

Геометричні перетворення на площині

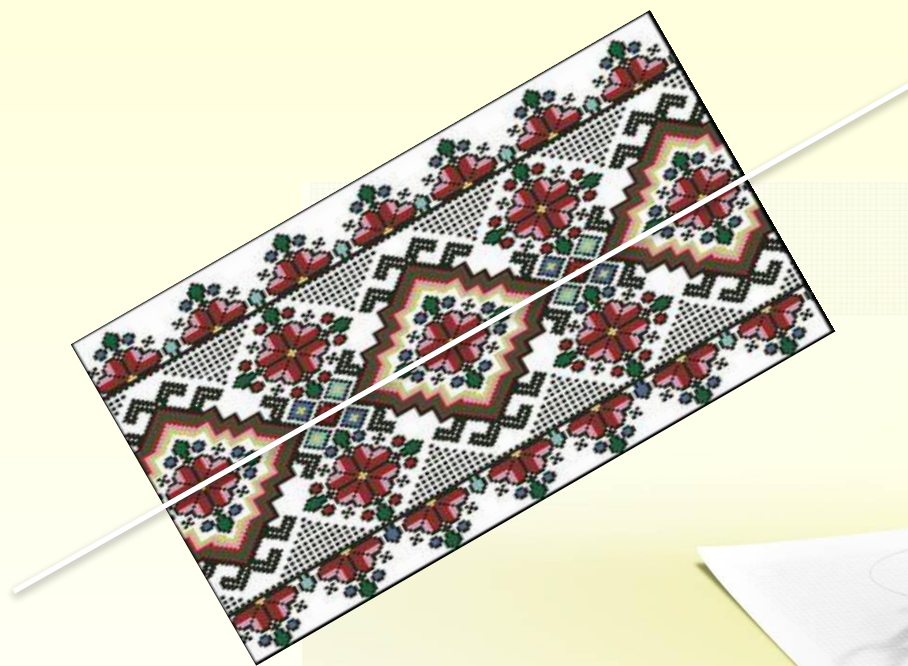


Геометрія 9 клас

*Автор презентації
вчитель математики
Олексицької ЗСОШ І-ІІ ст.
Стрийського району
Шакало Тетяна Василівна*

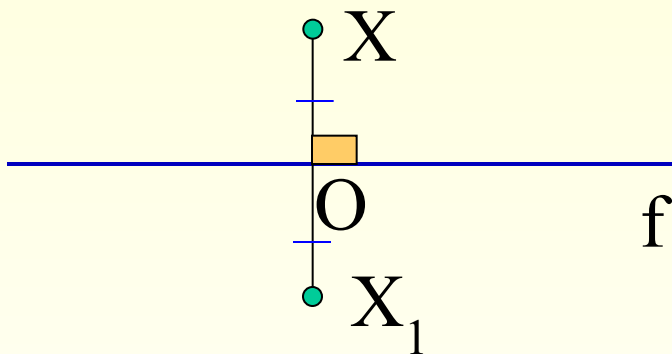
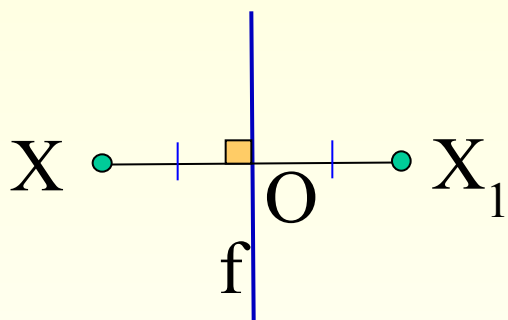


Симетрія відносно прямої



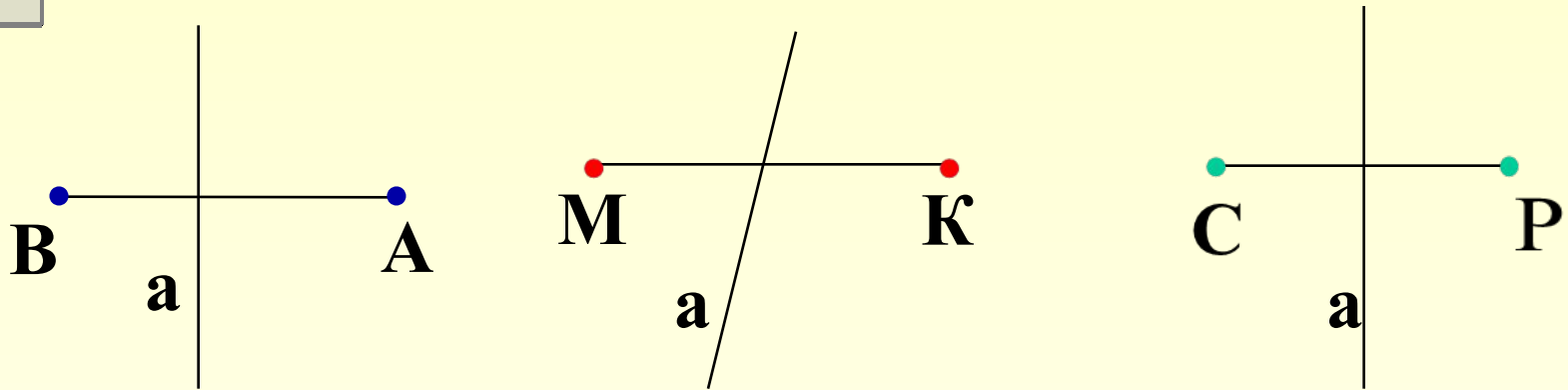
Щоб побудувати точку X_1 , симетричну точці X відносно даної прямої f , треба:

- 1) побудувати промінь XO , перпендикулярний до прямої f (O - точка перетину променя з прямою f);
- 2) на продовженні відрізка XO за точку O відкласти відрізок $OX_1 = XO$.



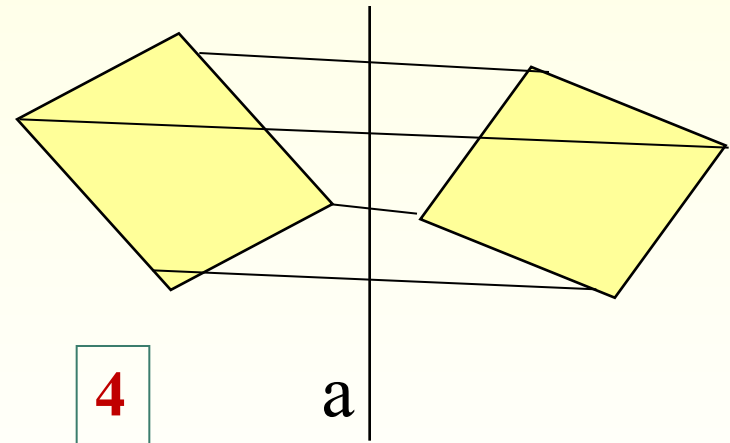
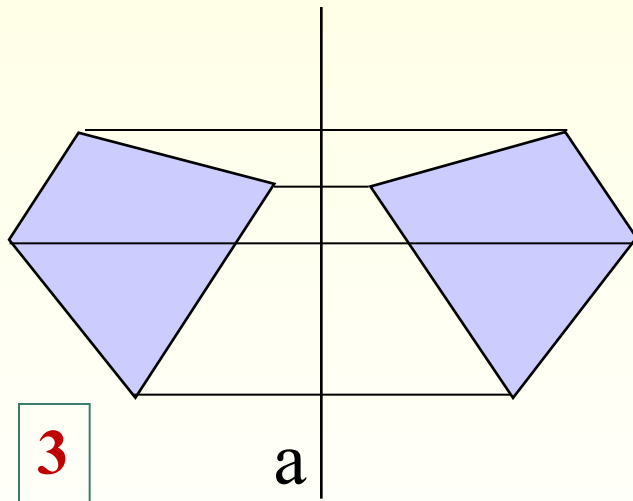
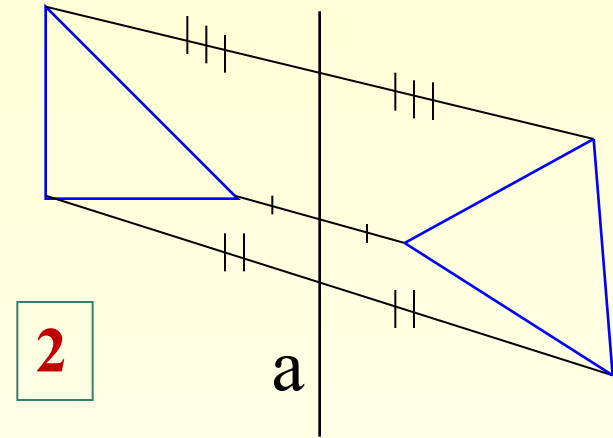
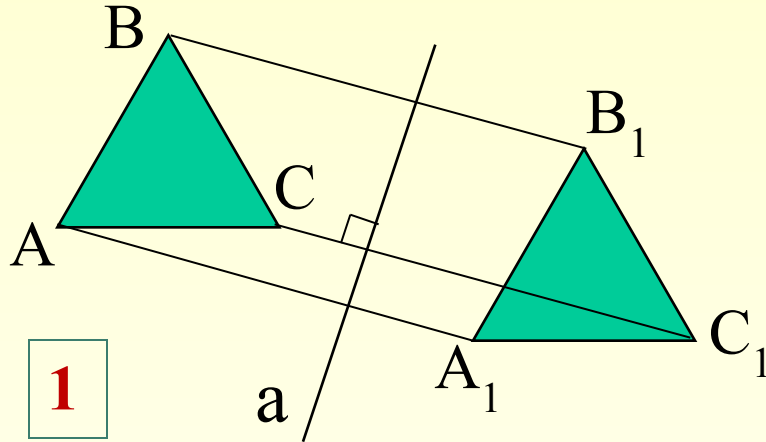
Точки X і X_1 називаються симетричними відносно прямої f , якщо пряма f є серединним перпендикуляром до відрізка XX_1 , тобто якщо $OX = OX_1$ і $f \perp XX_1$.

Які точки симетричні відносно прямої a ?



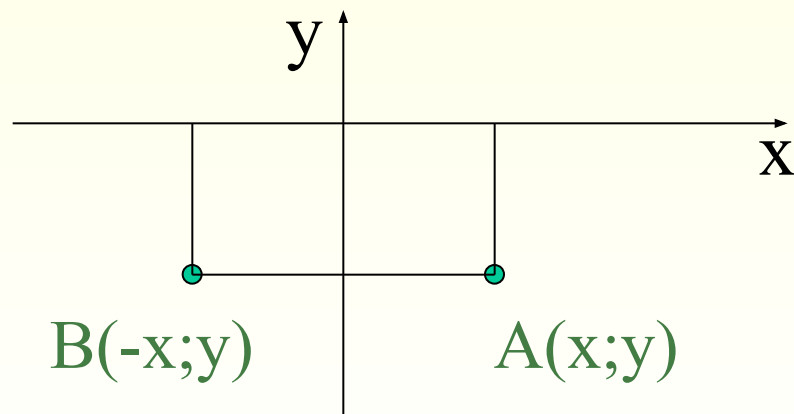
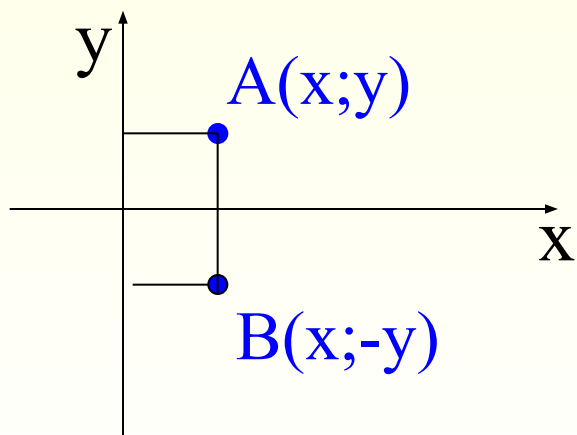
Перетворення фігури F у фігуру F_1 , при якому *кожна* точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну відносно даної прямої f , називається перетворенням симетрії відносно прямої f або осьовою симетрією. При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними відносно прямої f , а пряма f – віссю симетрії.

На якому з малюнків зображено фігури, симетричні відносно прямої a ? Відповідь обґрунтуйте.



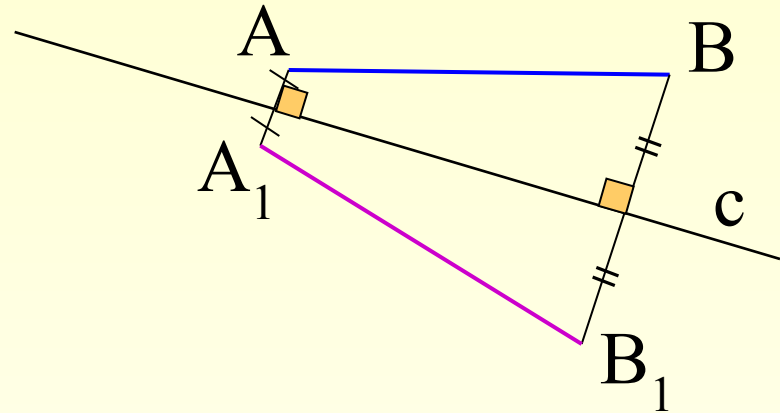
Властивості осьової симетрії

- Перетворення осьової симетрії є переміщенням.
- Осьова симетрія перетворює пряму на пряму, відрізок - на відрізок, багатокутник – на рівний йому багатокутник.
- Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.
- Якщо точки $A(x;y)$ і $B(x_1;y_1)$ симетричні відносно осі Ox , то виконується умова $\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = -y; \end{cases}$ а відносно осі Oy - $\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = y. \end{cases}$

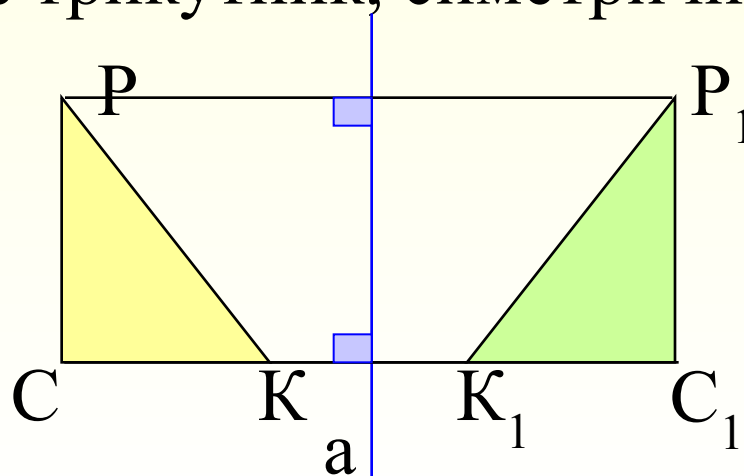


Розв'язування задач

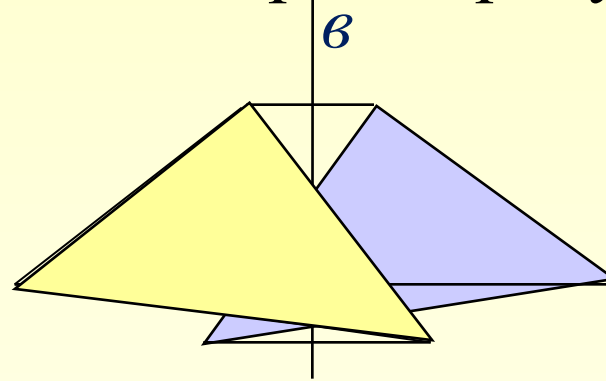
- Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно прямої c .



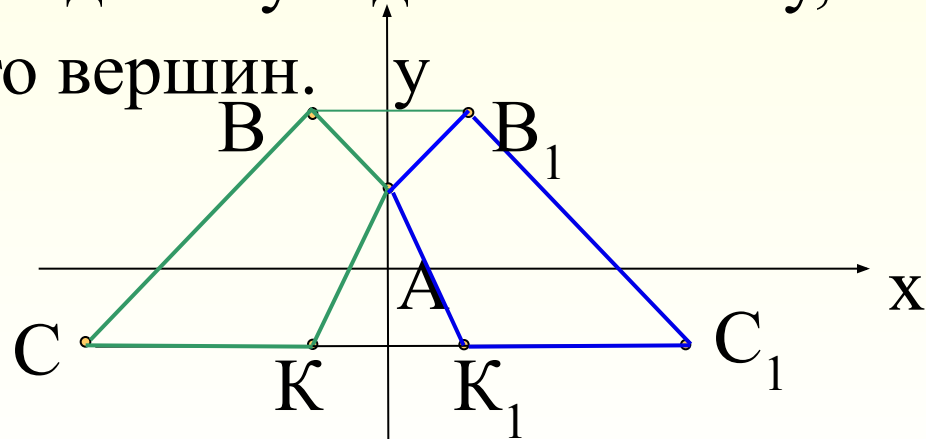
- Накресліть прямокутний трикутник CPK ($\angle C = 90^\circ$). Побудуйте трикутник, симетричний ΔCPK відносно прямої a .



- Побудуйте трикутник, симетричний даному, відносно прямої l , що перетинає дві сторони трикутника.

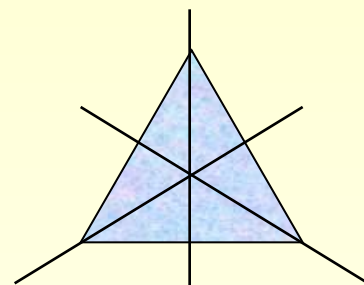
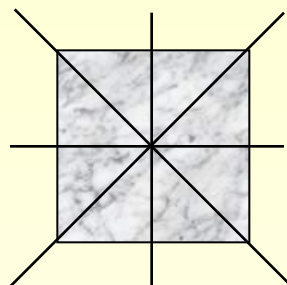
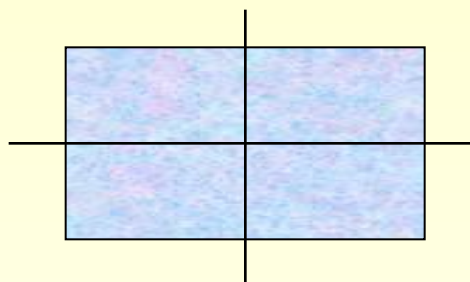


- Вершини чотирикутника $ABCK$ мають координати: $A(0; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(-4; -1)$, $K(-1; -1)$. Побудуйте чотирикутник, симетричний даному відносно осі Oy , і знайдіть координати його вершин.



$B(-1; 2)$, $C(-4; -1)$, $K(-1; -1)$, $A(0; 1)$

□ Позначте осі симетрії прямокутника, квадрата, рівностороннього трикутника.



□ Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ відносно осі Ox .

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

□ Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $y = x - 2$ відносно осі Ox .

Відповідь: $y = -x + 2$

Осьова симетрія навколо нас









Підсумок уроку

1. Скільки осей симетрії має: а) рівнобедрений трикутник; б) ромб; в) коло?
2. Назвіть координати точки В, яка симетрична точці А $(-3; 5)$ відносно: а) осі Ох; б) осі Оу.
3. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ відносно осі Оу.
- 4*. Осі симетрії прямокутника $x=3$ і $y=2$. Одна з його вершин А $(4;1)$. Знайдіть координати інших вершин.

Домашня робота

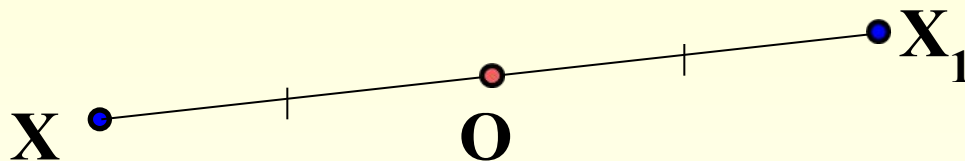
1. Запишіть координати точки М, яка симетрична точці К (2; -4) відносно осі Оу.
2. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний даному, відносно прямої, що проходить через одну з його вершин.
3. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ відносно осі Ох.
- 4* (додатково) Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $y = x - 2$ відносно осі Оу.

Симетрія відносно ТОЧКИ



Щоб побудувати точку X_1 , симетричну точці X відносно даної точки O , треба:

- 1) побудувати промінь XO ;
- 2) на продовженні відрізка OX за точку O відкласти відрізок $OX_1 = OX$.

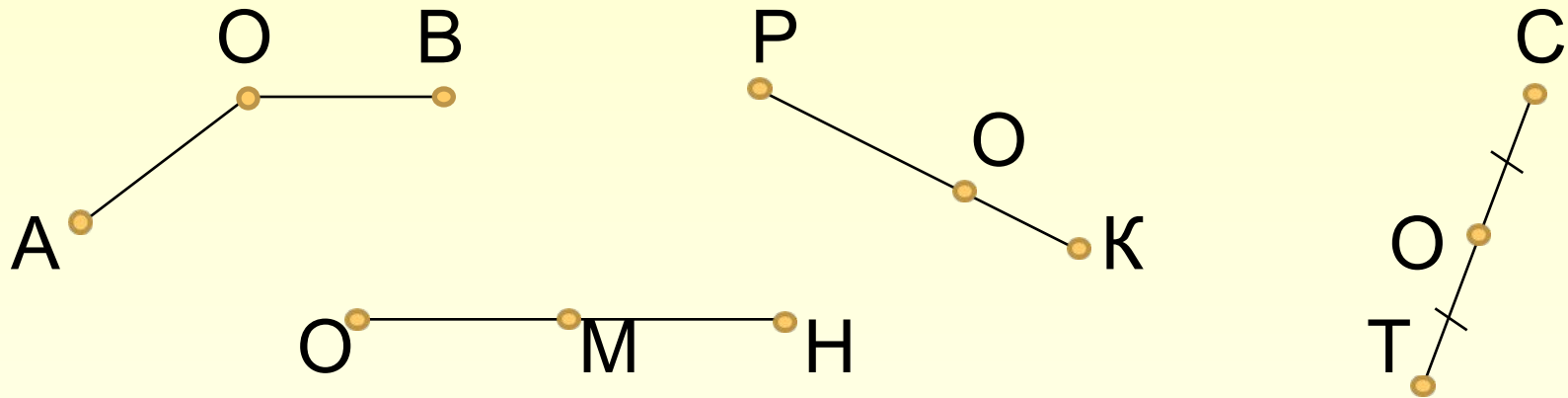


Точка X_1 називається симетричною точці X відносно точки O , якщо O - середина відрізка XX_1 .

Умови симетричності точок X_1 і X відносно точки O :

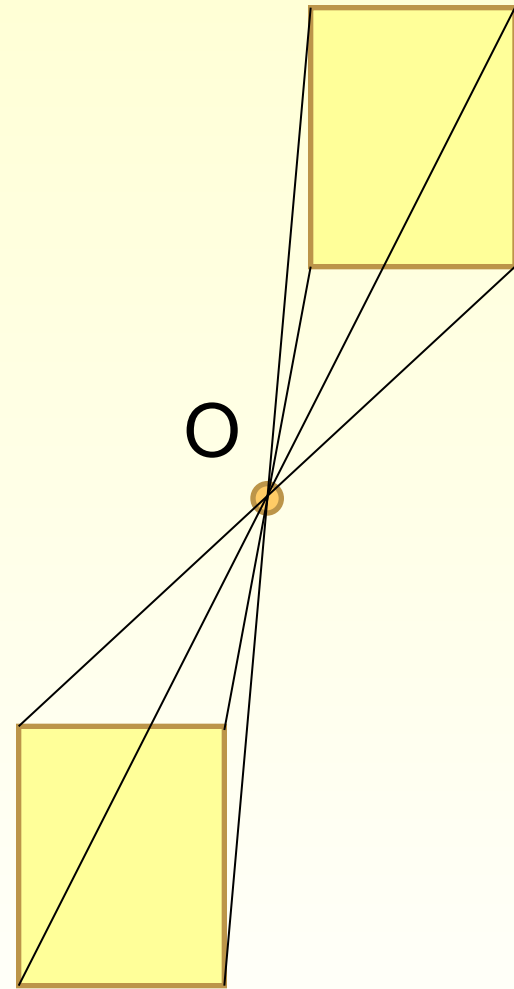
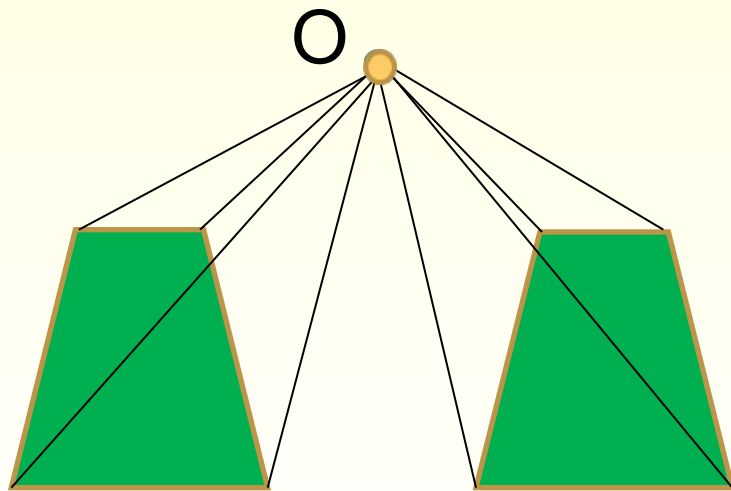
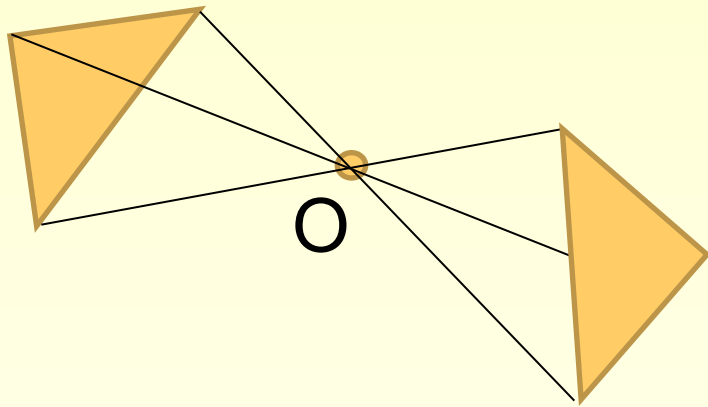
- а) точки X , X_1 і O належать одній прямій;*
- б) точки X і X_1 лежать по різні боки від точки O ;*
- в) $OX_1 = OX$.*

Назвіть точки, які симетричні відносно точки O .



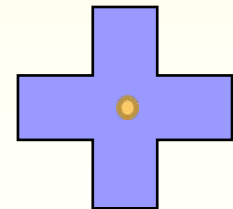
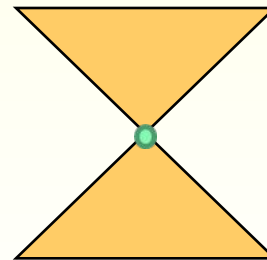
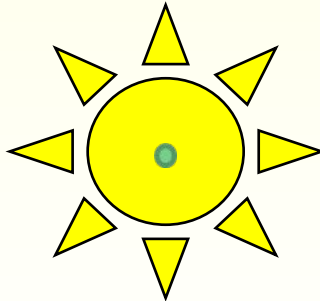
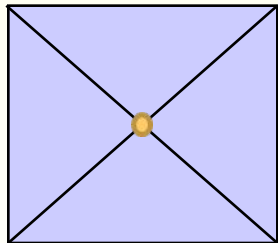
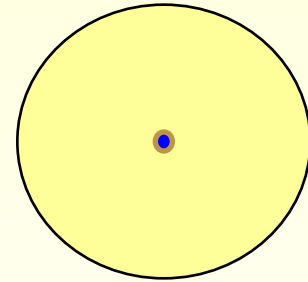
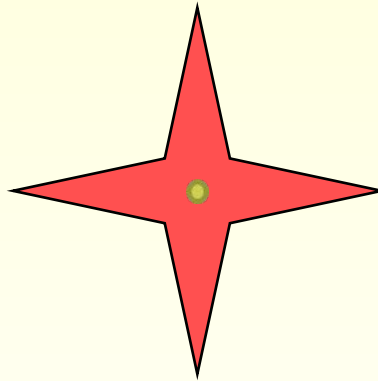
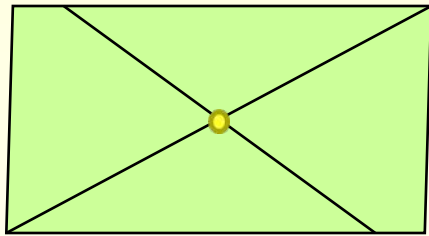
Перетворення фігури F у фігуру F_1 , при якому *кожна* точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну відносно даної точки O , називається перетворенням симетрії відносно точки O . При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними відносно точки O .

Назвіть фігури, які симетричні відносно точки O .
Відповідь обґрунтуйте.



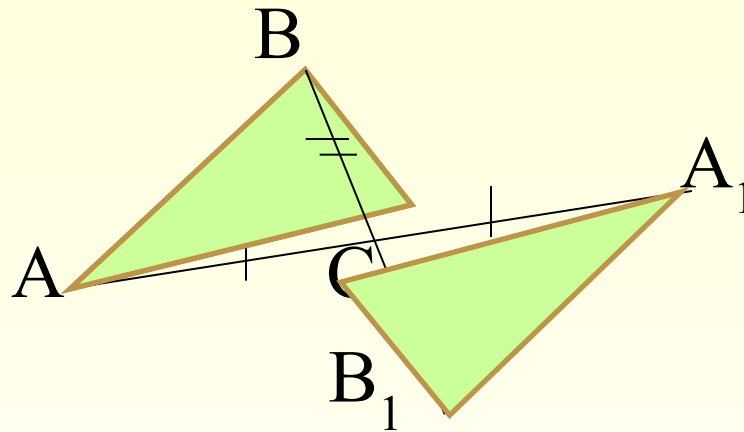
Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то вона називається центрально-симетричною, а точка O – центром симетрії.

Приклади центрально-симетричних фігур

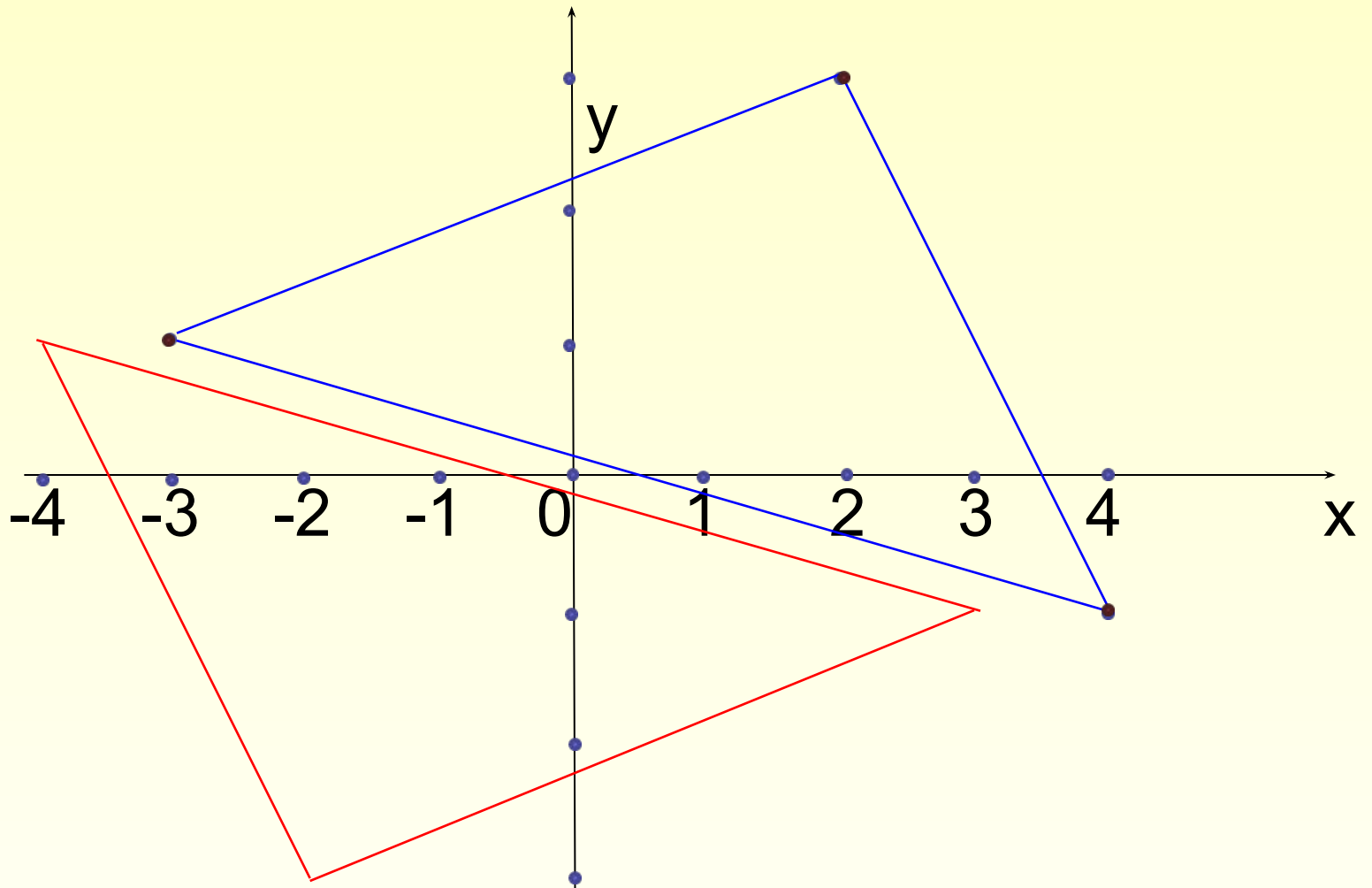


Розв'язування задач

- Дано трикутник ABC . Побудуйте фігуру, симетричну даному трикутнику відносно вершини C .



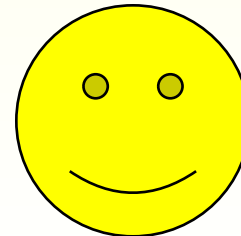
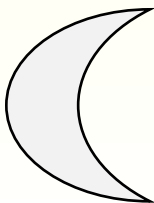
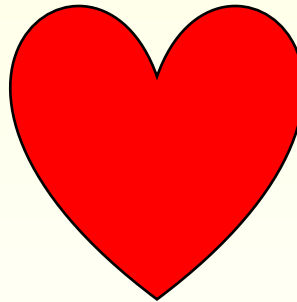
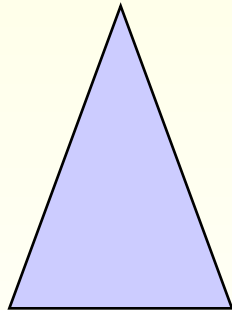
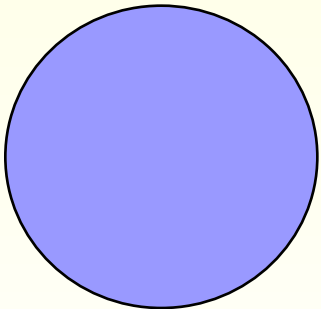
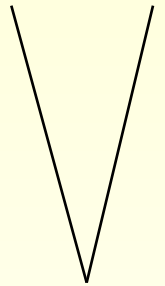
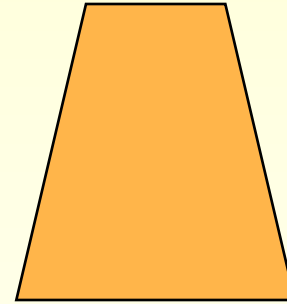
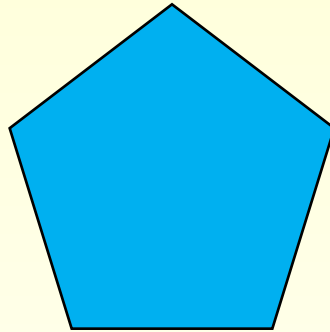
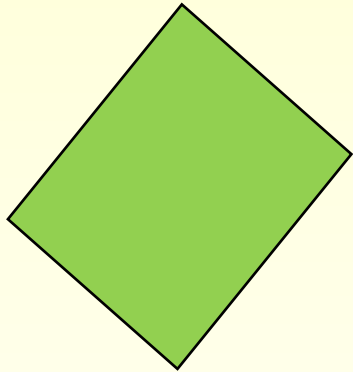
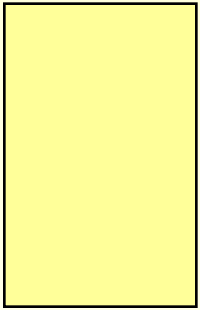
- Вершини трикутника містяться у точках $(-3; 1)$; $(2; 3)$; $(4; -1)$. Побудуйте трикутник, який симетричний даному відносно початку координат.



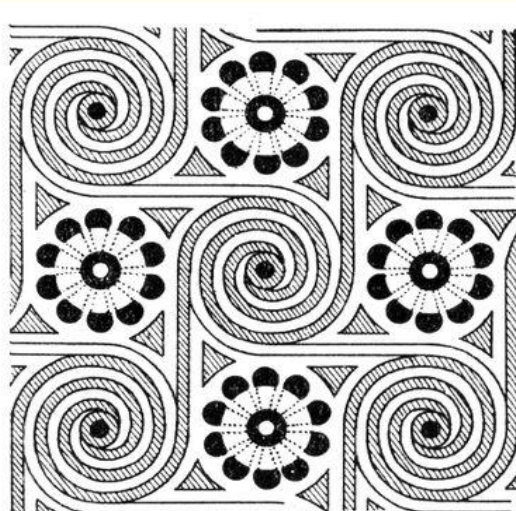
Вершини трикутника, симетричного даному відносно початку координат, знаходяться у точках $(3; -1)$; $(-2; -3)$; $(-4; 1)$.

Визначіть фігури:

- центрально-симетричні та вкажіть їх центр;
- які мають осьову симетрію та вкажіть їх вісь симетрії;
- які мають обидві симетрії.



Центральна симетрія у візерунках





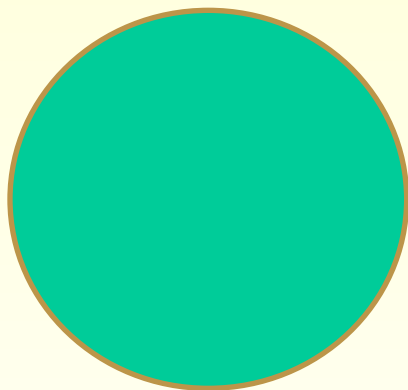
Центральна симетрія навколо нас



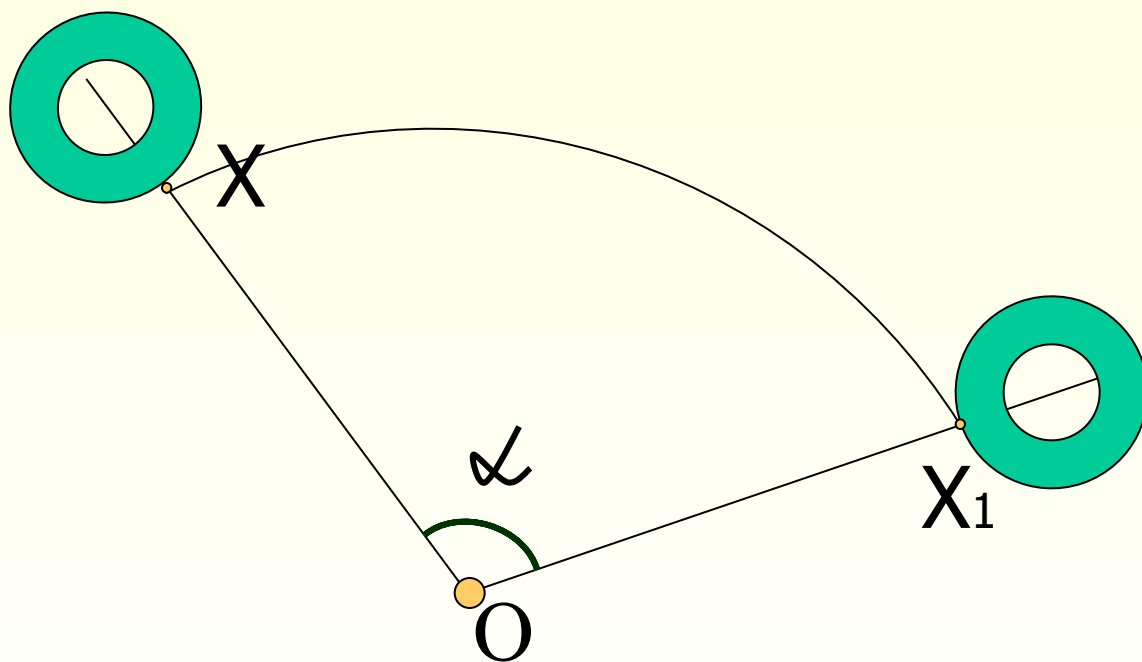
IN-027-0103 © Rafael Campillo / The Stock Market



ПОВОРОТ



Поворотом фігури F навколо точки O на кут α називається таке перетворення, при якому будь-яка точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 таку, що $OX = OX_1$ і $\angle XOX_1 = \alpha$



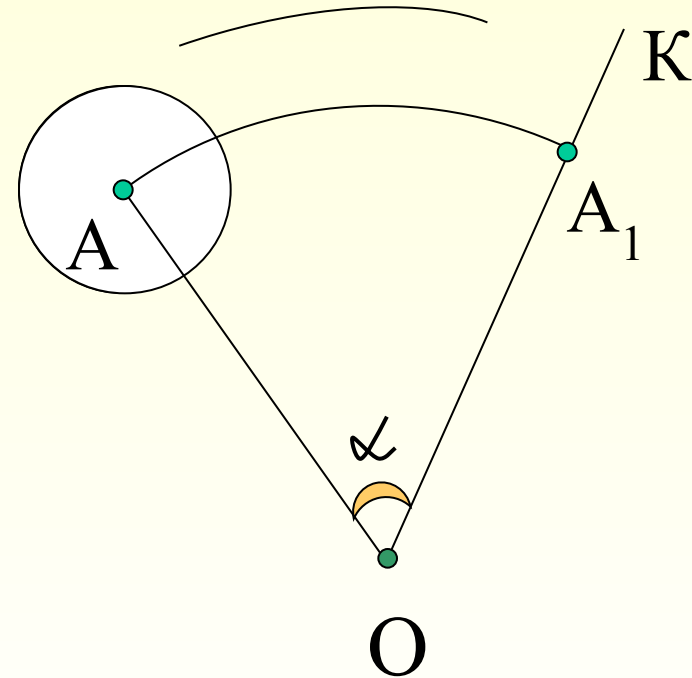
Поворот фігури задається кутом повороту та центром повороту і може здійснюватися проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою.

■ Задача.

Виконайте поворот даного круга з центром A навколо точки O на кут $\angle$ за годинниковою стрілкою.

Розв'язання.

Проведемо відрізок OA і побудуємо кут $\angle AOK = \angle$. Відкладемо на промені OK відрізок $OA_1 = OA$. Точка A_1 - центр шуканого круга, а радіус дорівнює радіусу даного круга.

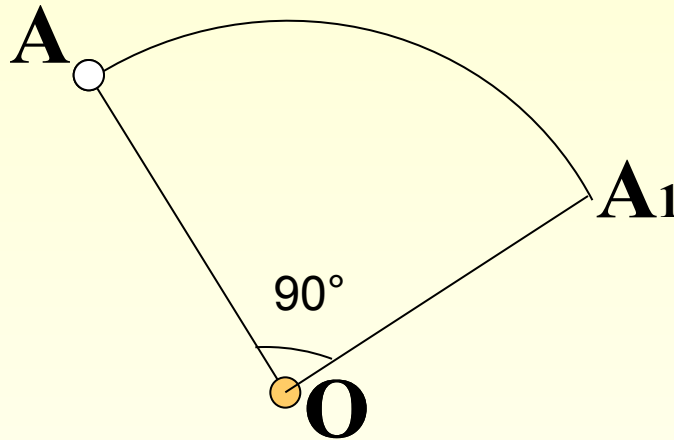


Властивості повороту

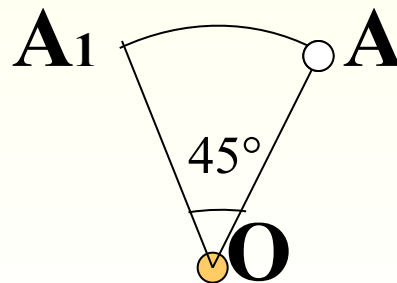
- Перетворення повороту є переміщенням.
- Центральна симетрія є поворотом на 180° .
- При повороті пряма переходить у пряму; кут — у рівний кут; відрізок — у рівний відрізок; будь-яка фігура переходить у рівну їй фігуру.
- Правильний багатокутник при повороті навколо свого центра на кут 360° переходить у себе.
- Якщо точка $B(x_1; y_1)$ є ⁿобразом точки $A(x; y)$ при повороті на 90° відносно початку координат **за годинниковою стрілкою**, то виконується умова
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y, \\ y_1 = -x; \end{array} \right. \text{ якщо проти годинникової стрілки - } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -y, \\ y_1 = x. \end{array} \right.$$

Задачі на застосування означення та властивостей повороту

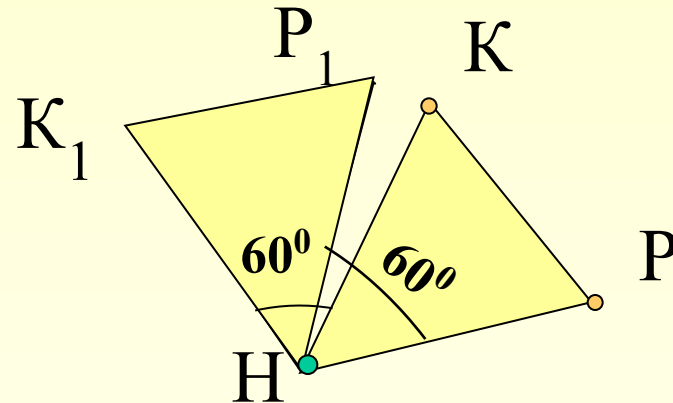
1. Виконайте поворот точки A навколо точки O на кут 90° за годинниковою стрілкою.



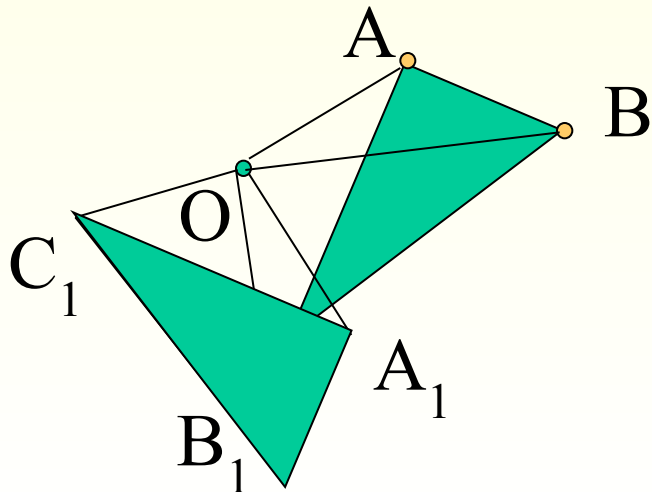
2. Виконайте поворот точки A навколо точки O на кут 45° проти годинникової стрілки.



3. Виконайте поворот трикутника НКР навколо вершини Н на кут 60° проти годинникової стрілки.

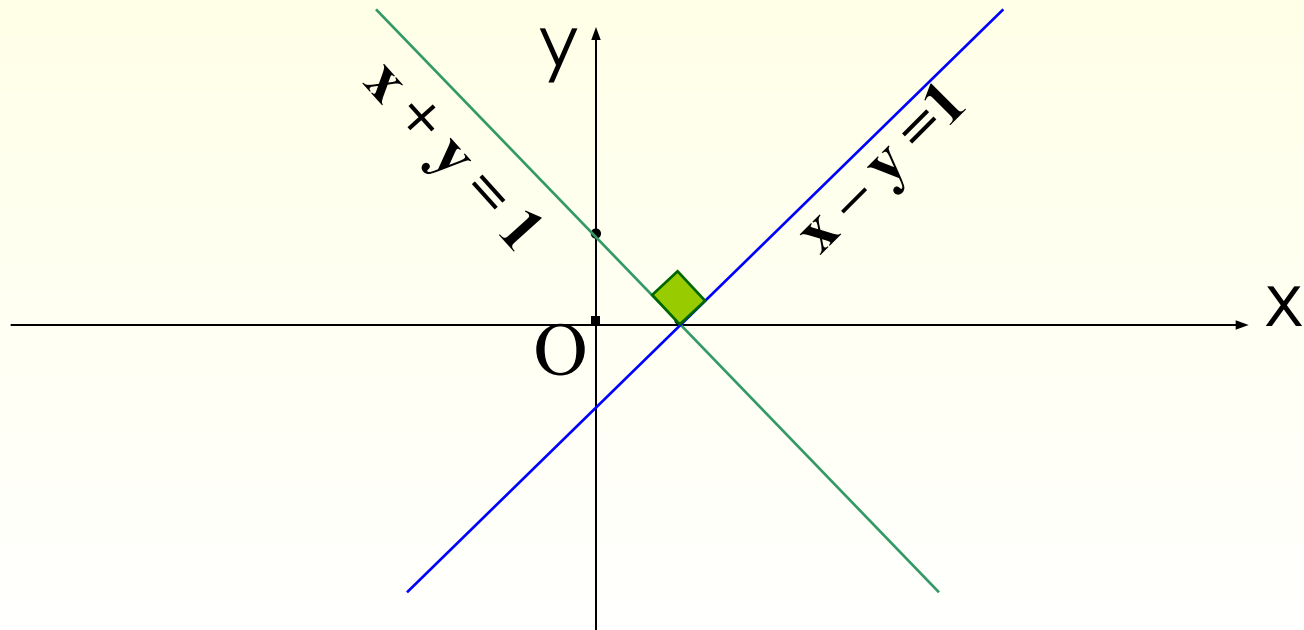


4. Виконайте поворот трикутника ABC навколо точки O на кут 90° за годинниковою стрілкою.



5. Дано пряму $x + y = 1$. Запишіть рівняння прямої, яка утвориться з даної внаслідок її повороту навколо початку координат на кут 90° за годинниковою стрілкою.

Розв'язання. За властивістю повороту (5) довільна точка $A(x; y)$, що належить прямій, при повороті на 90° відносно початку координат за годинниковою стрілкою відобразиться у точку $A_1(x_1; y_1)$, де $x_1 = y$ і $y_1 = -x$. Тому рівняння шуканої прямої матиме вид: $x - y = 1$.



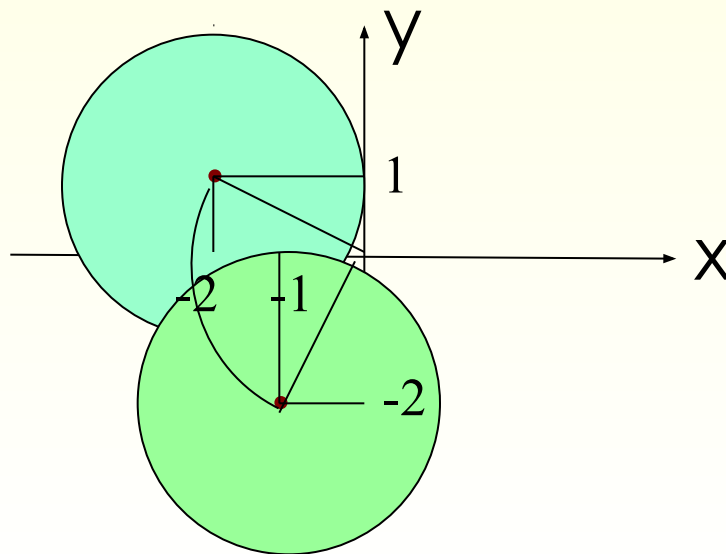
6. Дано коло $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Запишіть рівняння кола, яке утворюється з даного внаслідок його повороту навколо початку координат на кут 90° проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Радіус даного кола 2, а центр – точка $(-2; 1)$. При повороті довжина радіуса не змінюється. Внаслідок повороту даного кола навколо початку координат на кут 90° проти годинникової стрілки координати центра нового кола визначатимемо згідно властивості (5): $x_1 = -y$, $y_1 = x$, тобто $x_1 = -1$, $y_1 = -2$.

Отже,

рівняння шуканого кола:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$



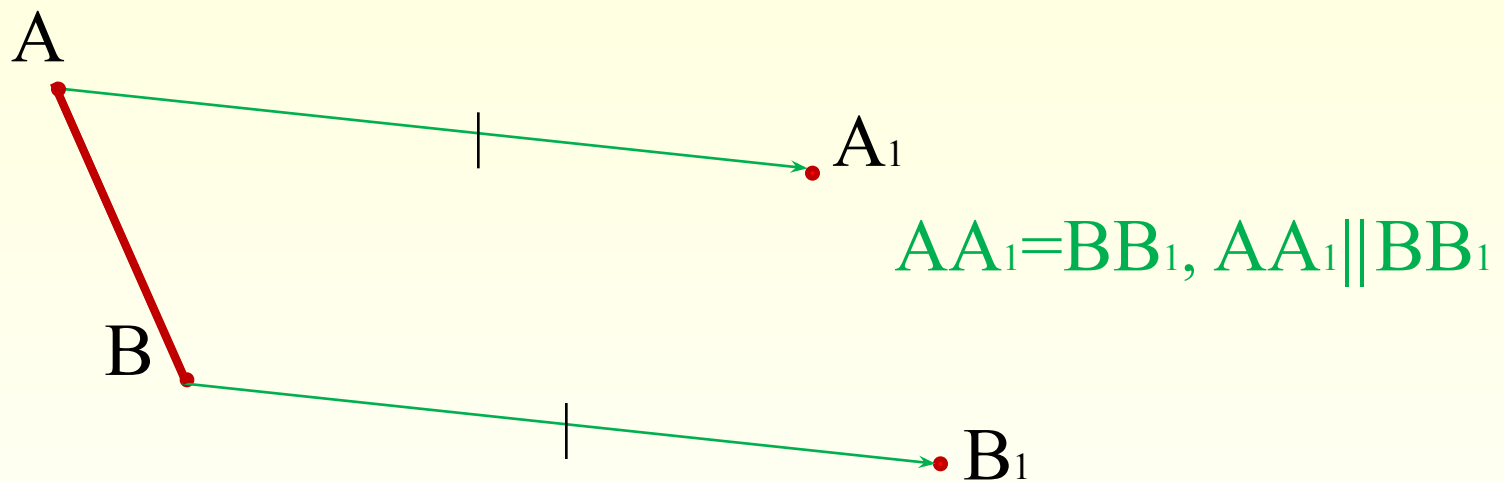
Задачі для самостійного розв'язування

1. Виконайте поворот точки К навколо даного центра О на кут 50^0 проти годинникової стрілки.
2. Виконайте поворот відрізка АВ навколо точки О на кут 30^0 за годинниковою стрілкою.
3. Виконайте поворот круга з центром С навколо точки О на кут 120^0 проти годинникової стрілки.
4. Побудуйте фігуру, в яку переходить трикутник АВС при повороті його навколо вершини В на кут 60^0 за годинниковою стрілкою.
5. Виконайте поворот трикутника АВС навколо даного центра О на кут 45^0 проти годинникової стрілки.
6. Запишіть рівняння кола, яке утворюється з кола $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ внаслідок його повороту навколо початку координат на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.

Паралельне перенесення

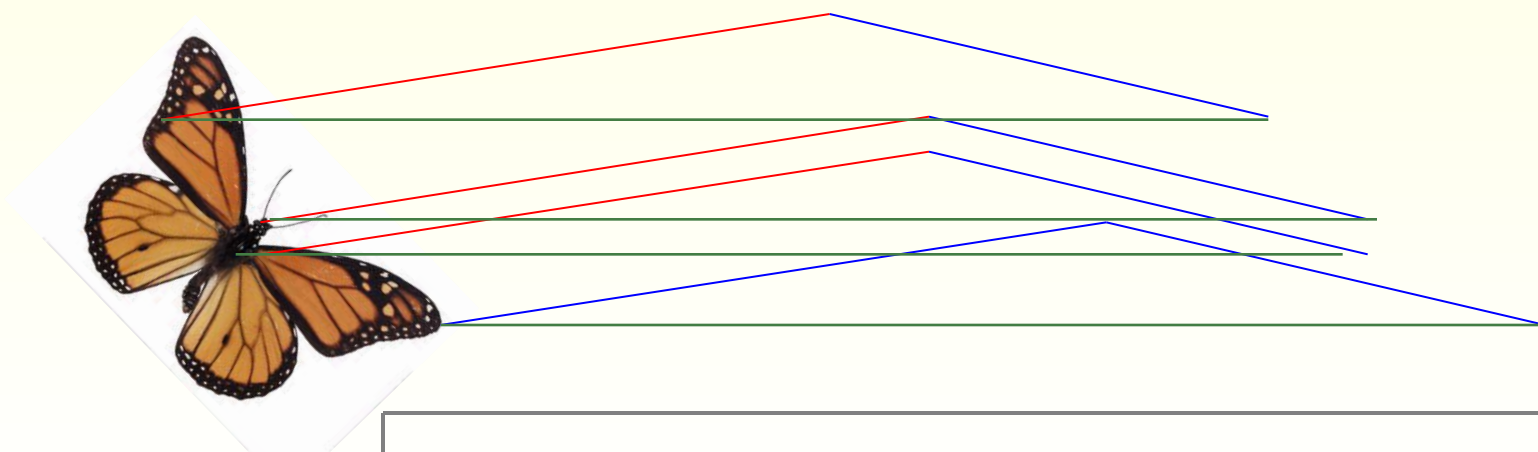
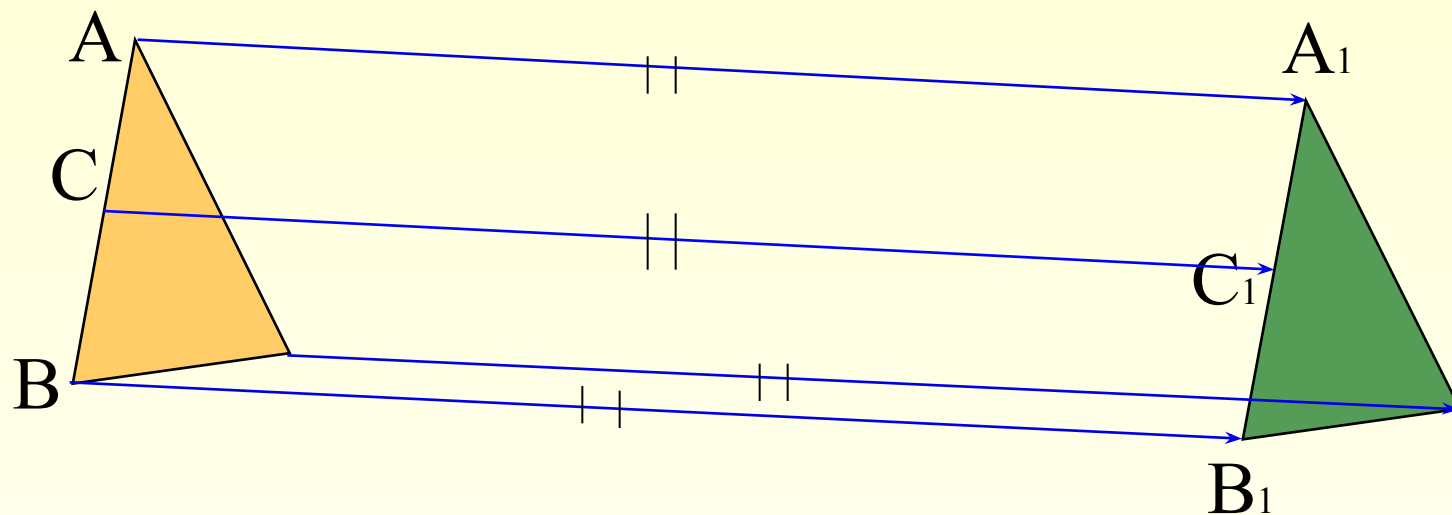


Паралельним перенесенням називається перетворення, при якому дві довільні точки A і B фігури прообразу перетворюються на точки A_1 і B_1 фігури образу так, що $AA_1 = BB_1$ і $AA_1 \parallel BB_1$ (або точки A, A_1, B, B_1 лежать на одній прямій).



Чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм (за ознакою паралелограма). Тому $AB \parallel A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$.

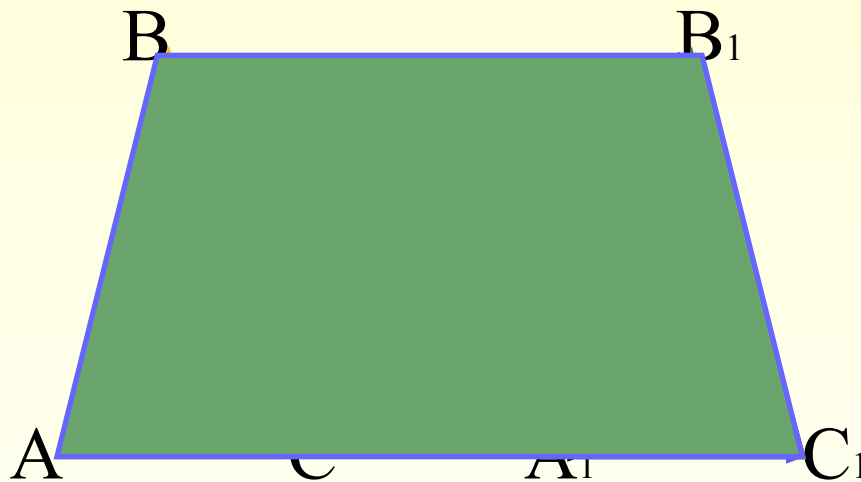
При паралельному перенесенні всі точки фігури переміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту ж відстань.



Властивості паралельного перенесення

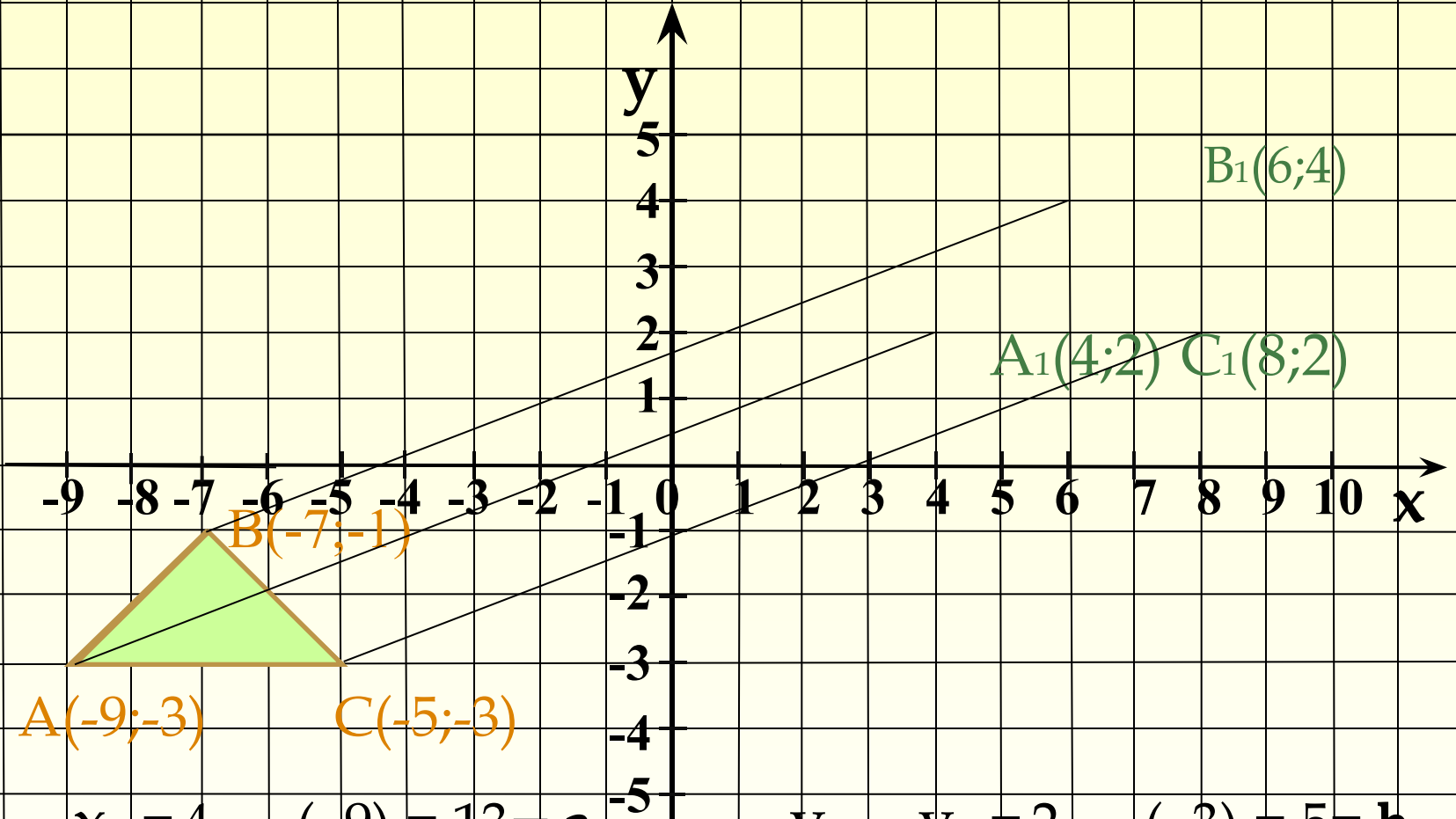
1. *Паралельне перенесення є рух.*
2. *При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе).*
3. *Кути між прямими зберігаються.*
4. *Якщо точка C належить відрітку AB , то при паралельному перенесенні у відповідні точки A_1, B_1, C_1 точка C_1 належатиме відрітку A_1B_1 .*
5. *Композиція двох паралельних перенесень є паралельне перенесення.*
6. *Існує єдине паралельне перенесення, що переводить точку A у точку A_1 .*

Задача 1. Накресліть трикутник ABC . Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, який утворений з даного паралельним перенесенням так, щоб утворилася трапеція ABB_1C_1



При паралельному перенесенні точки A , B , C трикутника переміщуються так, що $BB_1 = AA_1 = CC_1$ і $BB_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$.

Паралельне перенесення на координатній площині



$$x_{A_1} - x_A = 4 - (-9) = 13 = a$$

$$y_{A_1} - y_A = 2 - (-3) = 5 = b$$

$$x_{B_1} - x_B = 6 - (-7) = 13 = a$$

$$y_{B_1} - y_B = 4 - (-1) = 5 = b$$

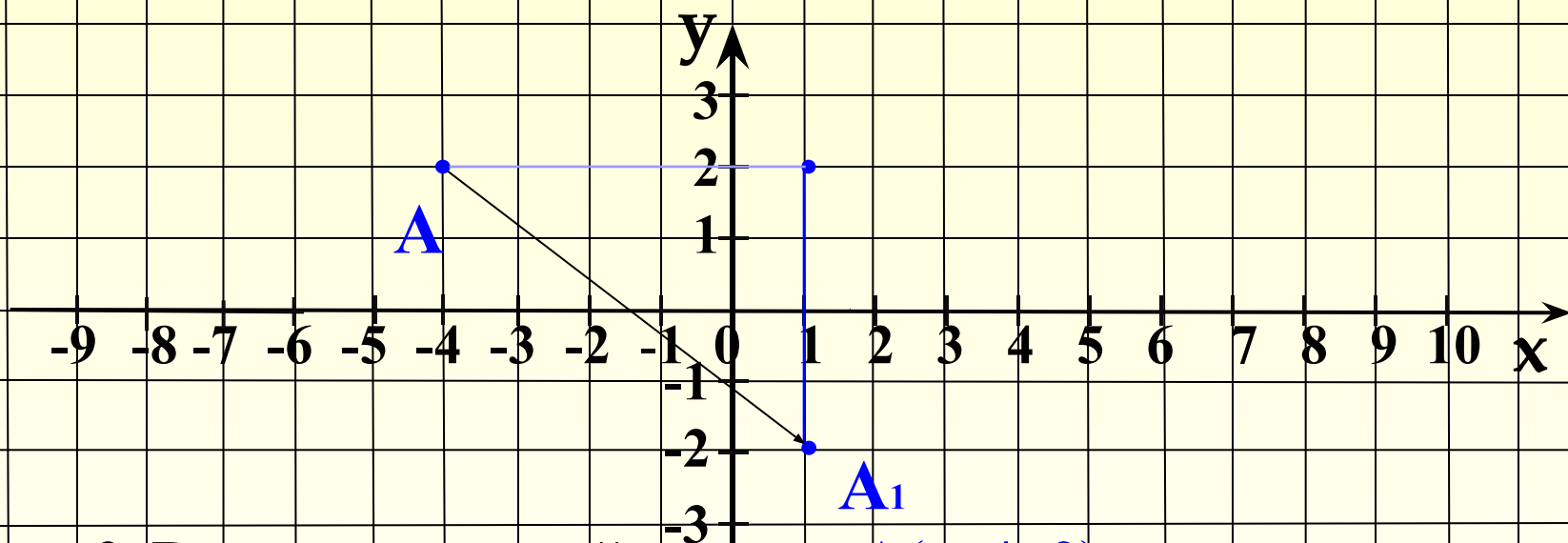
$$x_{C_1} - x_C = 8 - (-5) = 13 = a$$

$$y_{C_1} - y_C = 2 - (-3) = 5 = b$$

Паралельним перенесенням називається

перетворення, при якому довільна точка $(x; y)$ фігури-прообразу переходить у точку $(x+a; y+b)$ фігури-образу.

Формули паралельного перенесення: $x_1 = x+a$, $y_1 = y+b$



Задача 2. В яку точку перейде точка $A(-4; 2)$ при паралельному перенесенні, яке задається формулами **$x_1 = x + 5$, $y_1 = y - 4$** ?

Розв'язання: $A(-4; 2) \rightarrow A_1(x_1; y_1); x = -4, y = 2; a = 5, b = -4;$

$$x_1 = -4 + 5 = 1, y_1 = 2 - 4 = -2.$$

Відповідь: $A_1(1; -2).$

Задача 3. При паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x + 8$, $y_1 = y - 1$, точка В переходить у точку В₁. Знайдіть координати точки В, якщо В₁(-5; -4).

Розв'язання: $B(x; y) \longrightarrow B_1(-5; -4)$.

$x_1 = -5$, $y_1 = -4$. Підставимо ці значення у формули заданого паралельного перенесення: $-5 = x + 8$, $-4 = y - 1$;

$$x = -13, \quad y = -3.$$

Відповідь: (-13; -3) – координати точки В.

Задача 4. Запишіть формули паралельного перенесення, яке точку С(-4; 7) відображає у точку С₁(8; -3).

Розв'язання: $C(-4; 7) \longrightarrow C_1(8; -3)$.

Підставимо у формули паралельного перенесення $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$ відповідні координати точок С і С₁:

$$\begin{aligned} 8 &= -4 + a, & -3 &= 7 + b, \\ a &= 12, & b &= -10. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = x + 12$, $y_1 = y - 10$.

Задача 5. При паралельному перенесенні точка $A(3; -7)$, відображається у точку $A_1(-5; 1)$. В яку точку відображається точка $B(-8; 6)$?

Розв'язання: $A(3; -7) \longrightarrow A_1(-5; 1)$,
 $B(-8; 6) \longrightarrow B_1(x_1; y_1)$.

Підставимо у формули паралельного перенесення $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$ відповідні координати точок A і A_1 :

$$-5 = 3 + a, \quad 1 = -7 + b; \quad a = -8, \quad b = 8.$$

Паралельне перенесення, яке відображає точку A у точку A_1 , задається формулами: $x_1 = x - 8$, $y_1 = y + 8$. Це ж саме паралельне перенесення відображає точку B у точку B_1 .

Підставимо координати точки B у вище вказані формули :

$$x_1 = -8 - 8 = -16, \quad y_1 = 6 + 8 = 14.$$

Відповідь: $(-16; 14)$ – координати точки B_1 .

Задача 6. Пряма $3x - 2y = 1$ після паралельного перенесення проходить через точку $(0; 3)$. Запишіть рівняння прямої після перенесення.

$$3x - 2y =$$

x	1	3
y	1	4

y

4

3

2

1

-1

$$3x - 2y + 6 =$$

x	0	-2
y	3	0

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 x

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ – рівняння шуканої прямої. У рівнянні прямої $3x - 2y = 1$ виразимо y через x : $y = 1,5x - 0,5$, де $1,5$ – кутовий коефіцієнт прямої. У паралельних прямих кутові коефіцієнти рівні, тому $k = 1,5$. Оскільки після перенесення пряма проходить через точку $(0; 3)$, то маємо рівняння: $3 = 1,5 \cdot 0 + b$, звідки $b = 3$. Рівняння шуканої прямої $y = 1,5x + 3$ перепишемо у загальному вигляді: $1,5x - y + 3 = 0$, або $3x - 2y + 6 = 0$.

Відповідь: $3x - 2y + 6 = 0$.

Самостійна робота

1. В яку точку перейде точка $A(3; -2)$ при паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x+2$, $y_1 = y-3$?
2. Запишіть формули паралельного перенесення, яке точку $M(-1; 6)$ відображає у точку $M_1(7; 2)$.
3. При паралельному перенесенні точка $K(1;5)$ відображається у точку $K_1(-3;7)$. В яку точку відображається точка $P(6; -4)$?
4. Центр кола $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ при паралельному перенесенні перейшов у точку $(2; -10)$. Запишіть формули цього паралельного перенесення.
5. (додаткова задача) Пряма $2x - y = 4$ після паралельного перенесення проходить через точку $(-1;3)$. Запишіть рівняння прямої після перенесення.