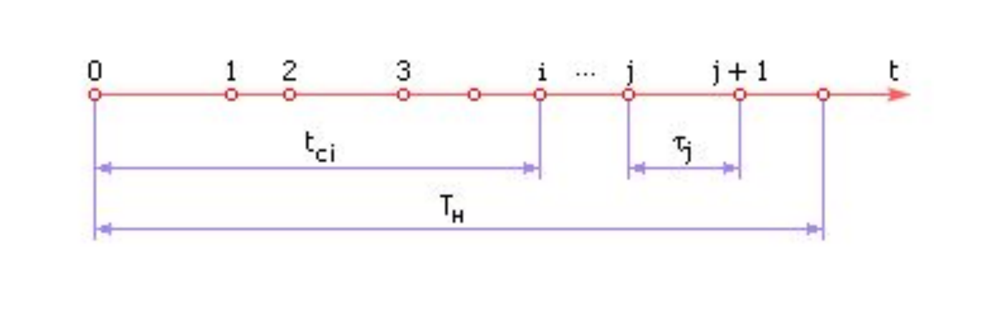
Разбор 2 задания. Моделирование случайной величины. СМО.

Вареца М.С. ББСО-01-20

Теория

Для начала разберемся в том, что такое поток заявок (событий): **потоком событий** называется последовательность однородных (однотипных) событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.



τ_j — интервал между событиями (случайная величина);

t_{ci} — момент совершения *i*-го события (отсчитывается от $t = 0$);

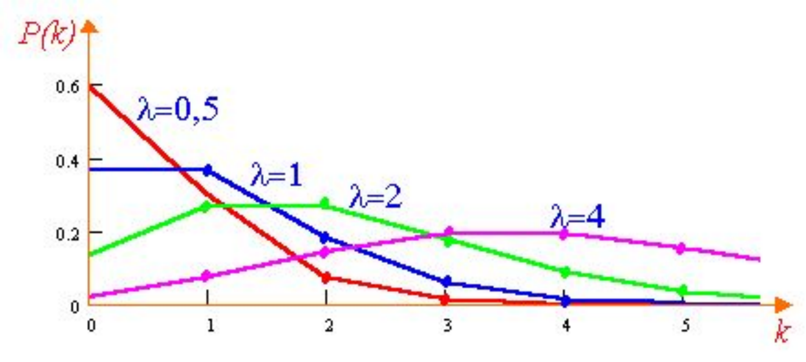
$T_н$ — время наблюдения.

Свойства потоков

1. Свойство **стационарности**: вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета.
2. Свойство **ординарности**: вероятностью наступления за элементарный промежуток времени более одного события можно пренебречь по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток не более одного события
3. Свойство **отсутствия последействия**: вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Закон Пуассона

Закон Пуассона описывает число событий k, происходящих за одинаковые промежутки времени при условии, что события происходят независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, которая характеризуется параметром *λ*. Многоугольник распределения Пуассона показан на рисунке.



Если постоянная интенсивности потока *λ* известна, то вероятность появления *k* событий простейшего потока за время *t* определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Примеры

Пример 1. На телефонную станцию поступает в среднем 2 вызова в секунду. Чему равна вероятность того, что за 5 секунд поступит ровно 10 вызовов?

Решение

$\lambda = 2$

$t = 5$

$k = 10$

$$P_5(10) = \frac{(2 \cdot 5)^{10}}{10!} \cdot e^{-2 \cdot 10} \approx 0{,}1251$$

Примеры

Задача. В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что: а) за 1 минуту не поступит ни одного заказа, б) за 10 минут поступит ровно три заказа, в) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Решение задачи

Сначала найдем интенсивность потока, то есть количество заявок в минуту:

λ = 12/60 = 0.2

а) $P_0(1) = \dfrac{(0,2\cdot 1)^0}{0!} e^{-0,2\cdot 1} = e^{-0,2} \approx 0,819$

б) $P_3(10) = \dfrac{(0,2\cdot 10)^3}{3!} e^{-0,2\cdot 10} = \dfrac{8}{6} e^{-2} \approx 0,18$

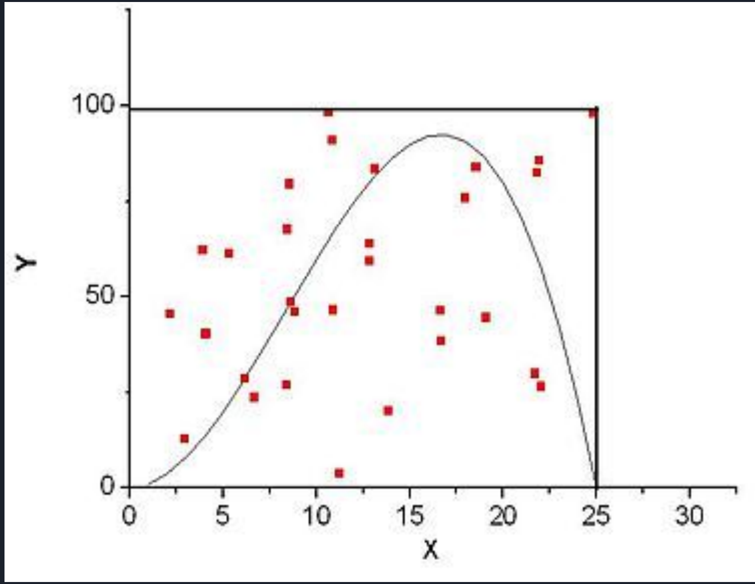
в) $P(k \le 3) = P_0(10) + P_1(10) + P_2(10) + P_3(10) =$

$$= \frac{(0,2\cdot 10)^0}{0!} e^{-0,2\cdot 10} + \frac{(0,2\cdot 10)^1}{1!} e^{-0,2\cdot 10} + \frac{(0,2\cdot 10)^2}{2!} e^{-0,2\cdot 10} + \frac{(0,2\cdot 10)^3}{3!} e^{-0,2\cdot 10} = e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{8}{6} e^{-2} \approx 0,86$$

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло - метод, использующий генератор случайных чисел или более строго: разыгрывающий значения непрерывной случайной величины, принимающие с равной вероятностью все значения от 0 до 1.

Геометрический алгоритм Монте-Карло интегрирования



Длина - L [0;L]

x_1, y_1

$$X_1 = L * x_1,\ Y_1 = L * y_1$$

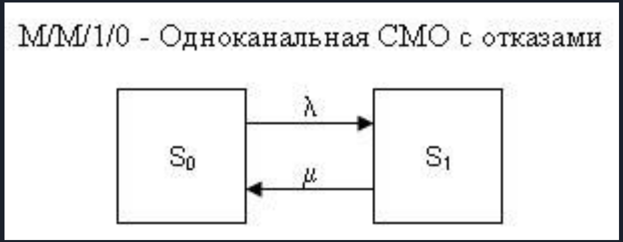
Многократно повторяя эту процедуру мы будем получать все больше точек, равномерно заполняющих наш квадрат и поскольку они распределяются равномерно, количество точек, попавших в фигуру будут характеризовать ее площадь.

Искомая площадь:.

$$S = L^2 * n/N$$

Системы массового обслуживания (СМО)

Одноканальная СМО с отказами — это система массового обслуживания, в которой есть один канал обслуживания, но нет очереди: если заявка приходит, в момент, когда канал свободен, то она немедленно обслуживается каналом, если заявка приходит — когда канал занят, то заявка покидает систему (теряется).



S0 – в системе нет заявки, канал свободен
S1 – в системе имеется заявка, она обслуживается каналом
λ - интенсивность поступающего потока
μ - интенсивность потока обслуживания канала

Дифференциальное уравнение Колмогорова

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\mu \cdot P_1 + \lambda \cdot P_0$$

При этом: P0+P1=1, где

P0 — вероятность обслуживания заявки;

P1 — вероятность отказа;

Отсюда находим значения вероятностей нахождения СМО с отказами в состояниях S0 и S1

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Относительная пропускная способность q определяется по формуле:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Абсолютная пропускная способность А находится по формуле:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda}$$

Вероятность отказа равна Ротк:

$$P_{\text{отк}} = P_1 = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Разбор задачи

Во второй задаче варианта рассматривается одноканальная СМО с отказами. В данную СМО поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено закону f(x). Время обслуживания заявок случайное и распределено по закону f1(t). Найти методом Монте-Карло за время T: а) среднее число обслуженных заявок, б) среднее время обслуживания одной заявки, г) вероятность отказа. Произвести шесть испытаний.

Вариант 4:

$f(x) = 0{,}3\exp(-0{,}3x)$

$f1(t) = 1{,}4\exp(-1{,}4t)$

T = 25 мин

Взятие интегралов

Выпишем функцию f(x):

$$f(x) = 0,3\,e^{-0,3x}$$

Возьмем определенный интеграл от функции, а также проведем замену dx на d(-0,3x)

$$\int_0^{x_i} 0,3 \cdot e^{-0,3x}\,dx \;;\quad dx = \frac{du}{u'}$$

$$u = -0,3x\;;\; u' = -0,3$$

Взятие интегралов

$$\int_0^{x_i} \frac{\cancel{0,3}e^{-0,3x}\,d(-0,3x)}{-\cancel{0,3}} = \int_0^{x_i} -e^{-0,3x}\,d(-0,3x)$$

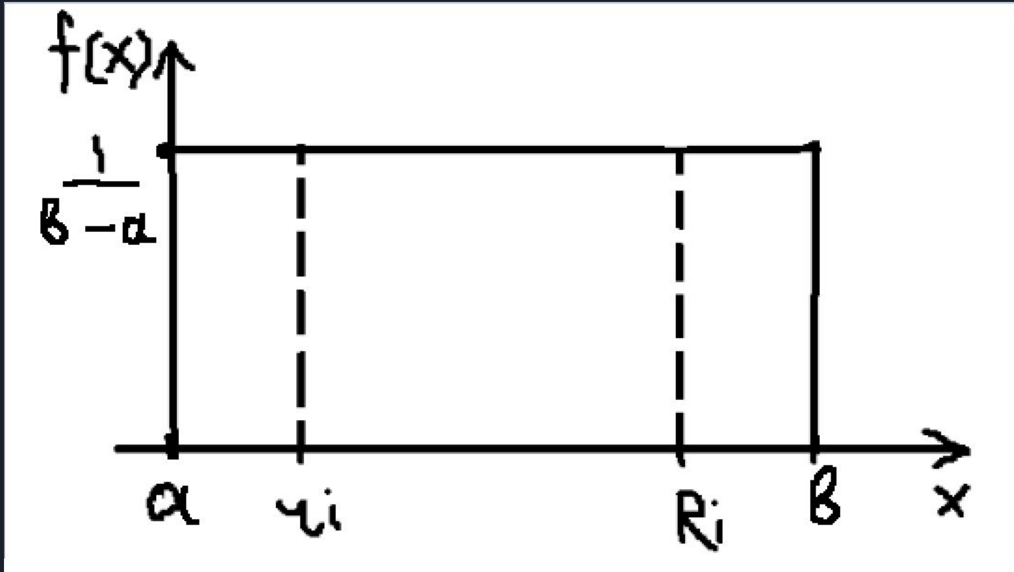
$$-e^{-0,3x}\Big|_0^{x_i} = -e^{-0,3x_i} - \left(-e^{-0,3\cdot 0}\right)$$

$$-e^{-0,3x_i} + e^{-0,3\cdot 0} = ч_i$$

$$-e^{-0,3x_i} = ч_i - 1 = R_i$$

Замена ri - 1 = Ri

Функция распределения равномерной случайной величины:



$$[a; b] = [0; 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{(b - a)} = 1$$

Итоговые уравнения

Уравнение для моделирования времени между моментами наступления двух заявок:

$$x_i = -\frac{1}{0{,}3} \cdot \ln R_i$$

Уравнение для моделирования времени обслуживания заявки

$$f_1(t) = 1{,}4e^{-1{,}4t}$$

$$\int_0^{t_i} \frac{1{,}4\, e^{-1{,}4t}\, d(-1{,}4t)}{-1{,}4}$$

$$e^{-1{,}4t}\Big|_0^{t_i} = -e^{-1{,}4t_i} + 1$$

$$e^{-1{,}4t_i} = R_i$$

$$t_i = -\frac{1}{1{,}4} \ln R_i$$

Моделирование случайной величины

Сначала смоделируем процесс наступления заявок:

Номер заявки i	Случайное число ri	xi = (-1/0.3)*Ln(ri)	Ti = Ti-1 + xi
1	0.457	2.611	2.611
2	0.564	1.910	4.522
3	0.637	1.505	6.027
4	0.376	3.262	9.289
5	0.320	3.803	13.092
6	0.341	3.581	16.673
7	0.285	4.184	20.858
8	0.536	2.081	22.939
9	0.863	0.490	23.429
10	0.797	0.758	24.188
11	0.690	1.236	25.424

Смоделируем процесс обслуживания заявок:

i	ri	ti = 1/1.4*Ln(ri)	Момент поступления	Момент обслуживания	Момент окончания	Обслужено	Отказ
1	0.602	0.326	0	0	0.326	1	
2	0.854	0.113	2.611	2.611	2.724	1	
3	0.316	0.822	4.522	4.522	5.344	1	
4	0.634	0.325	6.027	6.027	6.352	1	
5	0.396	0.662	9.289	9.289	9.951	1	
6	0.894	0.080	13.092	13.092	13.172	1	
7	0.063	1.975	16.673	16.673	18.648	1	
8	0.291	0.881	20.858	20.858	21.739	1	
9	0.357	0.737	22.939	22.939	23.676	1	
10	0.776	0.181	23.429	0	0		1
11	0.703	0.252	24.188	24.188	24.44	1	
Z		6.354				10	1

Для 1-го опыта:

а) ср. время обслуживания = 6.354/10 = 0.635 (длительность обслуживания делится на количество обслуженных заявок)

б) вероятность обслуживания = 10/11 = 0.9 (количество обслуженных заявок делится на количество поступивших заявок)

в) вероятность отказа = 1 - 0.9 = 0.1

Требуется провести 6 подобных опытов, после чего - рассчитать по ним средние показатели для времени обслуживания, вероятности обслуживания и вероятности

N	Кол-во заявок	Обслуженные заявки	Длительность обслуживания	Ср. время обслуживания	Вероятность обслуживания	Вероятность отказа
1	11	10	6.354	0.635	0.9	0.1
2	8	6	1.310	0.218	0.75	0.25
3	16	12	4.709	0.392	0.75	0.25
4	9	7	4.384	0.626	0.78	0.22
5	9	7	5.867	0.838	0.78	0.22
6	8	7	4.427	0.632	0.875	0.125
Z		8.167	4.509	3.341	0.806	0.194

Программное решение

```
import random
import math
T = 0
count_ob = 0
count_otk = 0
xb = 0
while T < 25: #25
    ri = random.uniform(0, 1)
    ti = (-1/1.4)*math.log(ri)
    T_free = T + ti
    ri = random.uniform(0, 1)
    xi = (-1/0.3)*math.log(ri)
    T_new = T + xi
    if T_new < T_free:
        count_otk += 1
    else:
        count_ob += 1
        xb += ti
    T = T_new
N = count_ob+ count_otk
print('Поступило заявок:', N)
print('Обслужено:', count_ob)
print('Длительность обслуживания:', xb)
print('Ср. время обслуживания:', xb/count_ob)
print('Вероятность обслуживания:',count_ob/N)
print('Вероятность отказа:', 1 - count_ob/N)
```

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!