

Тема3

Элементы теории графов

Лекция
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
ТЕОРИИ ГРАФОВ

1 Понятие о графах и теории графов

- Совокупность множества M с заданным на нем бинарным отношением называется графом $G = \langle M, T \rangle$,

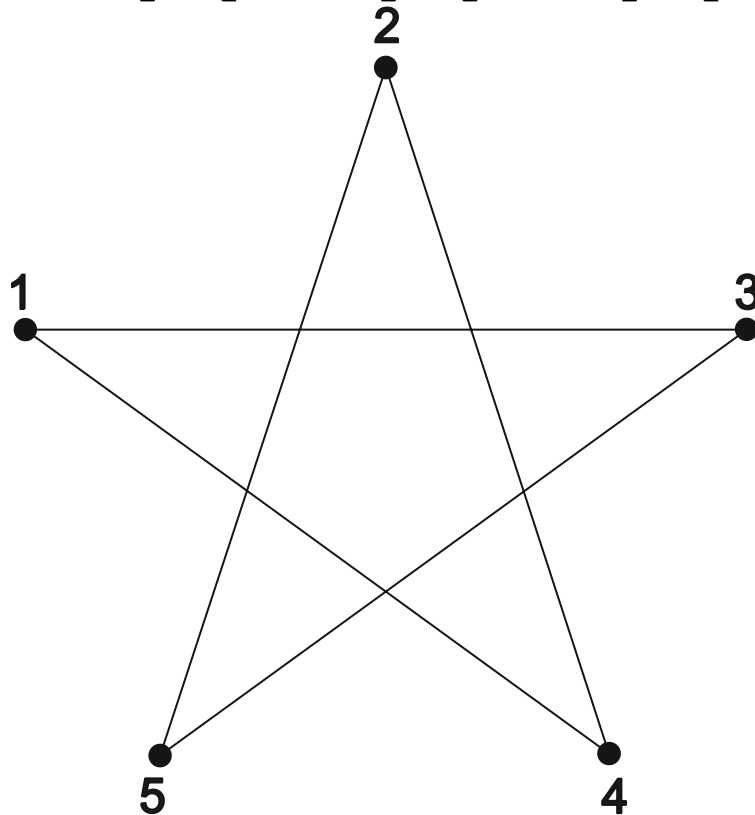
$$T \subseteq M^2$$

- где M – носитель графа – множество **вершин**, изображаемых точками,
 T – сигнатура графа – множество линий, обозначающих отношения и называемых **ребрами**.

Пример графа «звезда»

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$T = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 1), (5, 3), (5, 2)\}.$$



- **Линии, изображающие ребра, могут пересекаться на изображении графа, но точки их пересечений не являются вершинами.**

- Между элементами двух множеств M и T определено отношение инцидентности, т.е. связи между двумя элементами множества M через один элемент множества T .
- Множество линий-ребер в T задается обозначением пары (i, j) , где i, j – инцидентные вершины, отношение T – «быть связанным».
 - Между элементами одного множества определено отношение смежности, то есть «соседства».

- **Другие примеры графов:
отношения дружбы на
множестве людей,
отношения родства,
карты дорог местности,
электрические схемы
соединений микросхем,
приборов , систем и т.д**

Теория графов

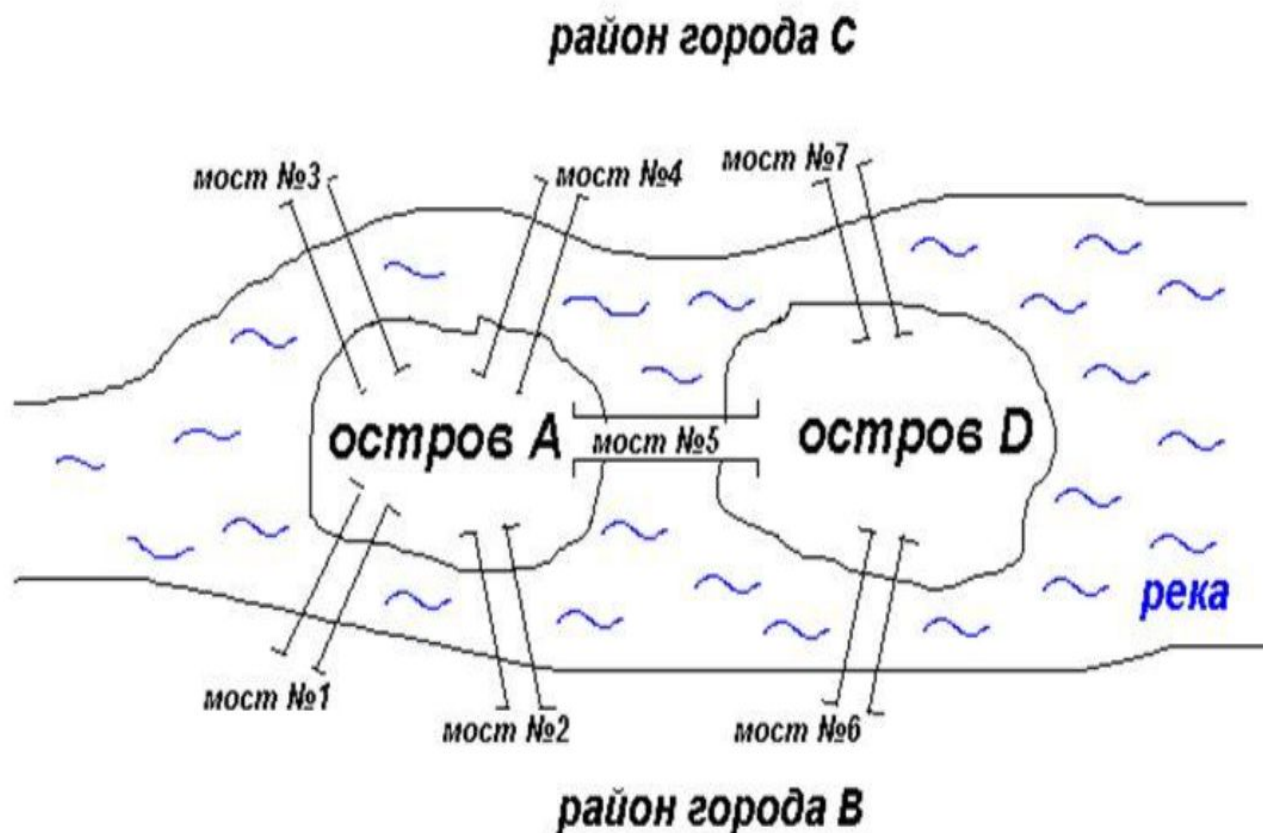
- **Раздел дискретной математики, изучающий свойства графов.**
- **Теория графов содержит большое количество нерешённых проблем и пока недоказанных гипотез.**

- **Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер.**



- **В 1736 - задача о кёнигсбергских мостах**

Задача о кенигсбергских мостах.



Карта г.Кенинсберг

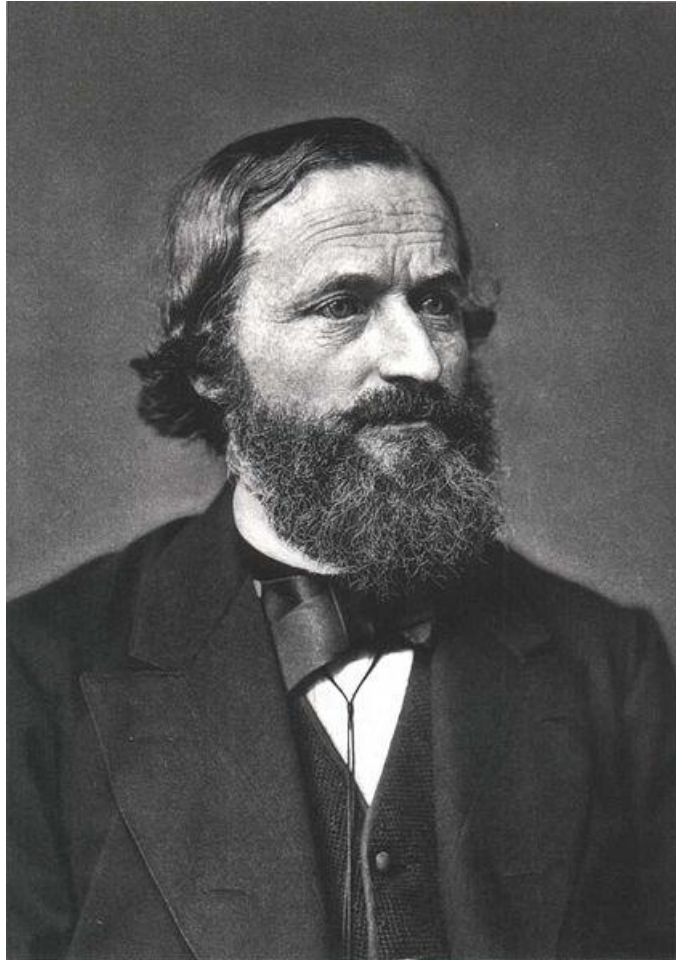
Задача: необходимо составить путь движения по городу так, чтобы пройдя ровно по одному разу по каждому мосту, вернуться в то же место откуда началось движение.

- Теорию графов
начали
разрабатывать для
решения
некоторых задач о
геометрических
конфигурациях,
состоящих из точек
и линий.

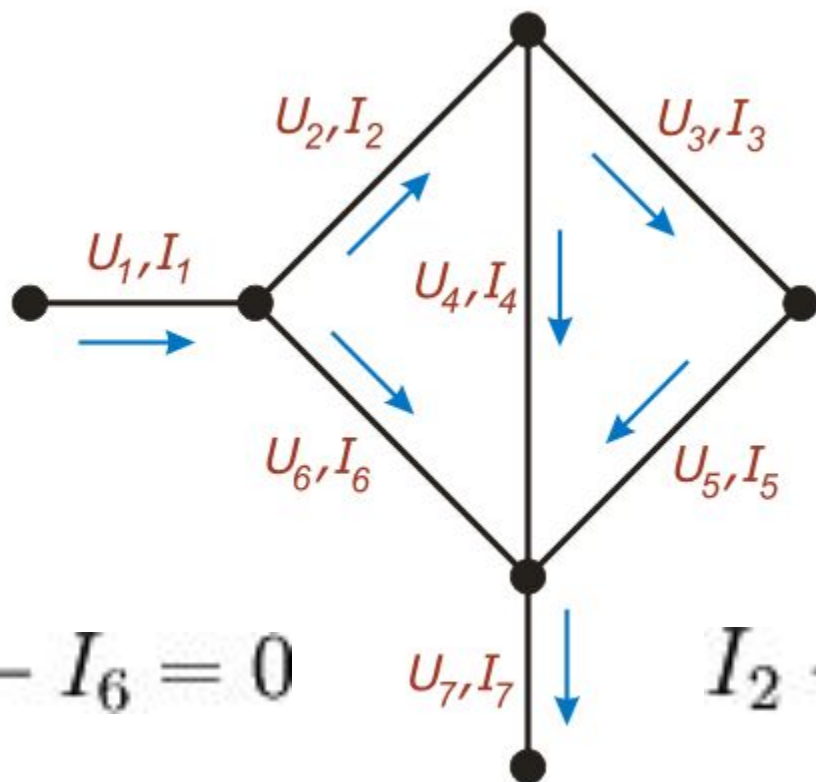
- **В этих задачах несущественно, соединены ли точки конфигурации отрезками прямых или они криволинейны, какова длина линий и другие геометрические характеристики конфигурации.**
- **Важно лишь, что каждая линия соединяет какие-либо две из заданных точек**

- **Первые серьезные результаты теории графов связаны с решением задач построения электрических цепей (Г. Кирхгоф)**

- **Г. Кирхгоф (1824-1887 гг.) –
Законы Кирхгофа**



$$I_6 + I_4 + I_5 - I_7 = 0$$

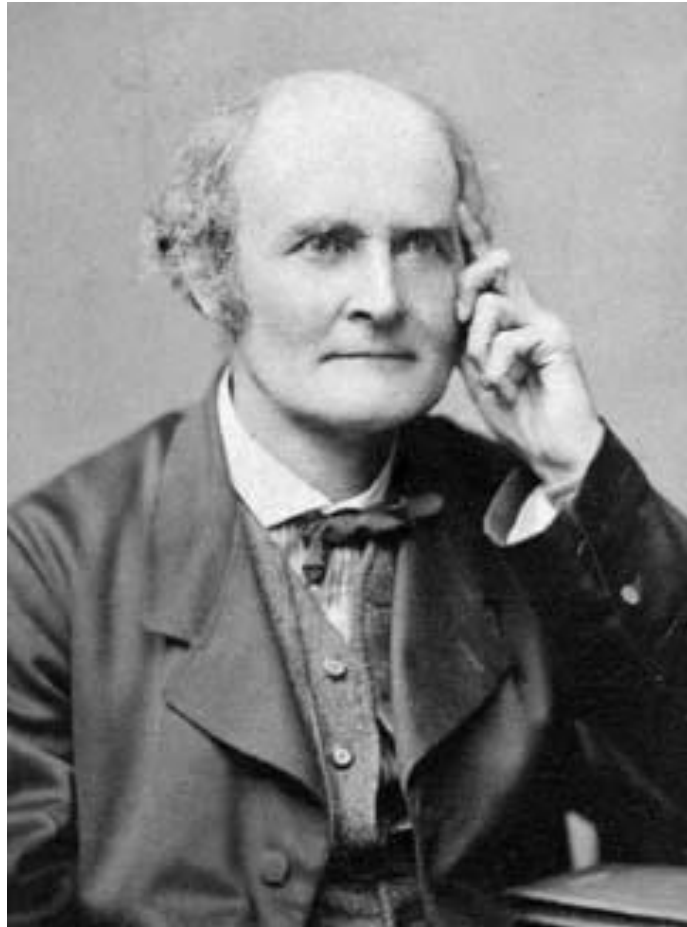


$$I_1 - I_2 - I_6 = 0$$

$$I_2 - I_4 - I_3 = 0$$

- **Подсчет числа химических соединений с различными типами молекулярных связей (А. Кэли).**

***Arthur Cayley*; (1821 - 1895) — английский математик.**



- **КУРАТОВСКИЙ (Kuratowski)**
Казимеж (1896-1980), польский
математик, иностранный член АН
СССР (1966). Труды по топологии,
теории функций, теории графов.



Уильям Роуэн Гамильтон

- Уильям Роуэн Гамильтон (*William Rowan Hamilton*; 1806 — 1865) — выдающийся ирландский математик.
 - Гамильтонов граф



Терминология теории графов

- Терминология теории графов поныне не определена строго.**
- Иногда граф называют "сетью", но мы будем считать сетью граф особого вида (транспортная сеть)**

Теория графов и кибернетика

- **В 30-е годы XX века благодаря трудам Д. Кенига теория графов стала развиваться как самостоятельный раздел математики.**
- **Широкое развитие теория графов получила с 50-х годов XX века в связи с появлением такой науки, как кибернетика.**

- Термин «граф» (от латинского слова «графио» - пишу) приобрел права гражданства и вошел в математический язык в 1936 году, после выхода в свет известной монографии Кёнига, в которой впервые графы рассматриваются как самостоятельные математические объекты независимо от их конкретного содержания.

- **Графы применяют при анализе функционирования систем.**
- **С отдельными компонентами изучаемой системы удобно связывать вершины графа, а с парами взаимодействующих компонент – его ребра.**
- **Такой граф называют структурным графом системы.**

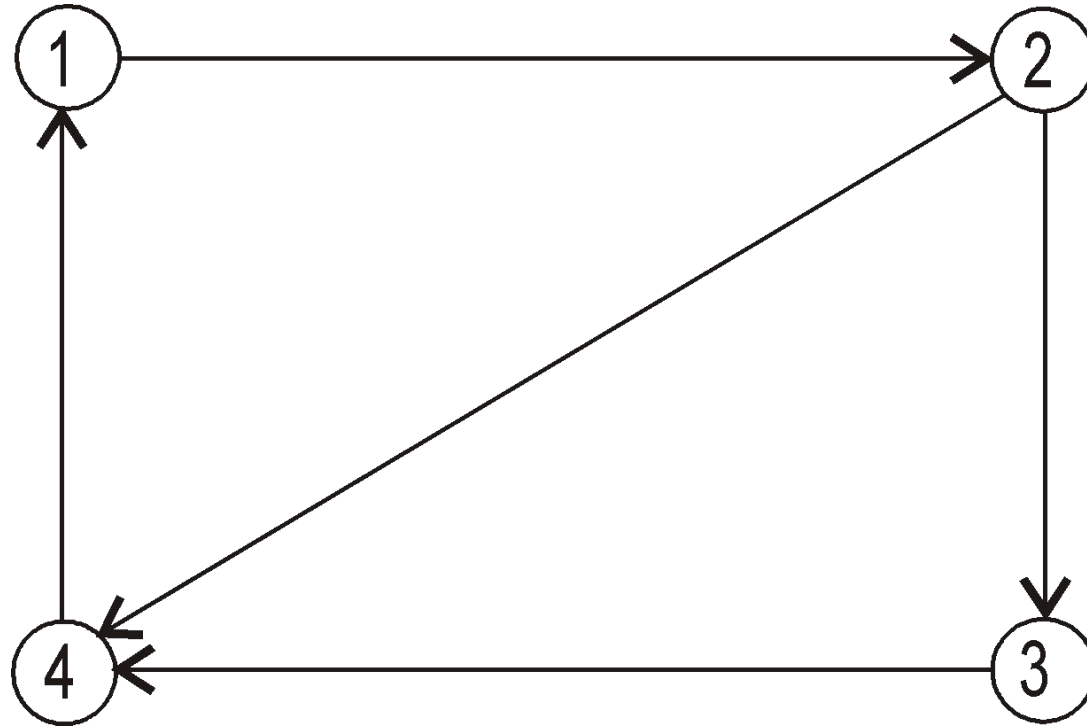
- Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС).
 - Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т. п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи и т. п. — как рёбра.
- Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

- **Графы используются в поисковых системах (Google)**
 - **Теория графов используется в химии (для описания структур, путей сложных реакций)**
 - **Новая наука – компьютерная химия**

2.Основные виды графов

- В некоторых задачах существенно направление ребер графа.**
- Направленные ребра называют дугами, а содержащий их граф – ориентированным (орграфом).**
 - Соответственно граф с неориентированными ребрами называется неориентированным.**

Ориентированный граф -орграф



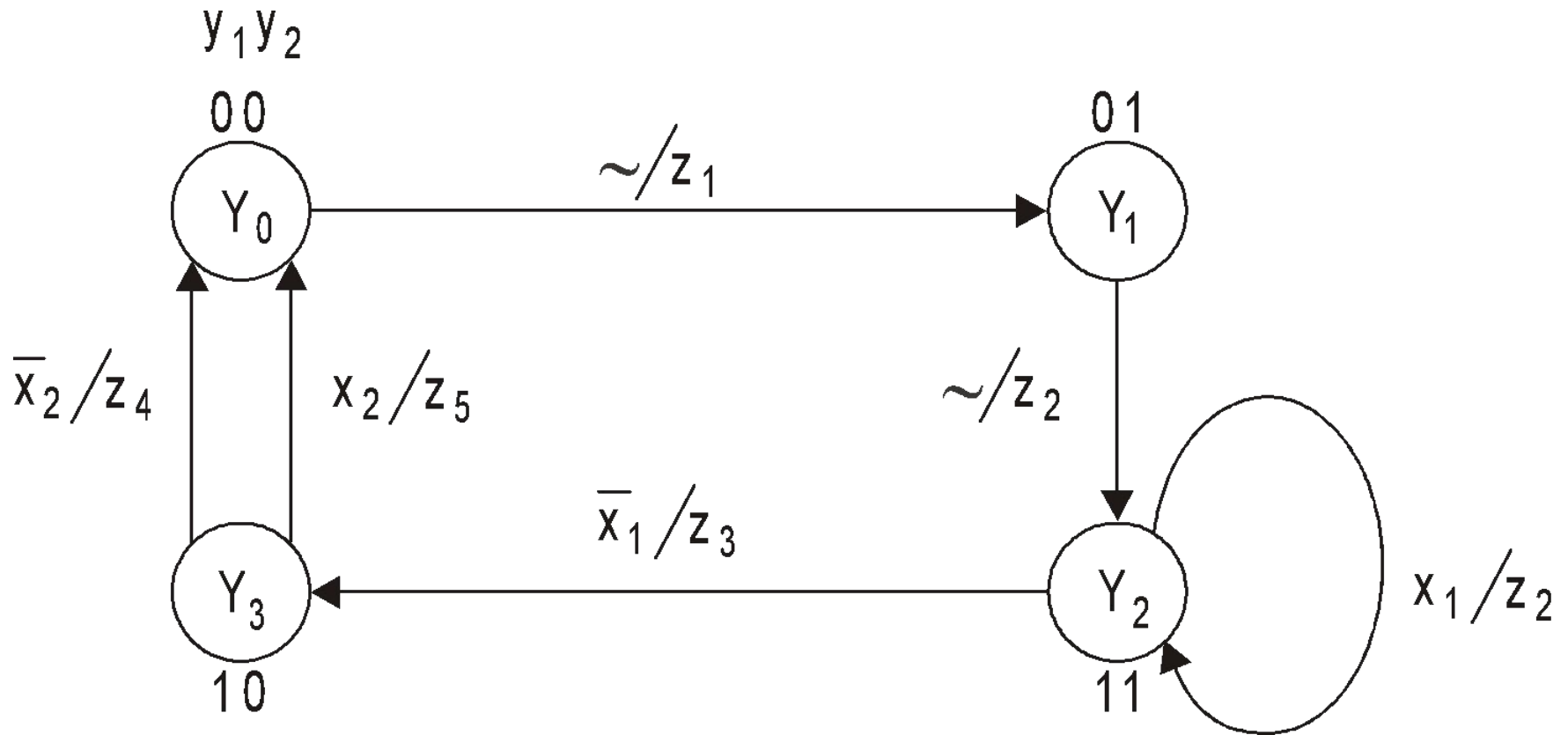
- **Множество ребер может быть пусто.**

- **Если же множество вершин пусто, то пусто и множество ребер.**

Такой граф называется пустым $\emptyset$.

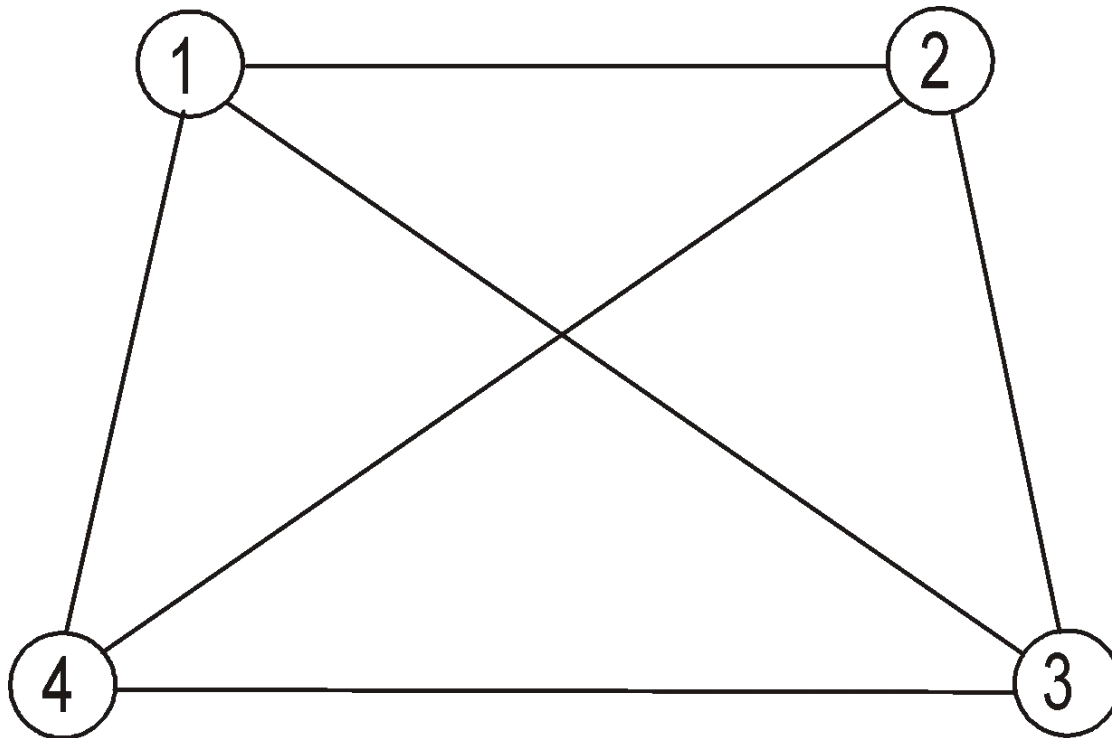
- **Различные ребра могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются кратными.**
- **Граф, содержащий кратные ребра, называют мультиграфом.**
- **Будем рассматривать конечные графы, содержащие конечные множества вершин и ребер (дуг).**

- Ребро (дуга) может соединять некоторую вершину саму с собой, такое ребро (дуга) называется петлей.

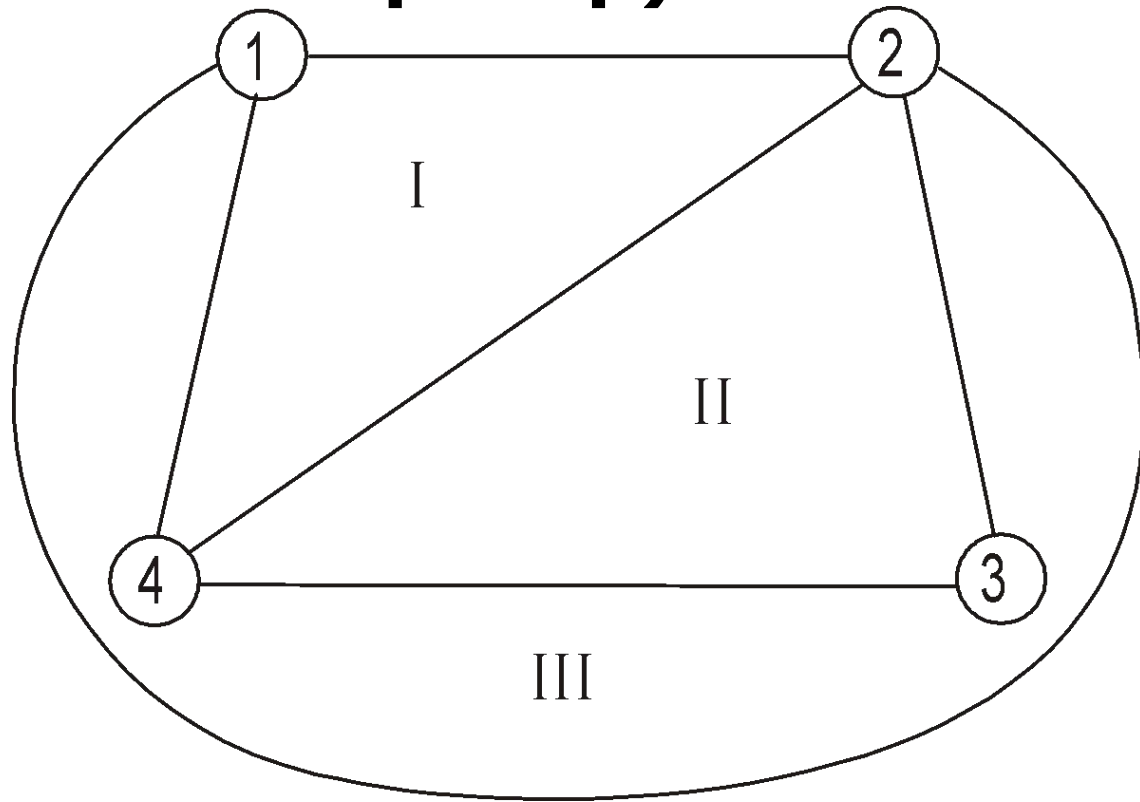


- **Граф называется нагруженным, если каждому ребру (дуге) поставлено в соответствие некоторое действительное число (длина дуги, вес дуги, стоимость дуги и т.д.) или некоторые другие символы.**

- **Полный граф: все вершины соединены друг с другом. Это квадрат множества M .**
- **Петли необязательны.**



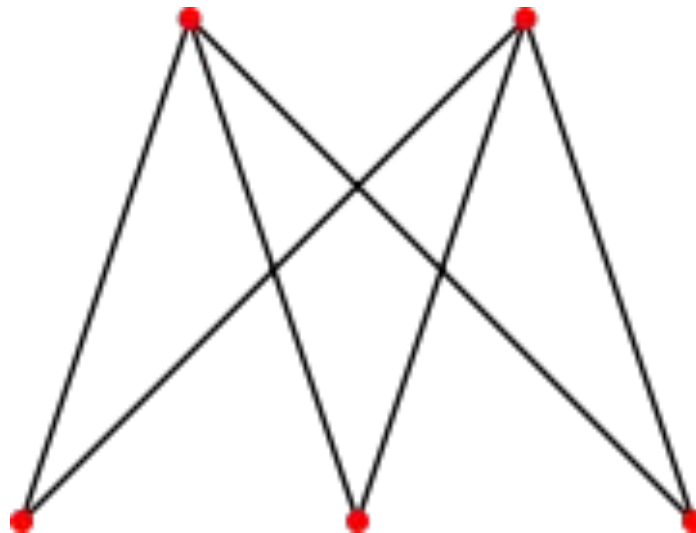
- **Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются вершинами (без пересечения рёбер).**



- **Псевдограф**
содержит и ребра, и
дуги.

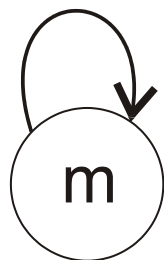
- **Тривиальный граф**
содержит только
одну вершину.

- **Двудольный граф (биграф, чётный граф) – граф, который может быть представлен двумя непересекающимися подмножествами вершин, причем все ребра соединяют вершины из разных подмножеств.**

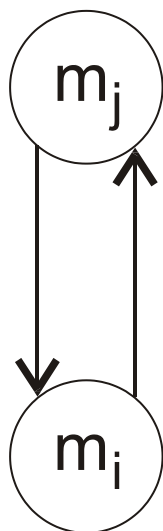


Полный двудольный граф $K_{3,2}$

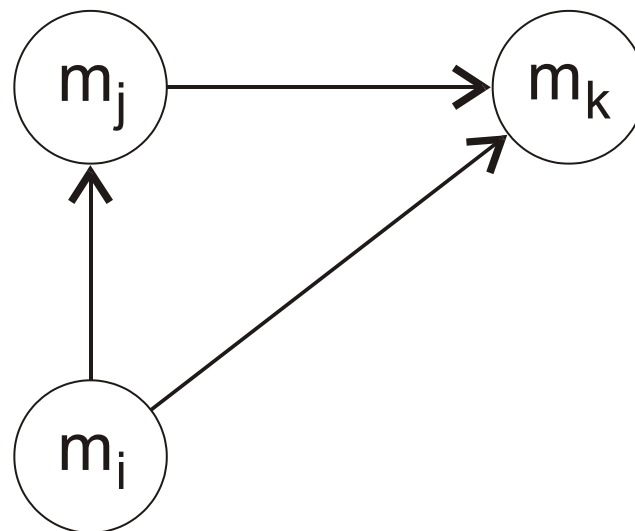
- **Представление бинарных отношений**



а)



б)



в)

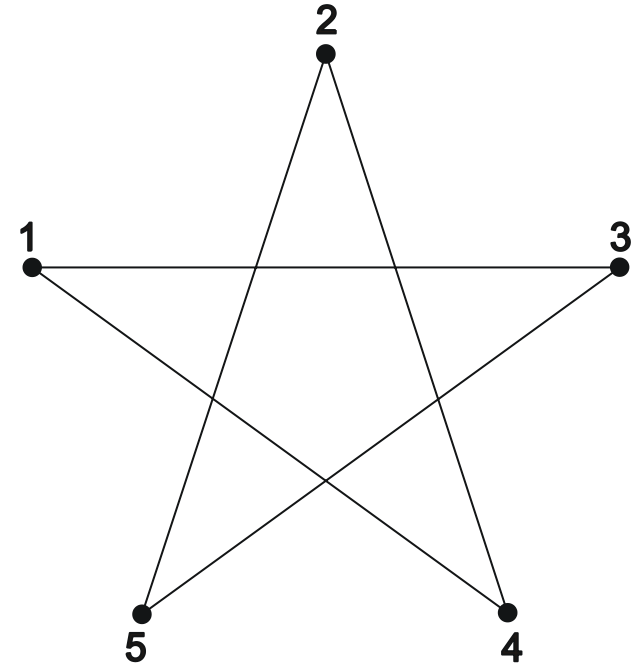
3. Задание графов

- **Граф можно задать так называемой матрицей смежности B , каждой i -ой строке (j -му столбцу) которой однозначно сопоставляют элемент множества M , между которыми выполняется отношение смежности.**
- **Две вершины, инцидентные одному ребру, смежны.**
- **Два ребра, инцидентные одной вершине, тоже смежны.**

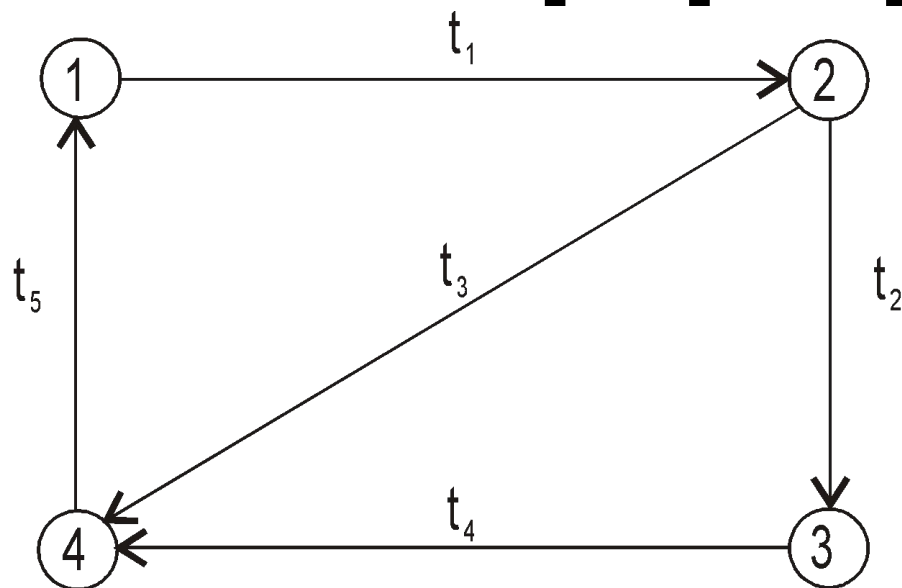
Матрица смежности

i/j	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	1
4	1	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0

Каждая клетка b_{ij}
соответствует квадрату
множества $M \cdot M$



Задание орграфа



i/j	t1	t2	t3	t4	t5
1	-1	0	0	0	1
2	1	-1	-1	0	0
3	0	1	0	-1	0
4	0	0	1	1	-1

- В описанном виде матрицы инцидентности применимы только к графам без петель, в случае наличия которых матрицу надо разбить на две полуматрицы: положительную и отрицательную.
- Ориентированный граф также может быть задан матрицей смежности.
- Для графов с кратными ребрами в матрице смежности указывают кратность ребер

- **Граф может быть задан списочной структурой: списками смежности и массивами рёбер (дуг).**

4. Характеристики графов

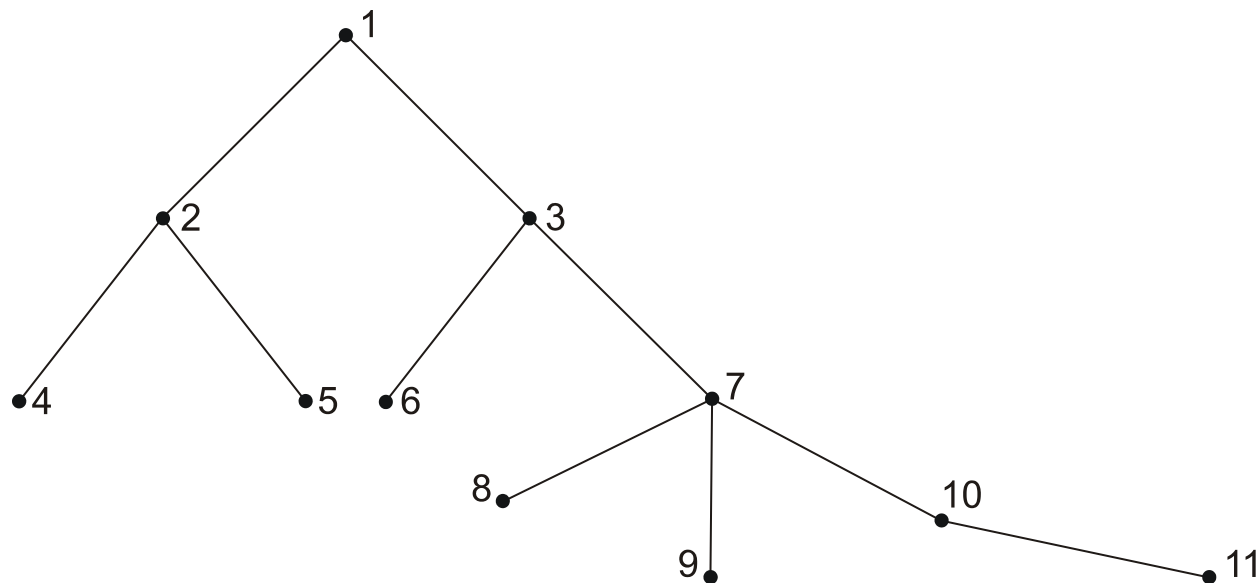
- Маршруты, цепи,
пути, циклы и
контурь**

- **Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой два соседних элемента инцидентны.**
- **Если начальная вершина маршрута равна конечной, то маршрут замкнут, иначе открыт.**
- **Если все ребра различны, то маршрут называется цепью.**

- Если все вершины (а, значит и ребра) различны, то маршрут называется простой цепью.
- Замкнутая цепь – цикл.
- Граф без циклов называется ациклическим.
- В ориентированном графе цепь называется путем, а цикл – контуром.

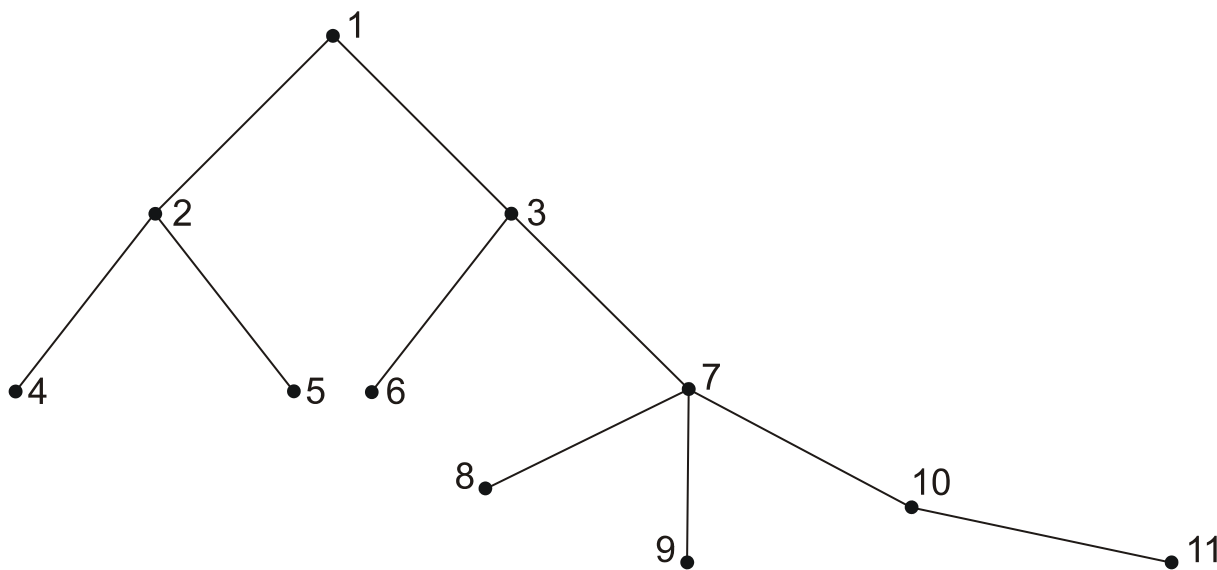
Деревья. Лес.

- **Граф связан, если любые две его вершины можно соединить цепью. Если граф не связан, то его можно разбить на отдельные связанные подграфы, которые называются компонентами связности.**
- **Связный граф, не имеющий циклов (ациклический), называется деревом**



Деревья. Лес.

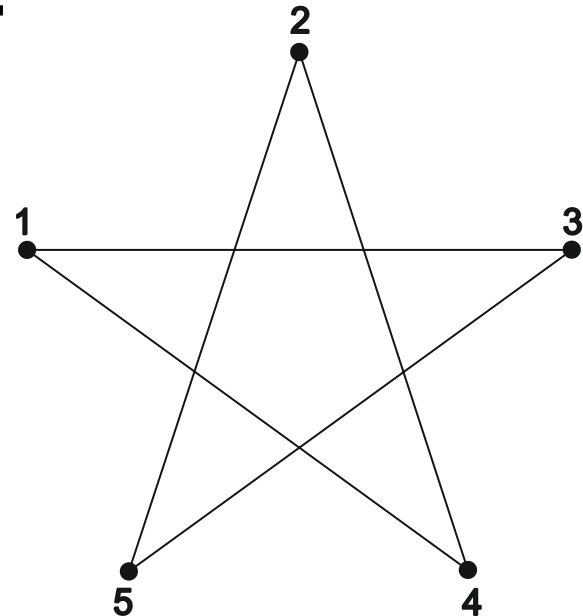
- Деревом может быть задано отношение подчинения в трудовом коллективе, в государстве.
 - Простейшее дерево состоит из двух вершин, соединенных ребром.
- Каждый раз, когда добавляется еще одно ребро, в конце его прибавляется также и вершина. Следовательно, дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребро.



Степень вершины

- Степенью вершины x , обозначаемой $\deg(x)$, называют число ребер, инцидентных ей.
- Если $\deg x = 1$, то вершина x тупиковая, если $\deg x = 0$, то вершина изолированная.
- Если G – неориентированный граф с n вершинами и m ребрами, то сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер:

$$\sum_{j=1}^n \deg j = 2m$$



Теорема о сумме степеней вершин

$$\sum_{j=1}^n \deg j = 2m$$

- Каждое ребро добавляет единицу к степени каждой из двух вершин, которое оно соединяет, т.е. добавляет 2 к сумме уже имеющихся вершин.
- Следствием является то, что в каждом графе число вершин нечетной степени чётно.
- Для ориентированного графа вводятся понятия полустепень исхода и полустепень захода.

Подграф

- Подграфом $G\Omega$ графа $G = \langle M, T \rangle$ называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G , образующих множество A , вместе с ребрами (дугами), их соединяющими.
- Так, карта шоссейных дорог Пермской области является подграфом графа «Карта шоссейных дорог Российской Федерации»

Частичный граф

- Частичным графом $G\Delta$ по отношению к графу G называется граф, содержащий только часть ребер (дуг) графа G .
- Так, карта главных дорог России –частичный граф карты шоссейных дорог России

- Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).
- Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.

- Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).
- Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.

- Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).
- Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.

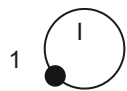
Цикломатическое число.

- Пусть G – неориентированный связный граф, имеющий n вершин и m ребер.
- Цикломатическим числом связного графа G с n вершинами и m ребрами называется число

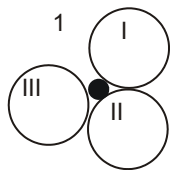
$$v(G) = m - n + 1.$$

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу независимых циклов в графе.

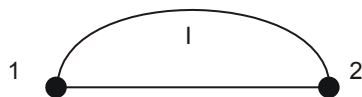
При расчете электрических цепей цикломатическое число используется для определения числа независимых контуров.



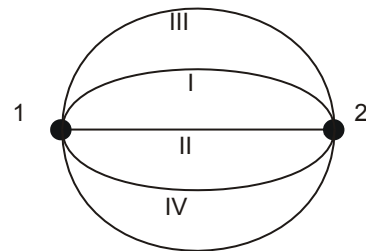
a)



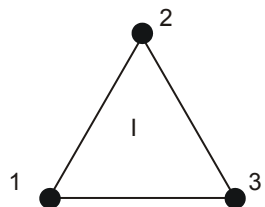
б)



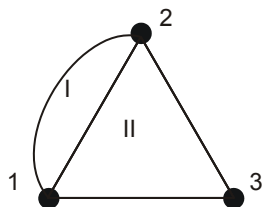
в)



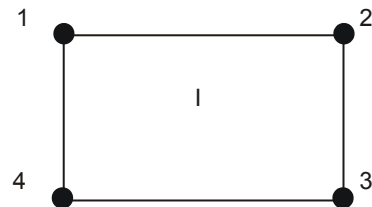
г)



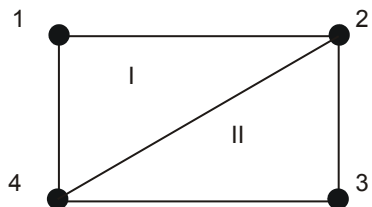
д)



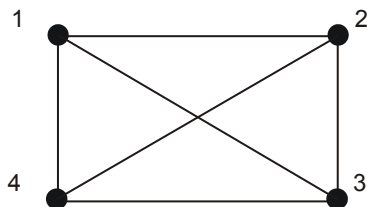
е)



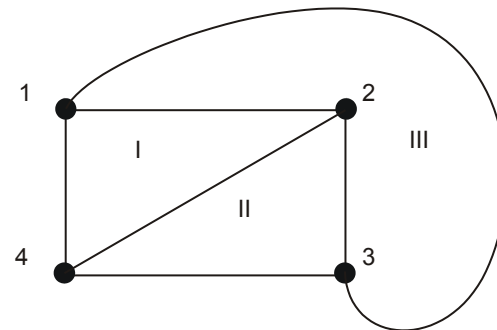
ж)



з)



≡



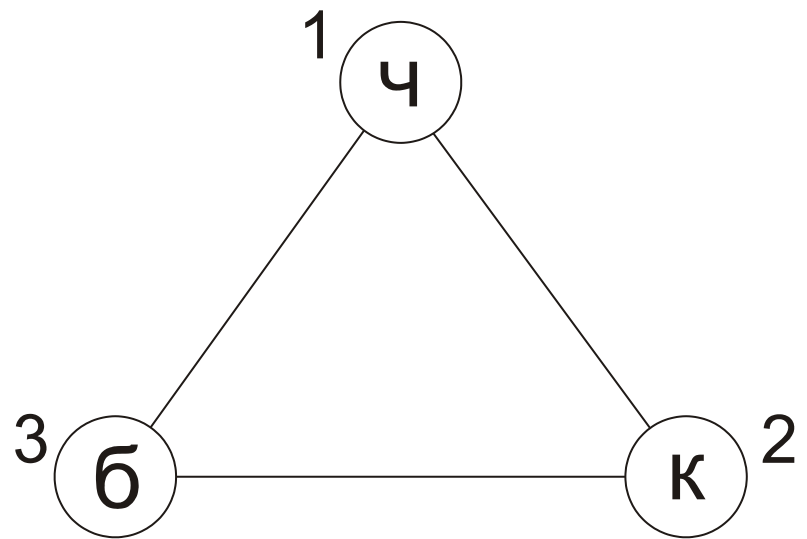
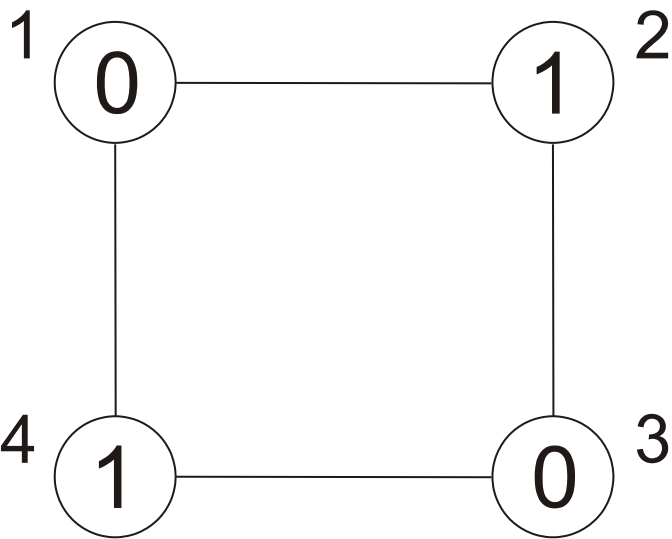
и)

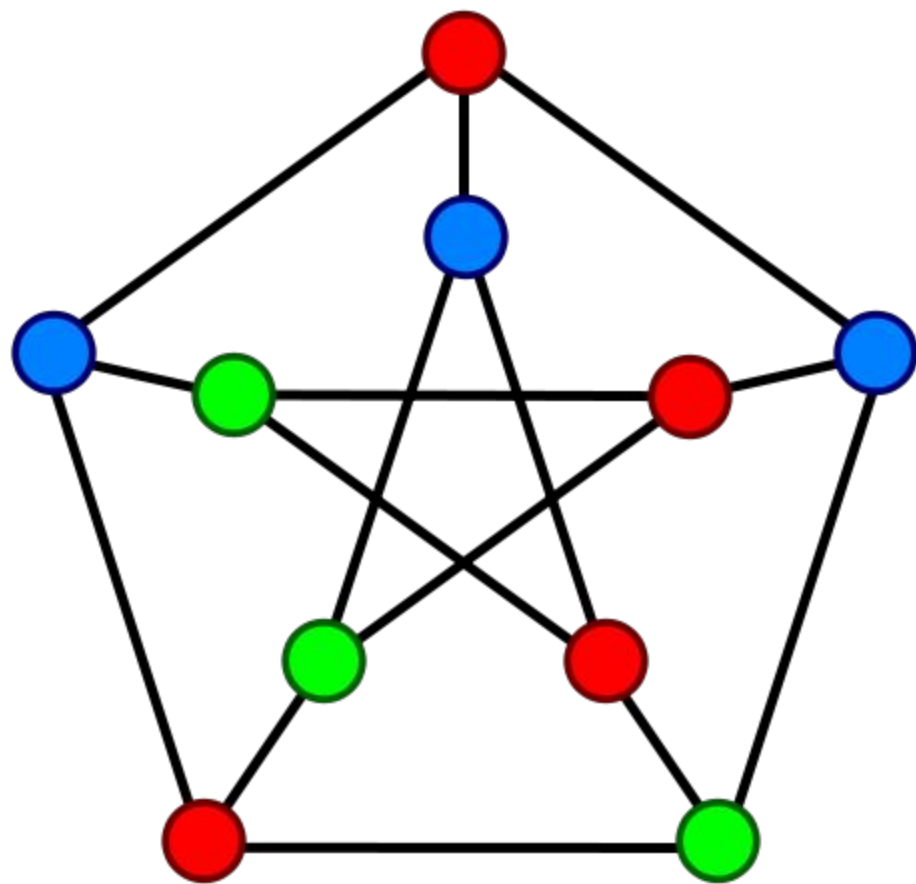
Хроматическое число графа.

- Граф G называют p -хроматическим, где p – натуральное число, если его вершины можно раскрасить p различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково.**

- **Наименьшее число p , при котором граф является p -хроматическим, называют хроматическим числом графа и обозначают $\chi(G)$.**
- **Если $\chi(G)=2$, то граф называют бихроматическим.**
- **Необходимым и достаточным условием бихроматичности является отсутствие в графе циклов нечетной длины.**

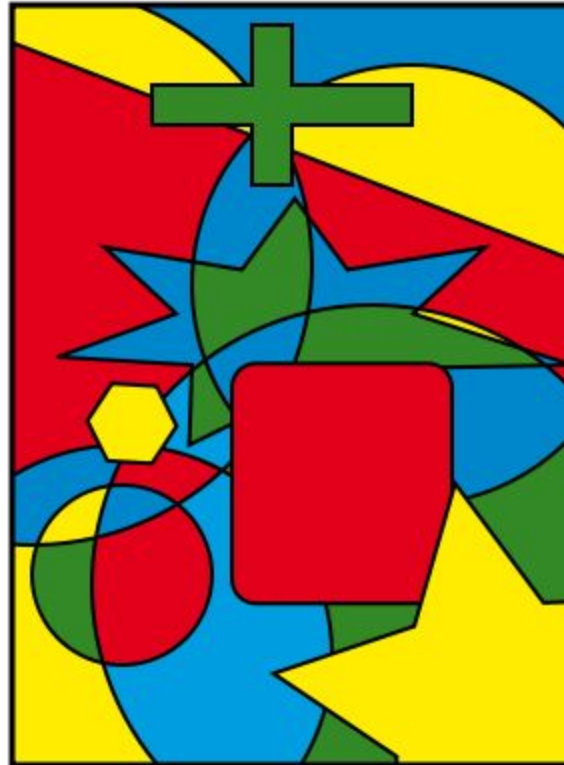
Примеры раскраски графов





- **Френсис Гутри, студент де Моргана, в 1852 году:
можно ли всякую
расположенную на сфере
карту раскрасить четырьмя
красками так, чтобы любые
две области, имеющие
общий участок границы,
были раскрашены в разные
цвета?**

Проблема четырёх красок — математическая задача, предложенная Гутри (англ.) в 1852 году.

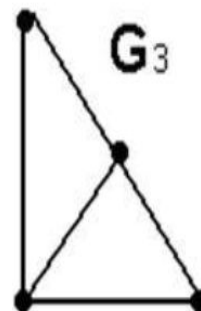
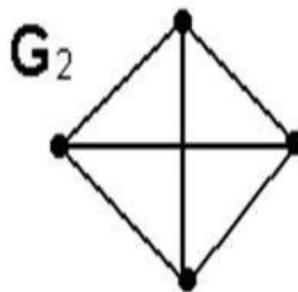
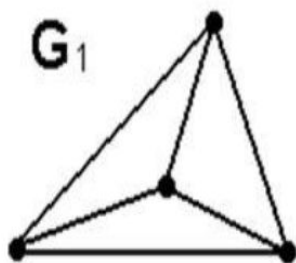


- **К. Appel и В. Хакен доказали в 1976 г. С помощью ЭВМ, что так можно раскрасить любую карту.**
- **Поэтому некоторые математики отнеслись к этому доказательству с недоверием, что объяснялось не только использованием компьютера, но и громоздкостью описания алгоритма первых доказательств (741 страница).**
- **Впоследствии были предложены более компактные алгоритмы и скорректирован ряд ошибок.**

Изоморфизм графов.

- Иногда не так легко понять, одинаково ли графы, изображенные разными рисунками.
- Вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер графа.
- Строго говоря, граф считается полностью заданным, если нумерация его вершин зафиксирована.
- Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются изоморфными.

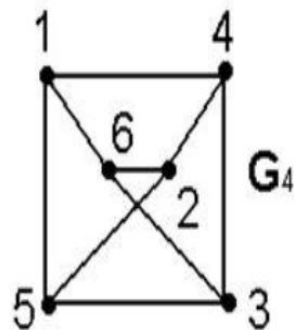
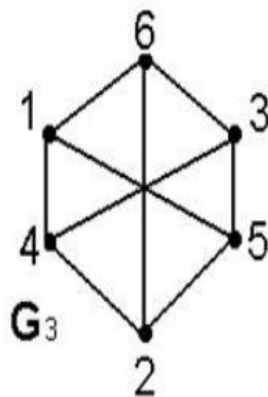
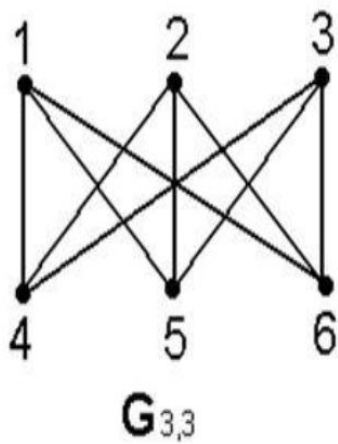
Пример6.



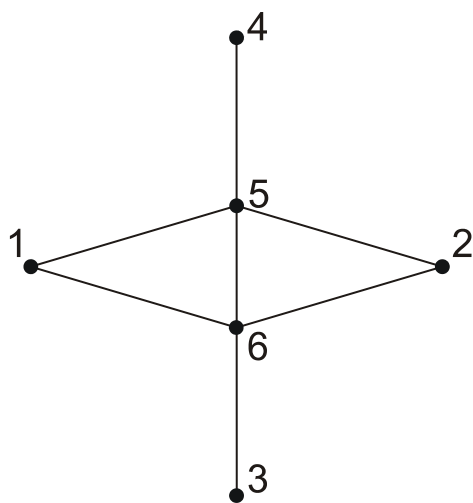
G_1 и G_2 - изоморфны

G_2 и G_3 - неизоморфны

Пример7.

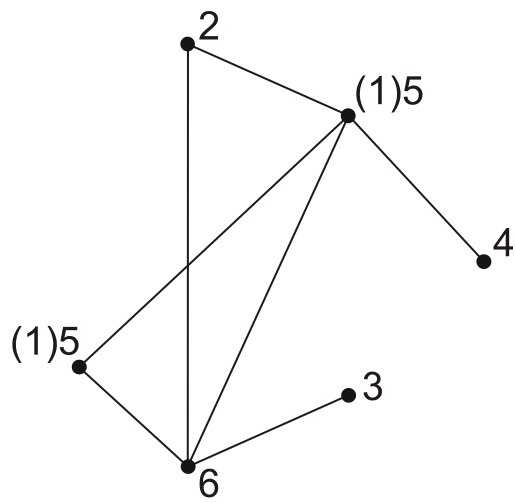


$G_{3,3}$, G_3 и G_4 - изоморфны



a)

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	2
0	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	1	0	4
1	1	0	1	0	1	5
1	1	1	0	1	0	6



b)

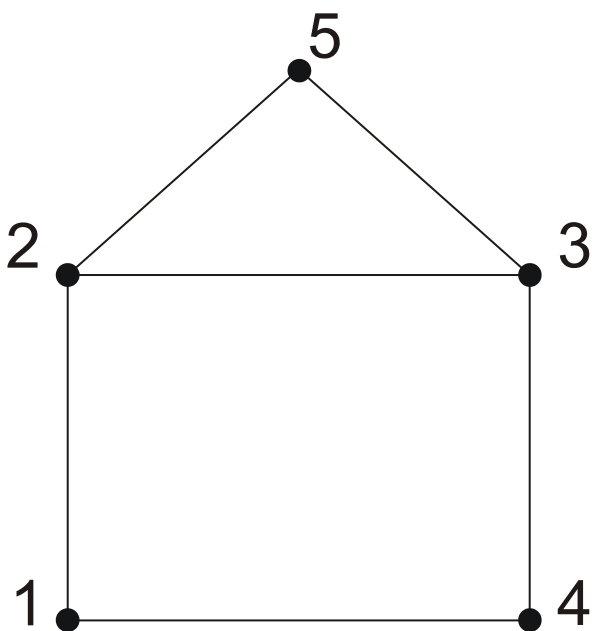
1	2	3	4	5	6	
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	0	1	3
1	0	0	0	0	0	4
1	0	0	0	0	1	5
1	1	1	0	1	0	6

Изоморфизм графов

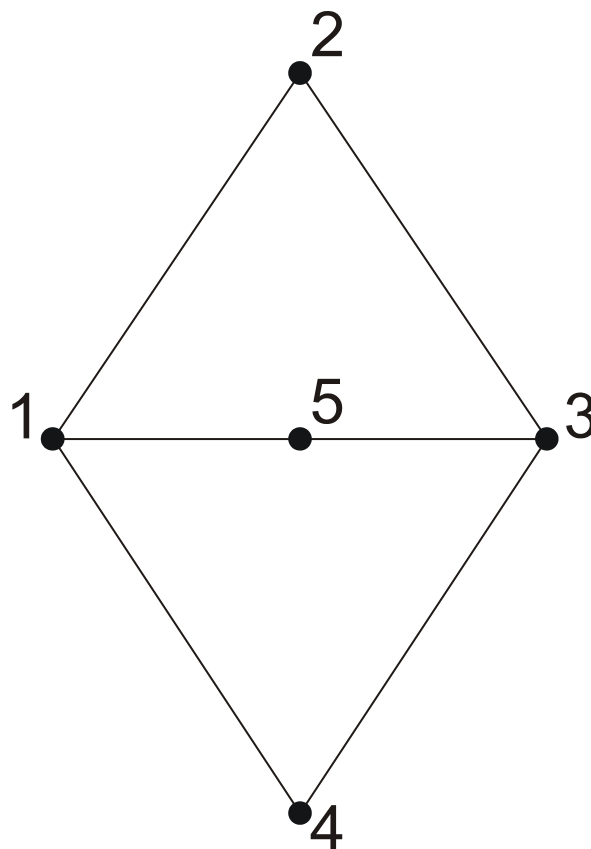
- Если граф ориентированный, то направление дуг в изоморфных графах должно совпадать.
- Чтобы узнать, представляют ли две матрицы смежности изоморфные графы, можно произвести всевозможные одинаковые перестановки строк и столбцов.
- Если после одной из этих перестановок возникнет матрица, совпадающая с заданной, то сравниваемые графы изоморфны. Для этого требуется максимум $n!$ перестановок, где n – число вершин графа.

- Иногда для определения изоморфности определяют параметры обоих графов: число вершин, число ребер, число компонент связности, последовательность степеней вершин в убывающем порядке.
- Если какие-то из этих параметров различны, то эти графы различны.
- Однако если все параметры у двух графов совпали, это не гарантирует изоморфности, то есть это необходимое, но не достаточное условие

- Два не изоморфных графа, у которых эти параметры совпадают



а)



б)

Понятие об операциях над графами.

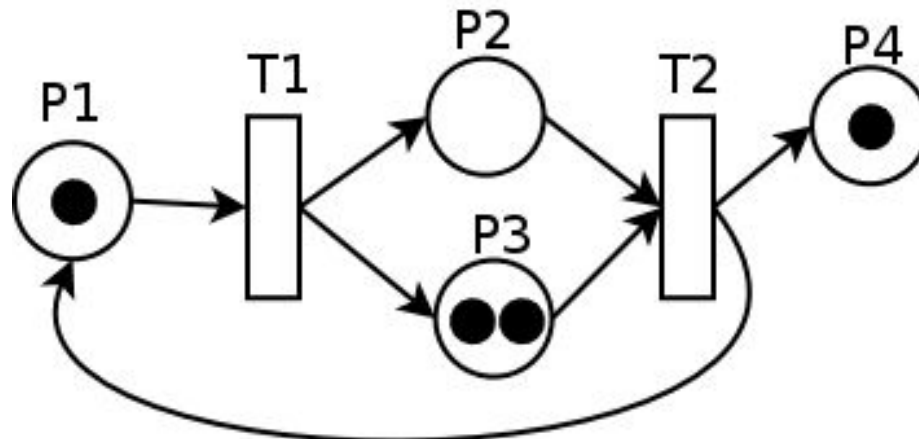
- **Полный граф – это граф, в котором все вершины связаны друг с другом. Очевидно, что это аналог универсума в теории множеств.**
- **Поэтому, можно ввести операцию дополнения графа до полного, например, в матрице смежности неориентированного графа заменяются нули на единицы и наоборот, исключая главную диагональ.**

Понятие об операциях над графами.

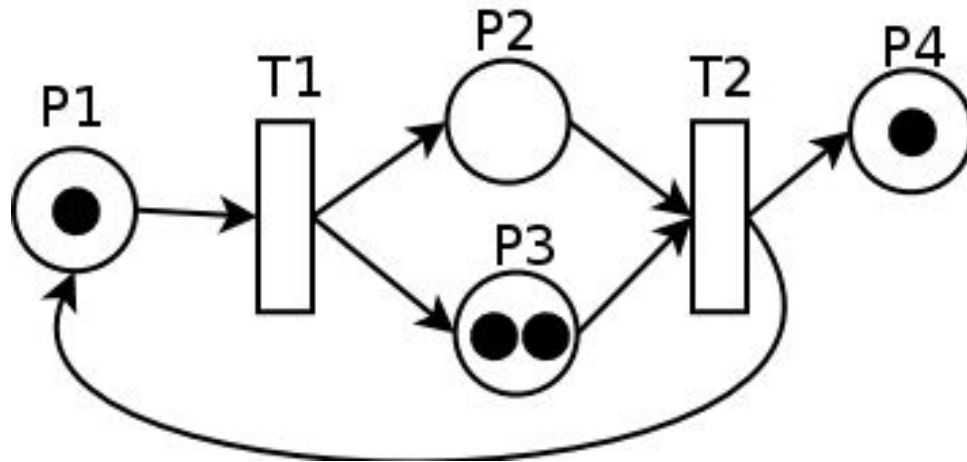
- **Вводятся также операции объединения графов, когда объединяются множества вершин и заданных на них отношений; соединение графов, когда находится пересечение указанных множеств.**
- **Используются и такие операции, как удаление вершины, удаление ребра, добавление вершины, добавление ребра.**

Сети Петри

- Сети Петри — математический аппарат для моделирования динамических дискретных систем. Впервые описаны Карлом Петри в 1962 году.

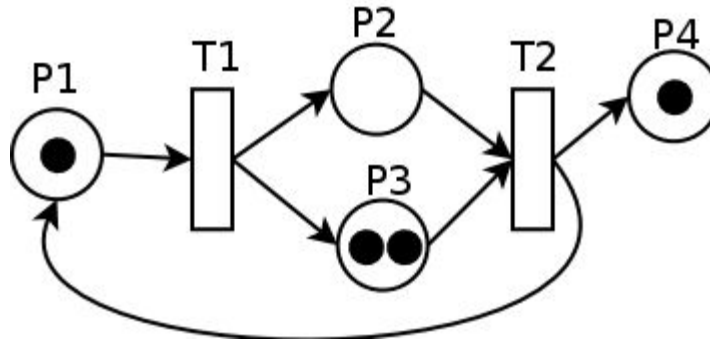


- **Сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, состоящий из вершин двух типов — позиций и переходов, соединённых между собой дугами, вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно.**
- **В позициях могут размещаться метки (маркеры), способные перемещаться по сети.**



Сети Петри

- Событием называют срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции. События происходят мгновенно, одновременно при выполнении некоторых условий.



Основными свойствами сети Петри являются:

- **Ограниченность** — число меток в любой позиции сети не может превысить некоторого значения K .
 - **Безопасность** — частный случай ограниченности, $K=1$.
- **Достижимость** — возможность перехода сети из одного заданного состояния (характеризуемого распределением меток) в другое.
- **Живость** — возможностью срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта.
- В основе исследования перечисленных свойств лежит анализ достижимости.

Некоторые виды сетей Петри:

Временная сеть Петри — переходы обладают весом, определяющим продолжительность срабатывания (задержку).

- Стохастическая сеть Петри — задержки являются случайными величинами.**
- Функциональная сеть Петри — задержки определяются как функции некоторых аргументов, например, количества меток в каких-либо позициях, состояния некоторых переходов.**

Некоторые виды сетей Петри:

- **Цветная сеть Петри — метки могут быть различных типов, обозначаемых цветами, тип метки может быть использован как аргумент в функциональных сетях.**
 - **Ингибиторная сети Петри — возможны ингибиторные дуги, запрещающие срабатывания перехода, если во входной позиции, связанной с переходом ингибиторной дугой находится метка.**

Множество устойчивости

- Множеством внутренней устойчивости графа называется подмножество таких его вершин, которые несмежны между собой.
- Множеством внешней устойчивости графа называют такое подмножество его вершин, если любая вершина, не принадлежащая этому подмножеству, смежна с вершинами из этого подмножества.
- Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число вершин, называют наименьшим внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества – число внешней устойчивости графа.

- Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).
- Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.