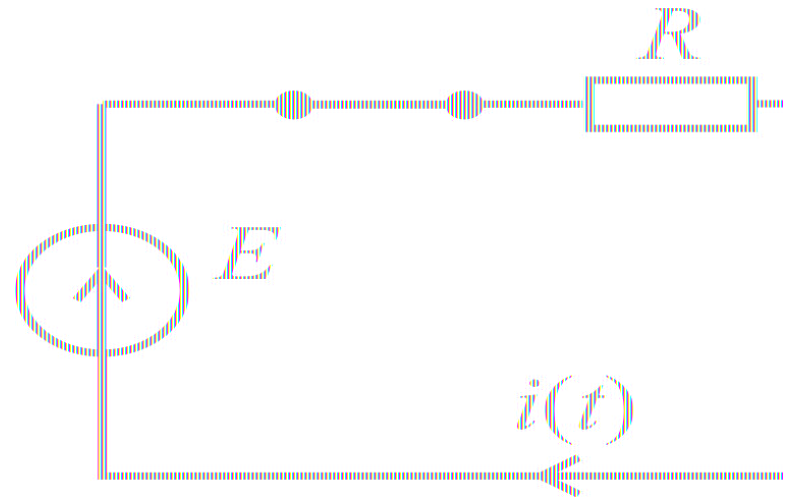
1) До коммутации $i(0_-) = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0.$$



2) После коммутации:

$$u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di}{dt} + Ri = E$$



Переходный процесс в цепи с R и L элементами

$$u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

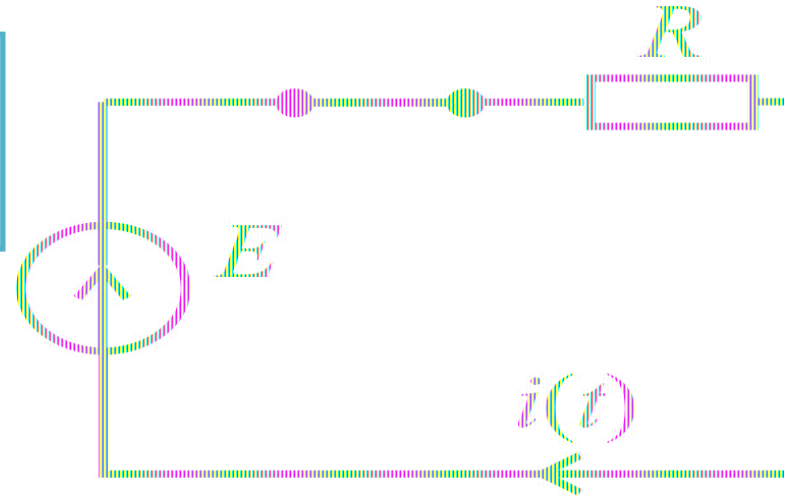
3) Характеристическое уравнение:

$$Lp + R = 0$$

$$p = -\frac{R}{L}$$

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$$

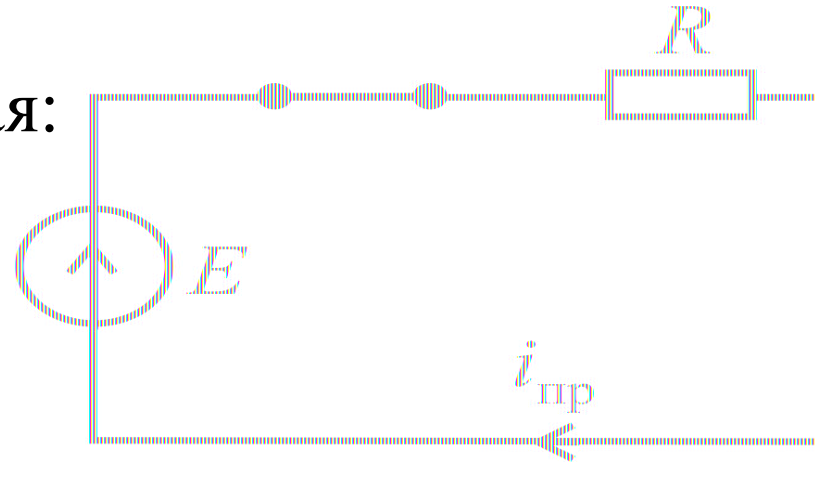
$$\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}$$



Переходный процесс в цепи с R и L элементами

4) Принужденная составляющая:

$$i(\infty) = i_{np} = \frac{E}{R}$$



5) Общее решение

$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{E}{R} + Ae^{pt}$$

6)

$$i(0_+) = \frac{E}{R} + A = 0$$

$$A = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$i, i_{\text{CB}}, i_{\text{пр}}$

$\frac{E}{R}$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

0

1

2

$-\frac{E}{R}$

i

i

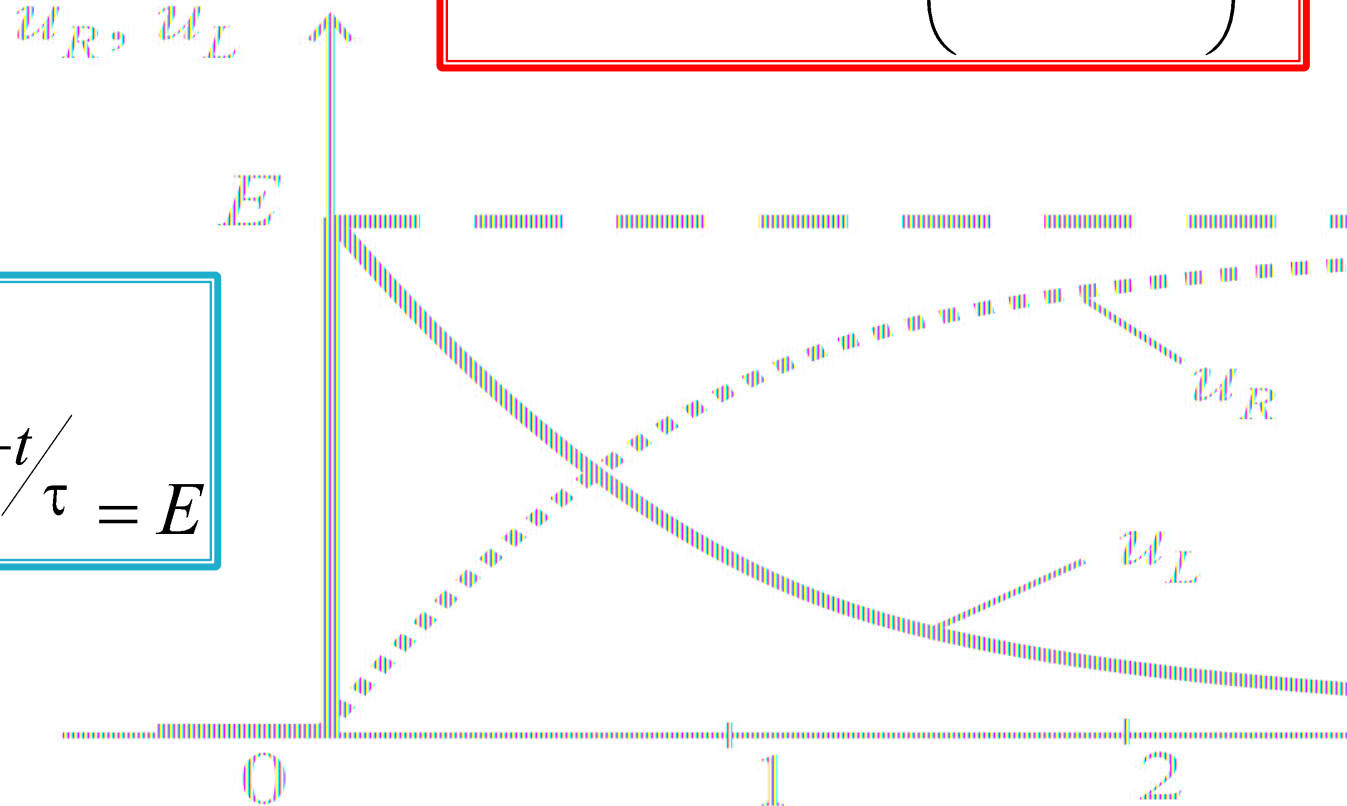
i_{CB}

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \left(-\frac{E}{R} \left(\frac{-1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right) = L \left(-\frac{E}{R} \left(\frac{-R}{L} \right) e^{-t/\tau} \right) = E e^{-t/\tau}.$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$$u_R(t) = Ri = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) + u_R(t) &= \\ &= E e^{-t/\tau} + E - E e^{-t/\tau} = E \end{aligned}$$



Комплекс полного сопротивления

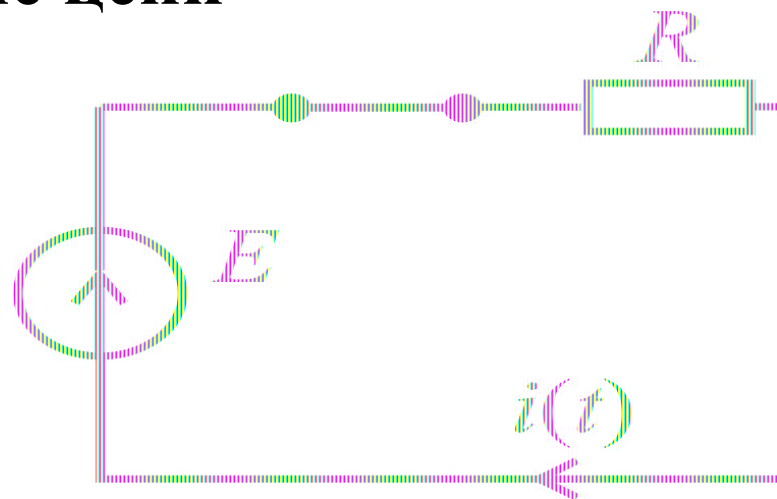
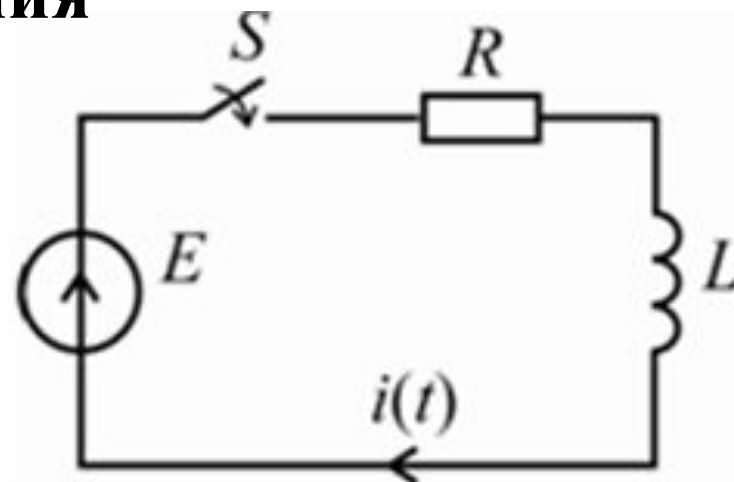
$$\underline{Z} = j\omega L + R$$

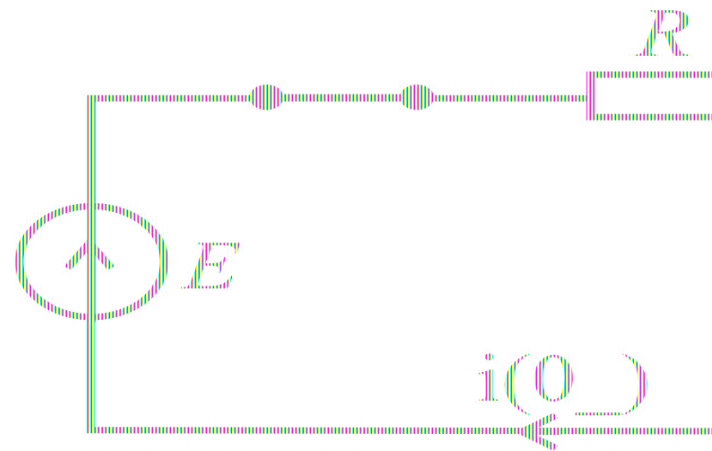
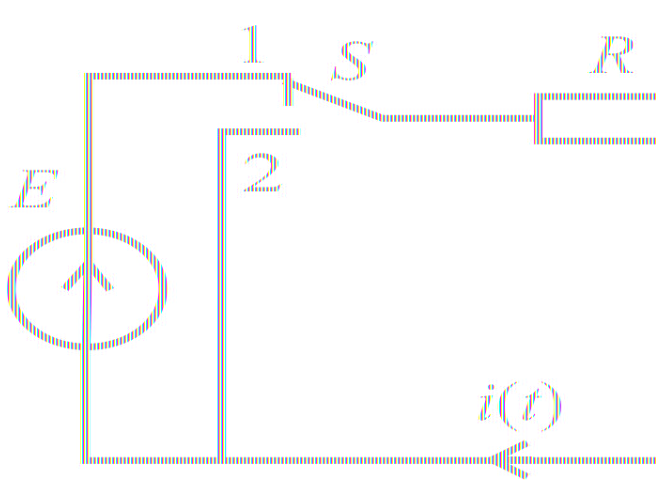
Операторное сопротивление

$$Z(p) = pL + R$$

Характеристическое уравнение цепи

$$pL + R = 0$$





1)
$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}$$

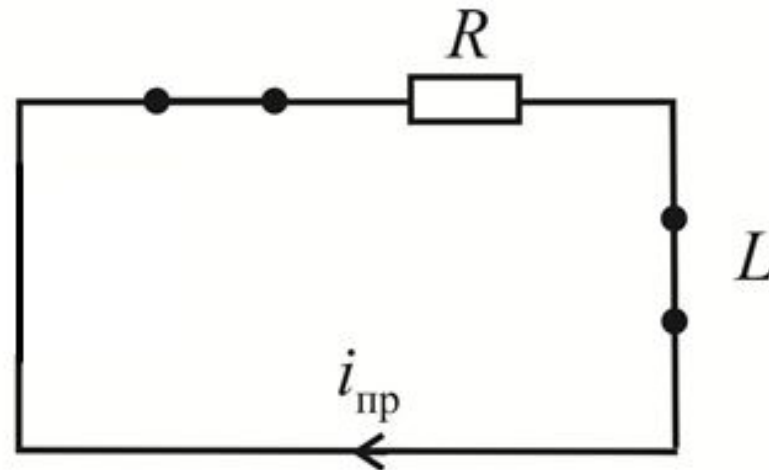
2)
$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

3)
$$pL + R = 0$$

$$p = -\frac{R}{L}$$

$$i_{ce} = Ae^{pt} = A^{-t/\tau}$$

4) $i(\infty) = i_{np} = 0$



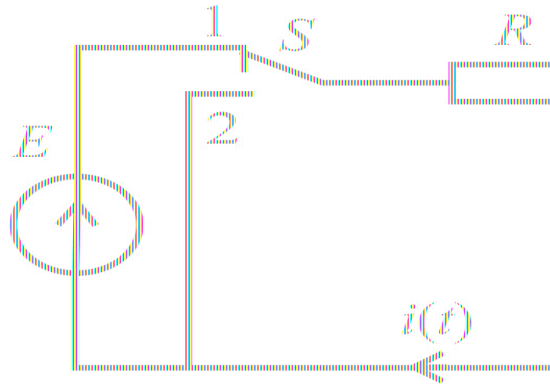
5) $i = i_{np} + i_{ce} = Ae^{pt}$

6) $i(0_+) = A = \frac{E}{R}$

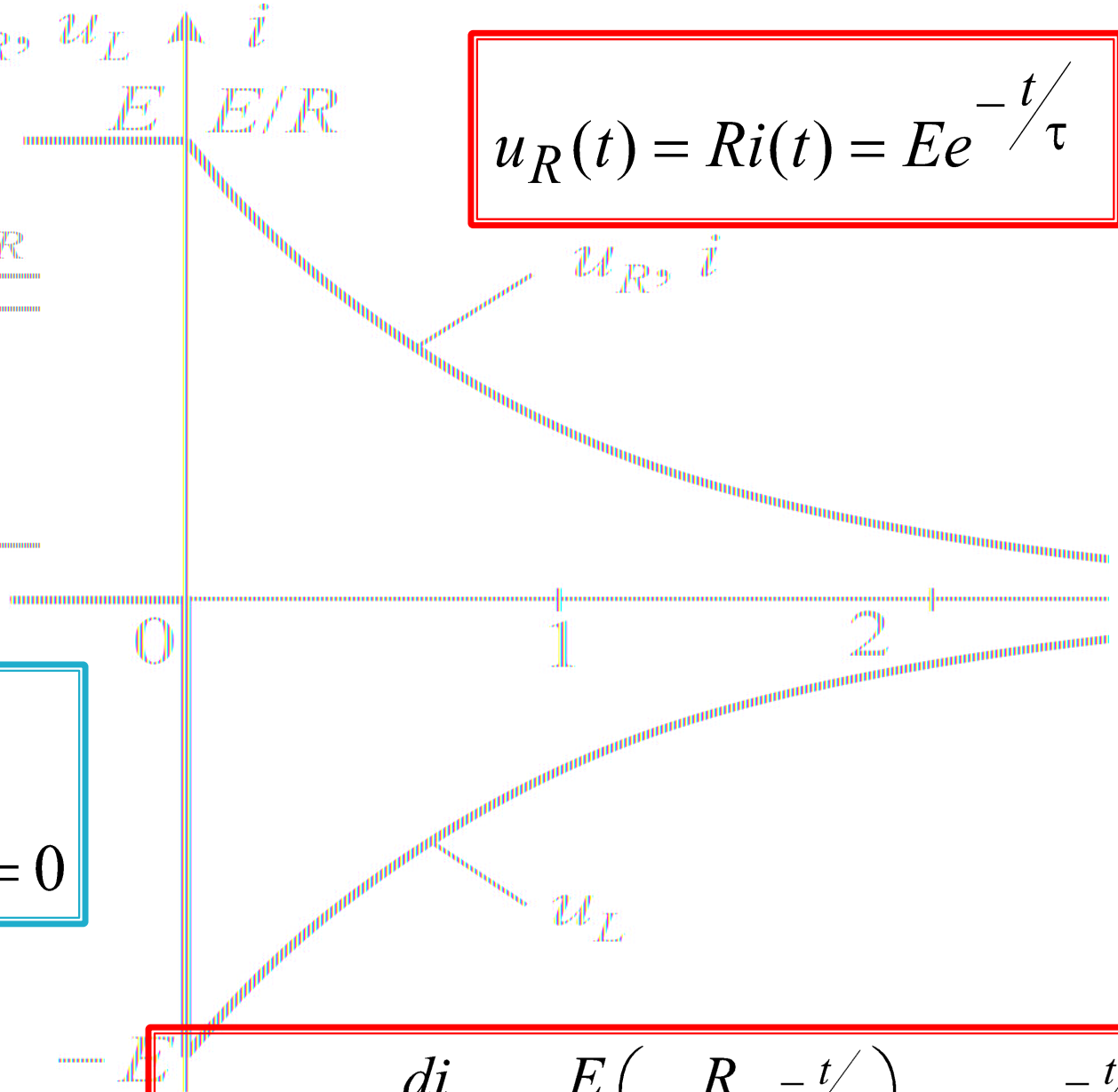
$A = \frac{E}{R}$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



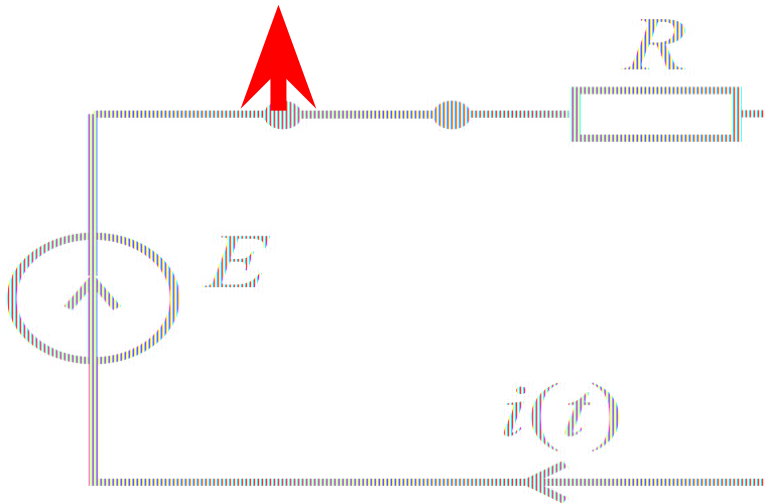
$$u_R(t) = Ri(t) = E e^{-t/\tau}$$



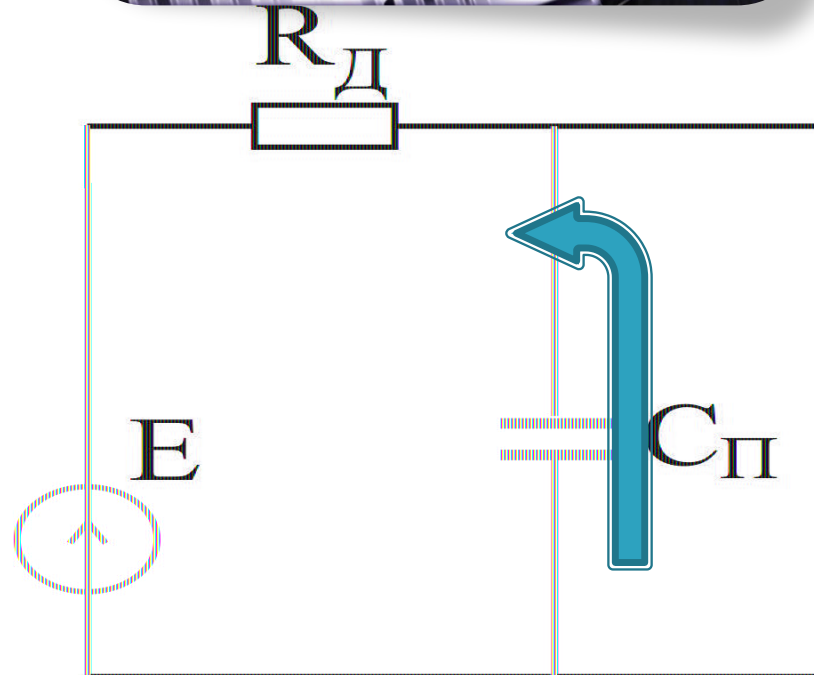
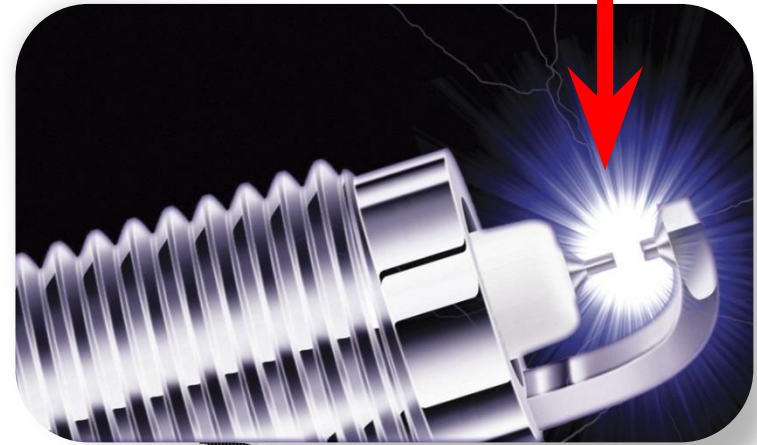
$$\begin{aligned} u_L(t) + u_R(t) &= \\ &= E e^{-t/\tau} - E e^{-t/\tau} = 0 \end{aligned}$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L} e^{-t/\tau} \right) = -E e^{-t/\tau}$$

Электрическая дуга



$$\tau = f(L, R_{\text{д}}, R, C_{\text{п}})$$

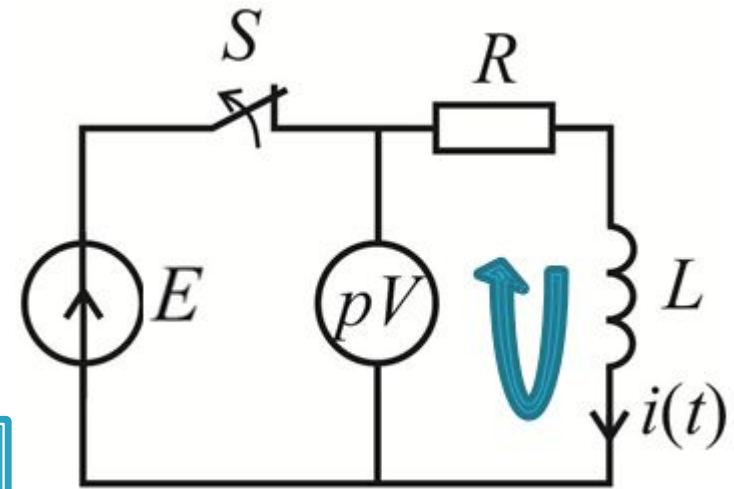


$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}$$

$$u_V(0_+) = R_V i(0_+) = R_V \frac{E}{R} = E \frac{R_V}{R}$$

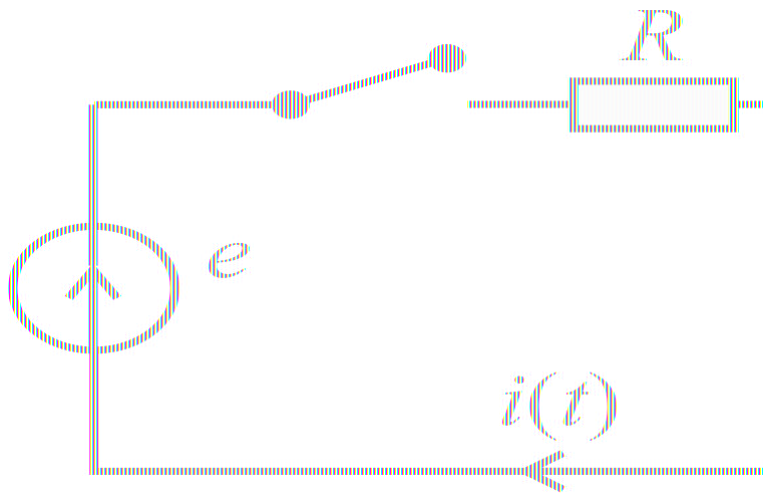
$$u_L(0_+) + Ri(0_+) + R_V i(0_+) = 0$$

$$u_L(0_+) = -(R + R_V)i(0_+) = -E \left(1 + \frac{R_V}{R} \right)$$



$$R_V \gg R$$

Во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока с большой индуктивностью (например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока) эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.



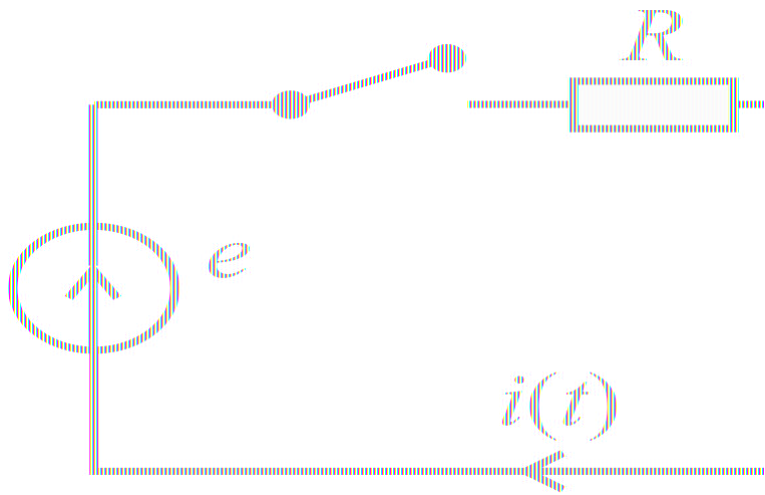
$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

Ток после коммутации

$$i = i_{np} + i_{св} = i_{np} + Ae^{pt}$$

$$i_{np} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$



$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

Ток до коммутации и сразу же после коммутации = 0

$$i(0_-) = i(0_+) = I_m \sin(\psi_e - \varphi) + \boxed{A} = 0$$

$$\boxed{A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi)}$$

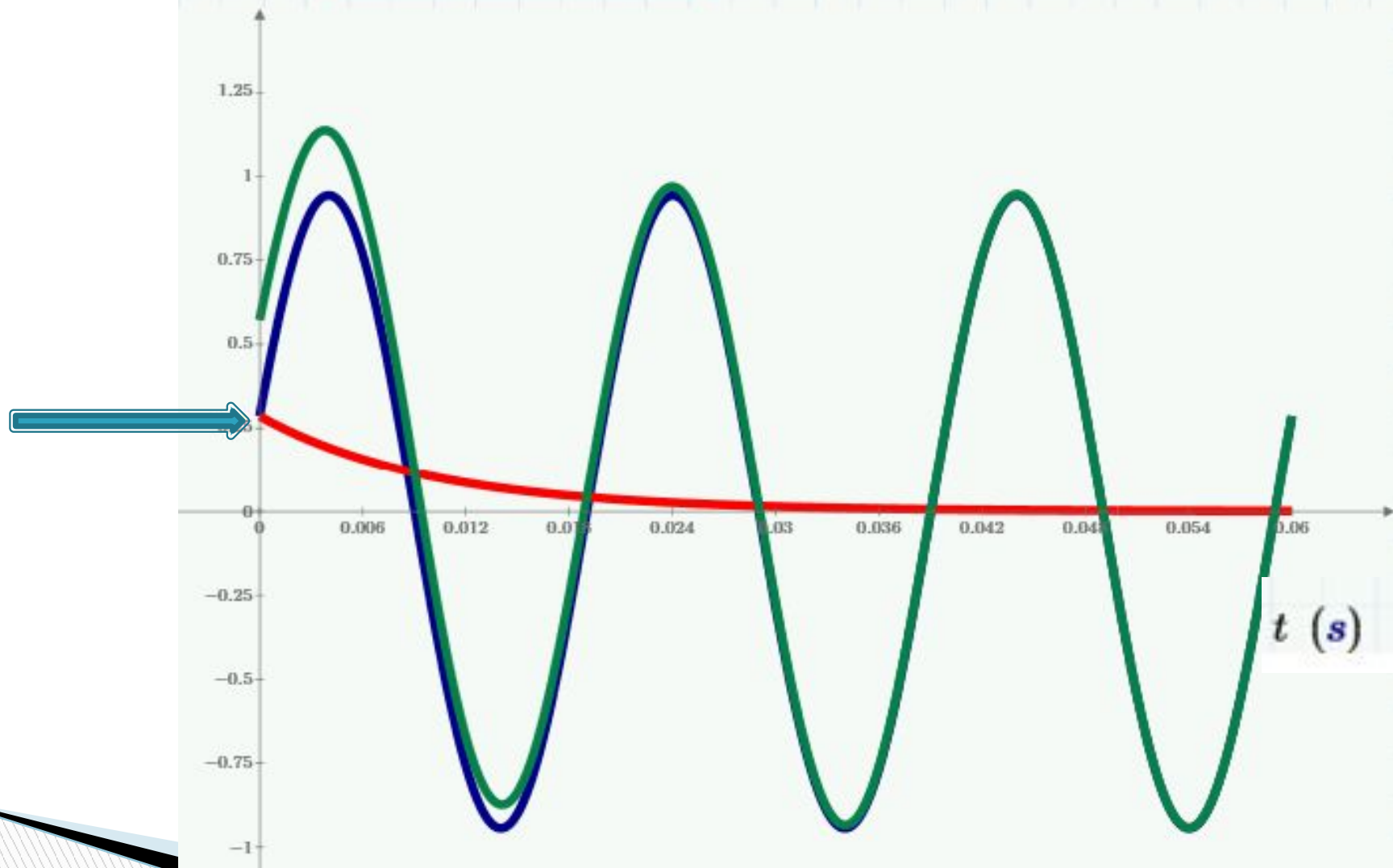
$$i = i_{np} + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-t/\tau}$$

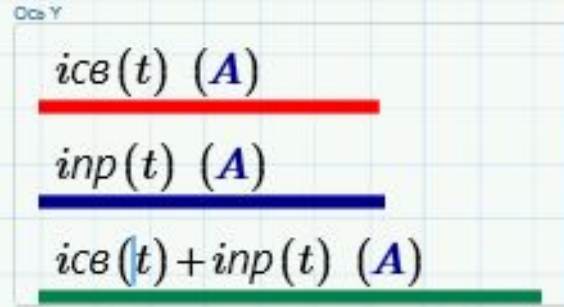
Полный ток в цепи после коммутации

$ice(t)$ (A)

$inp(t)$ (A)

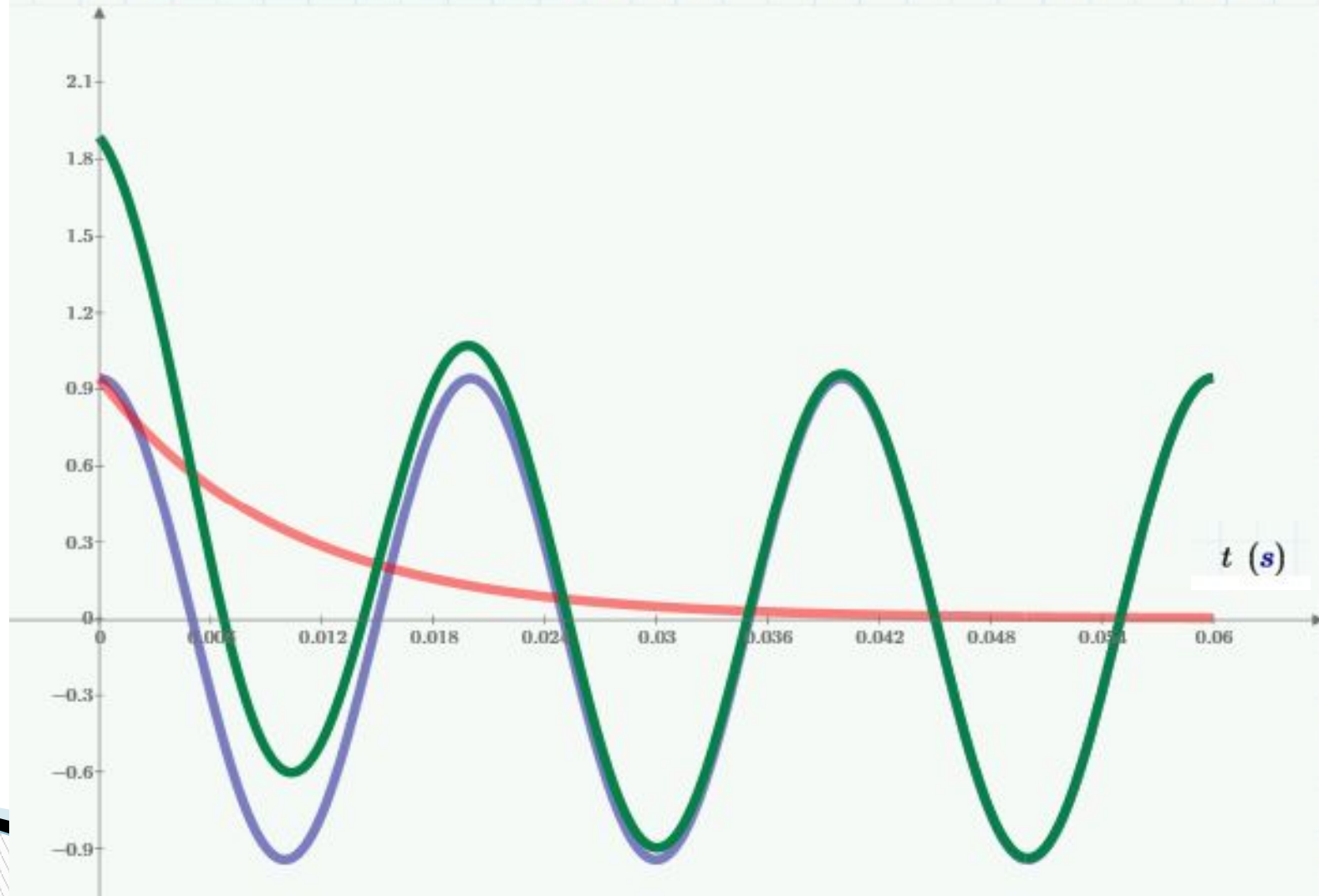
$ice(t) + inp(t)$ (A)





$$\psi = \phi_e + (k + 1/2)\pi$$

$$(k = 0, 1, 2 \dots)$$

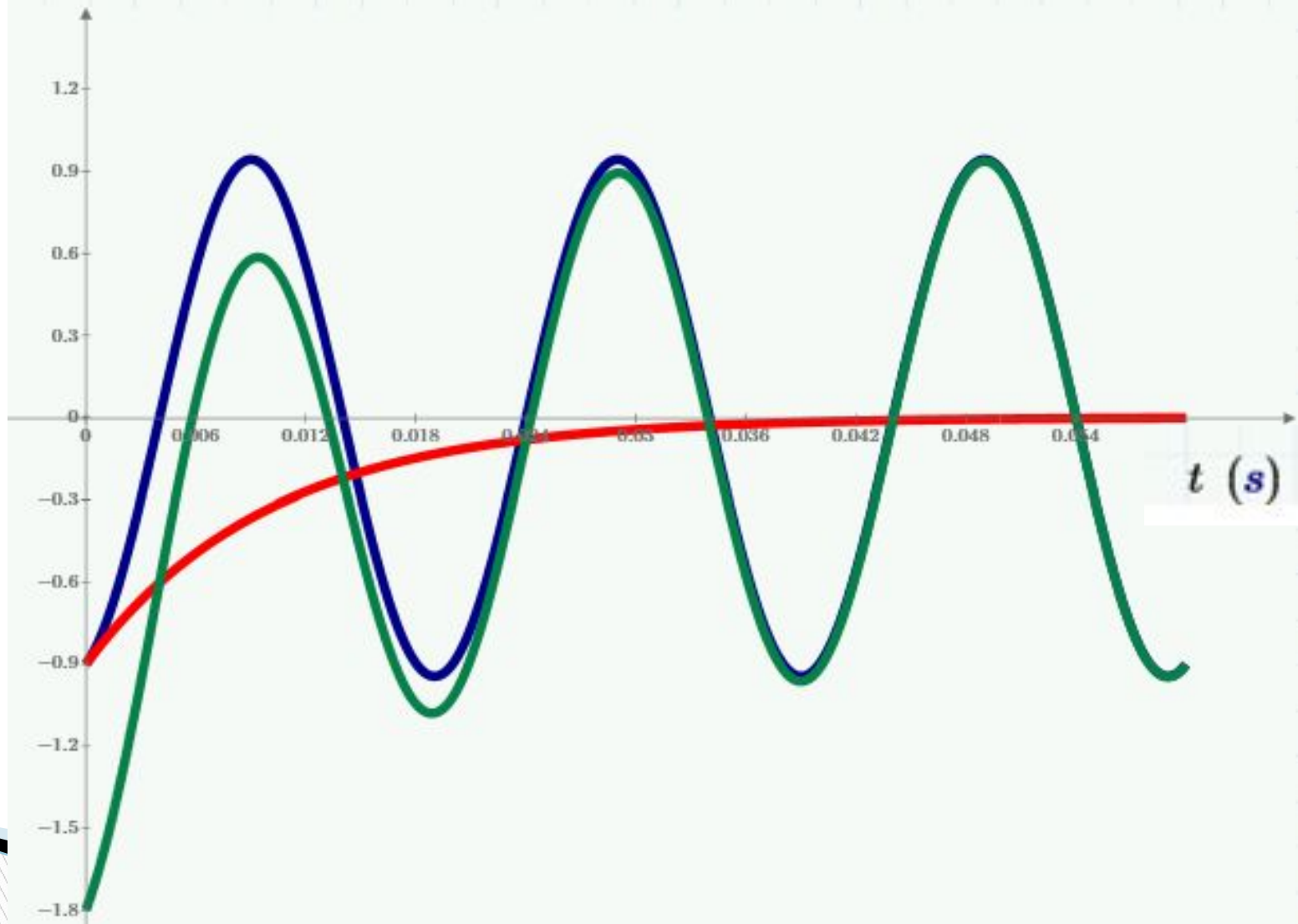


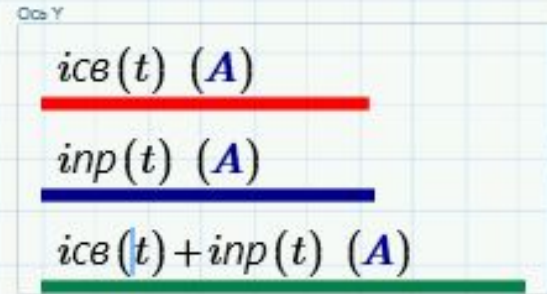
$ice(t) \text{ (A)}$

$inp(t) \text{ (A)}$

$ice(t) + inp(t) \text{ (A)}$

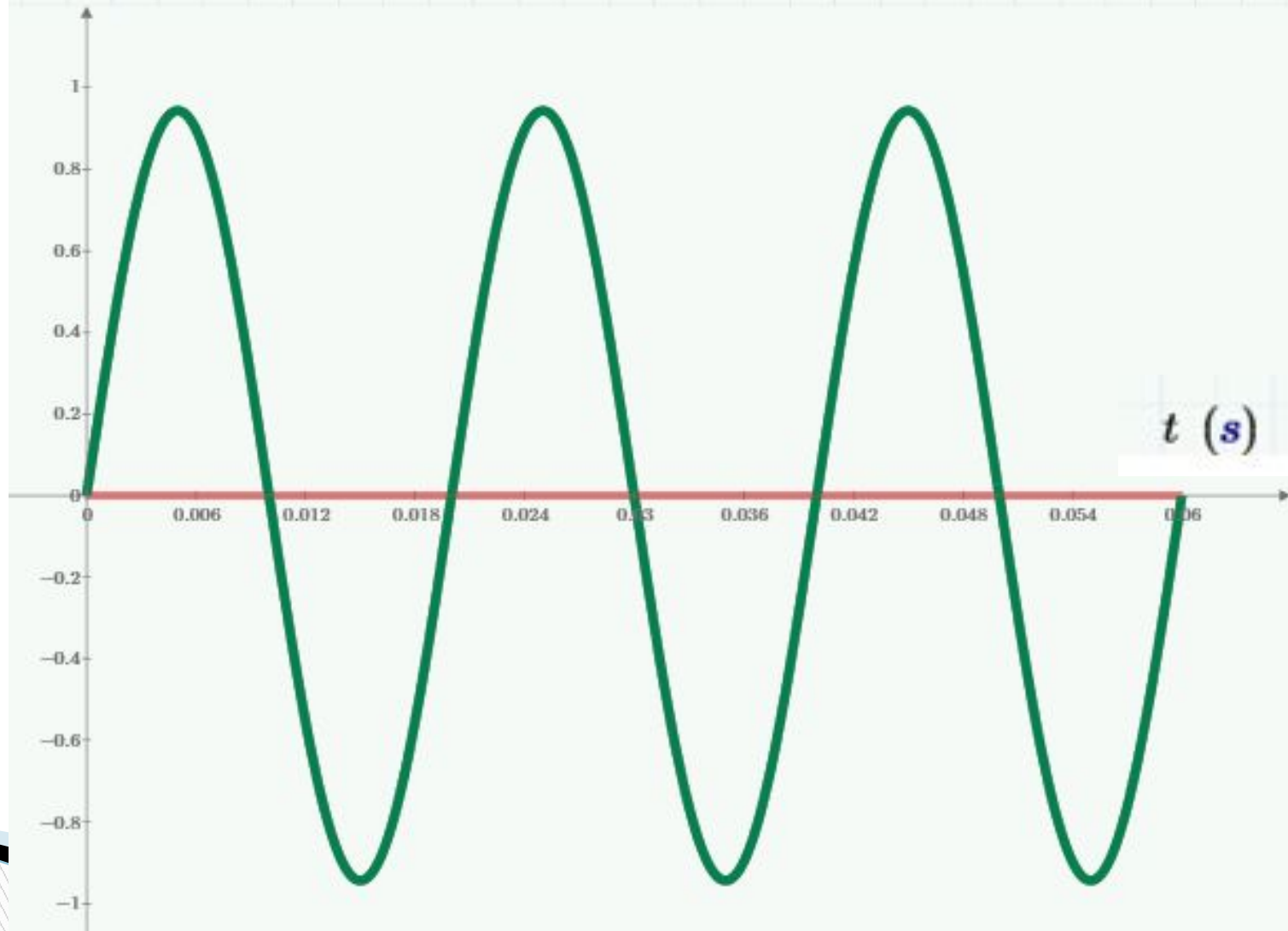
$$\psi = \phi_e + (k - 1/2)\pi$$





$$\psi_e = \phi + k\pi$$

$(k = 0, 1, 2 \dots)$



Переходные процессы в цепи с RC элементами

1) ННУ

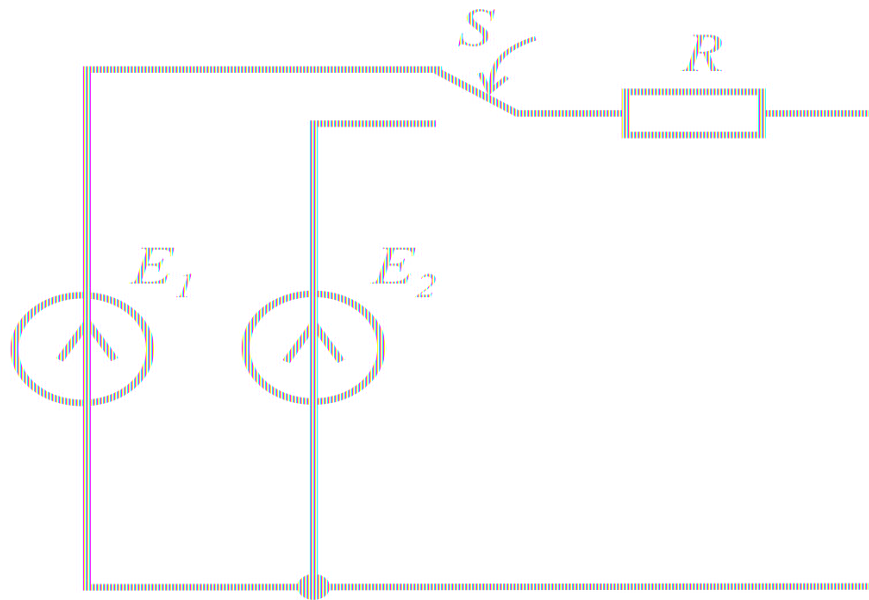
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E_1$$

2) После коммутации $u_R(t) + u_C(t) = R i(t) + u_C(t) = E_2$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \rightarrow R C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E_2$$

3) Характеристическое уравнение

$$RC p + 1 = 0.$$



Характеристическое
уравнение

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = \boxed{RCp + 1} = 0$$

Операторное сопротивление

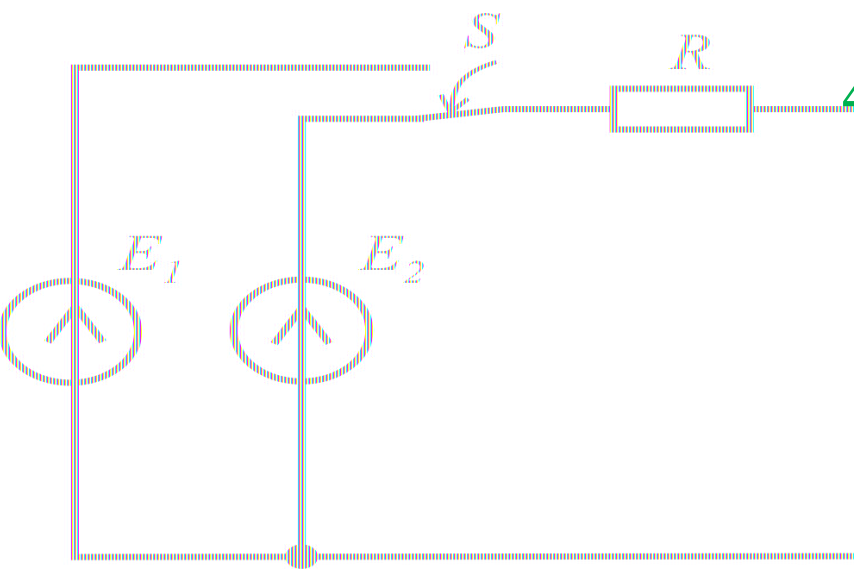
Корень

$$p = -\frac{1}{RC}$$

$$u_{C_{CB}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$$

Постоянная времени

$$\tau = -\frac{1}{p} = RC$$



4) Установившийся режим $t = \infty$

$$u_{C \text{ пр}} = E_2.$$

5) Общее решение ДУ

$$u_C(t) = u_{C \text{ св}} + u_{C \text{ пр}} = Ae^{-t/\tau} + E_2.$$

6)

$$u_C(0_+) =$$

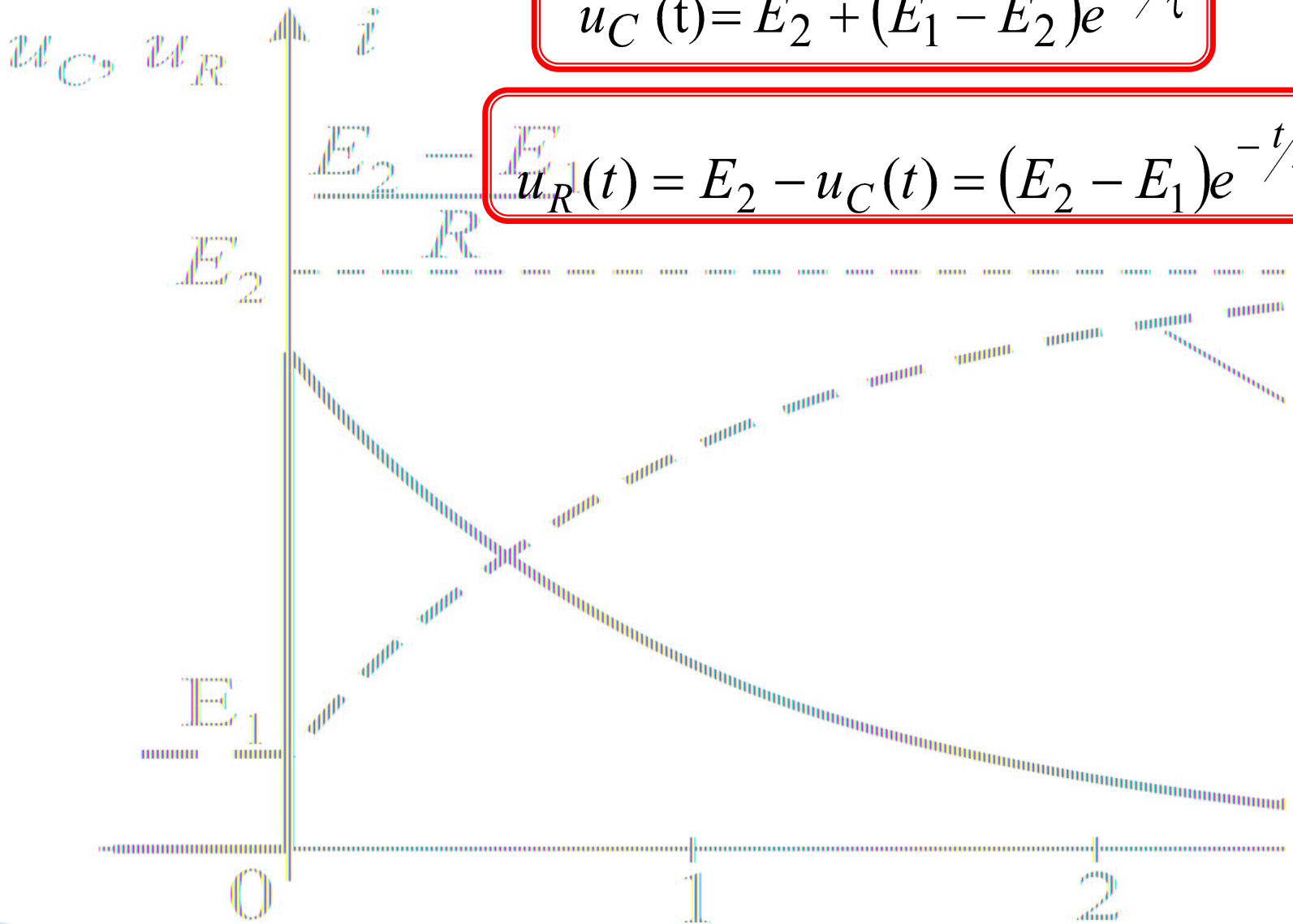
$$A + E_2 = E_1$$

$$A = E_1 - E_2$$

$$u_C(t) = E_2 + (E_1 - E_2)e^{-t/\tau}$$

$$u_C(t) = E_2 + (E_1 - E_2)e^{-t/\tau}$$

$$u_R(t) = E_2 - u_C(t) = (E_2 - E_1)e^{-t/\tau}$$



При
 $E_2 = 0$

