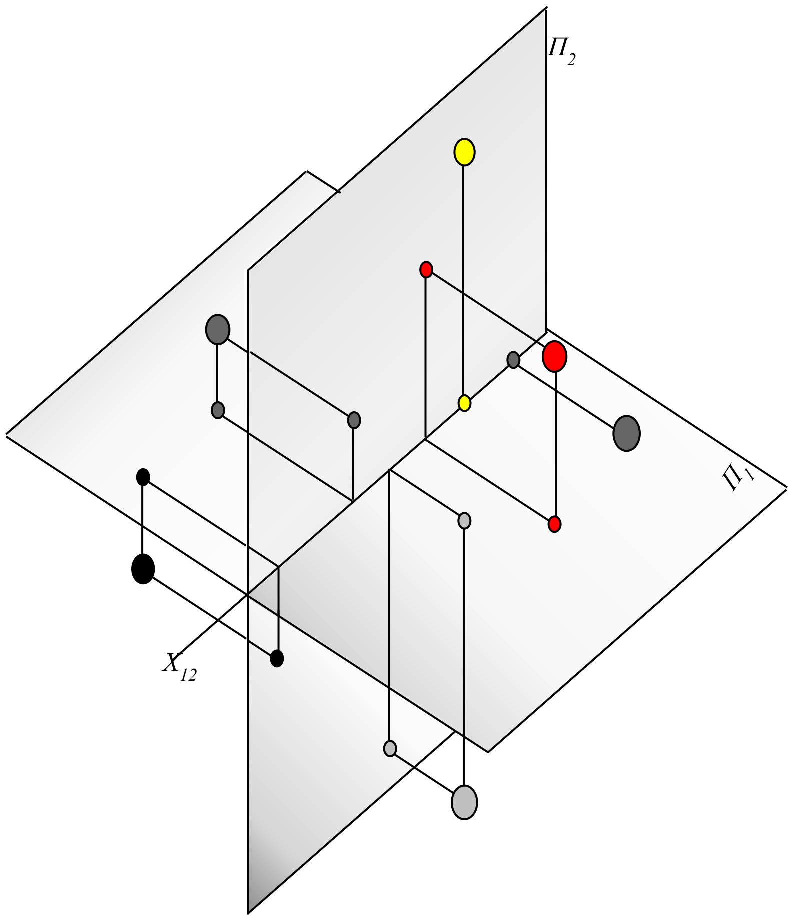
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
кафедра начертательной геометрии и инженерной графики

Начертательная геометрия

Тема 1
Методы проецирования
Проекции точки
Проекции прямой

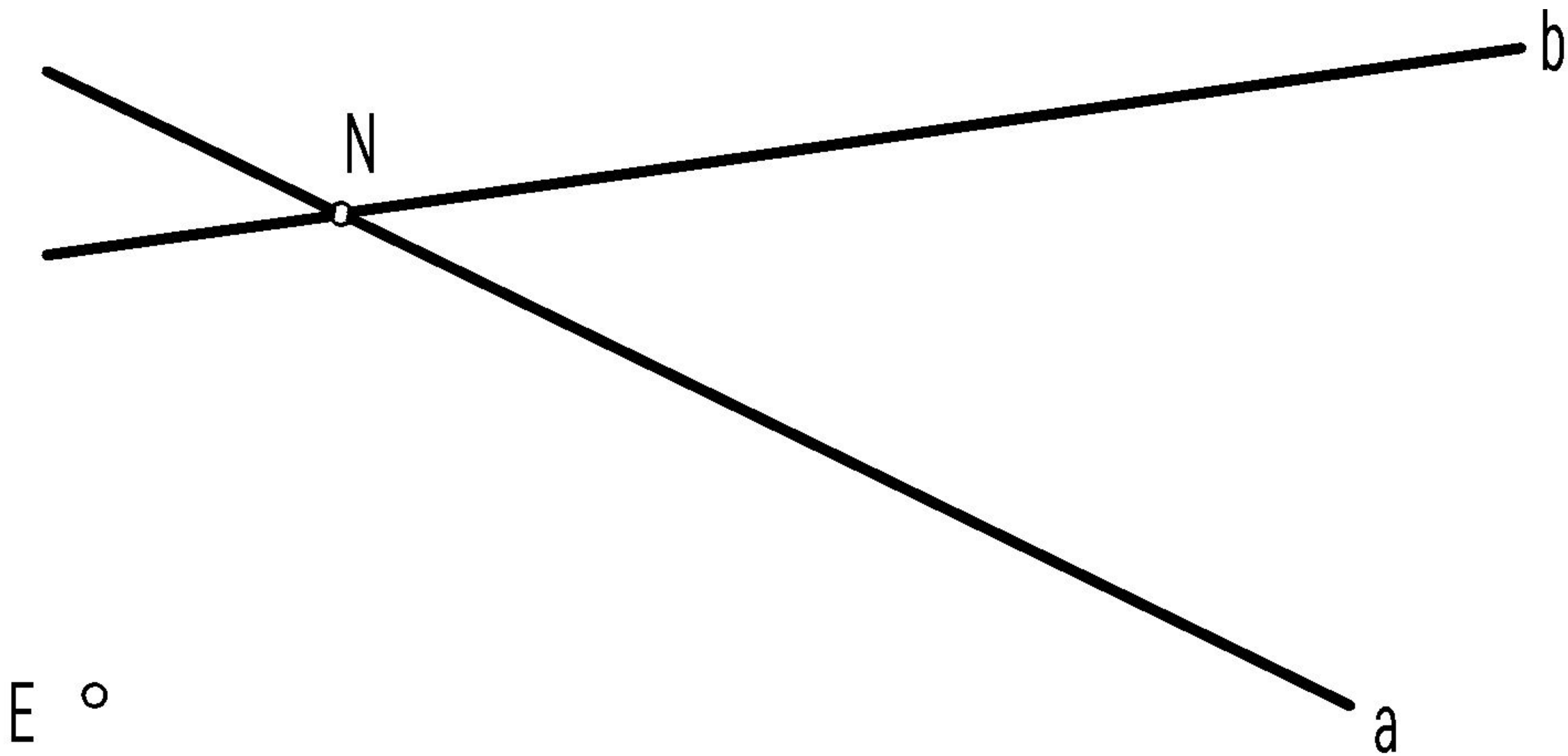


- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

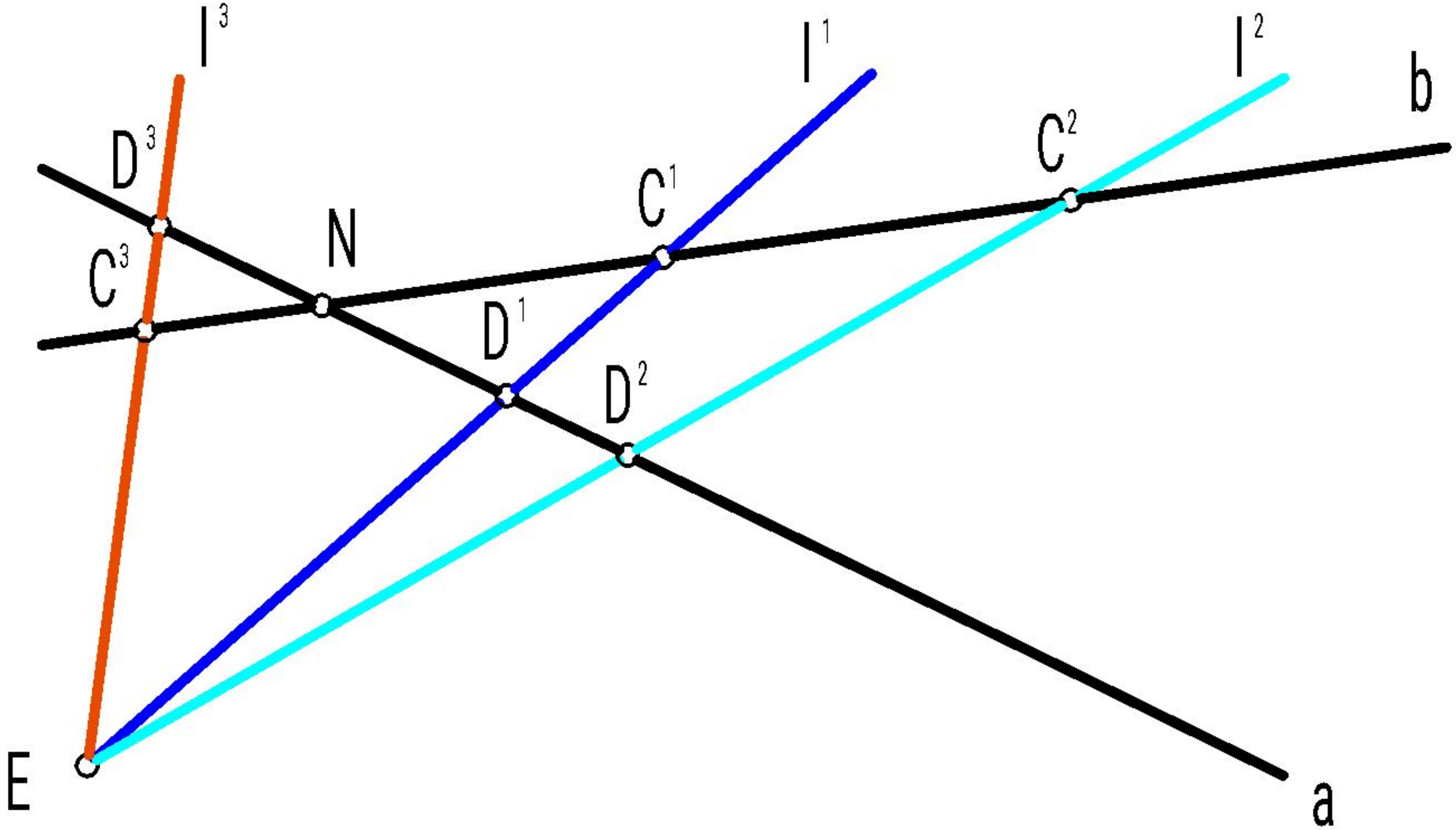
Базовые геометрические элементы начертательной геометрии

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь. Толщины и объема нет.

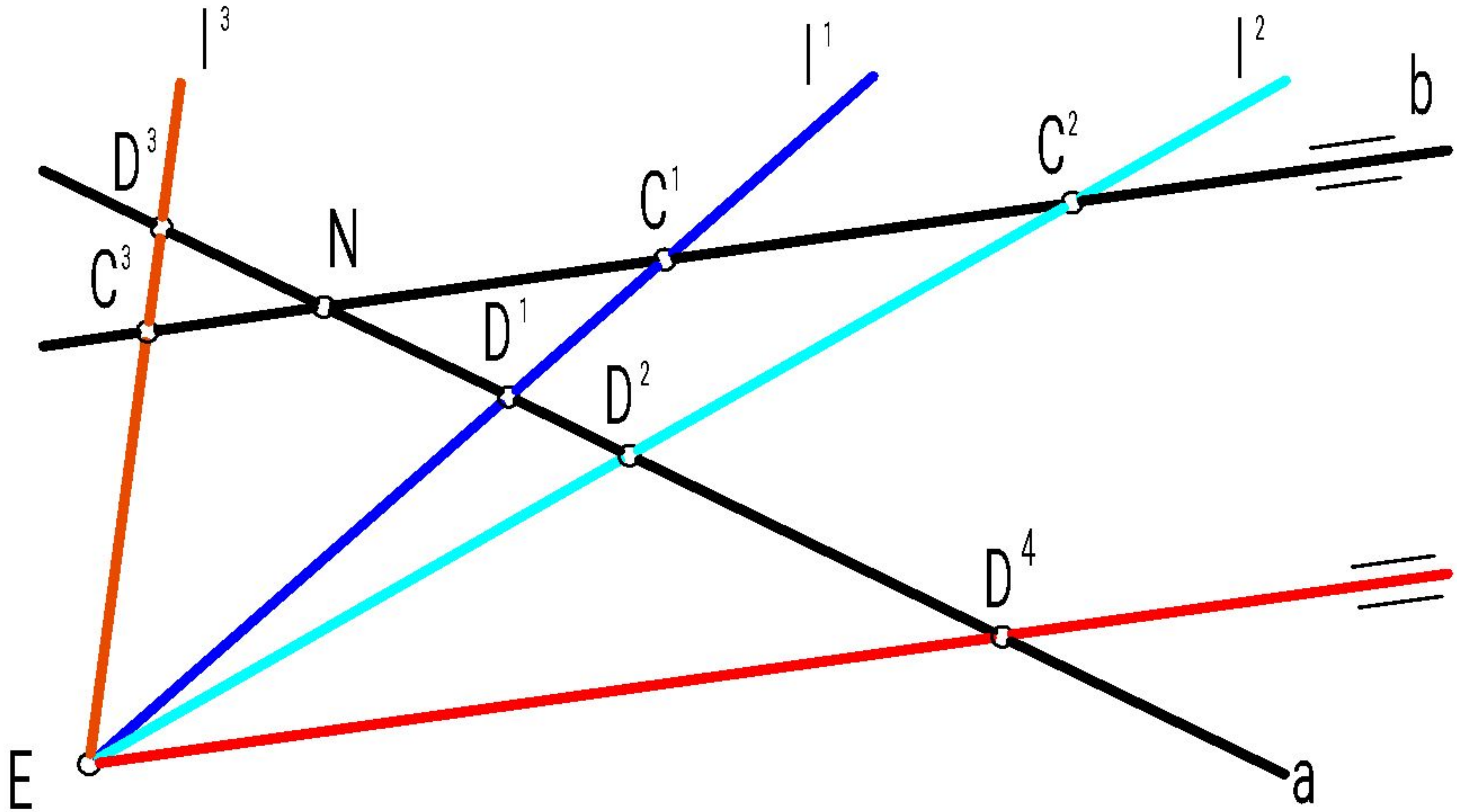
Проективное пространство



В плоскости заданы две пересекающиеся прямые a и b и точка E.



В этой же плоскости через точку E проведем прямые l^1,l^2, l^3 пересекающие прямые a и b.
в точках D^1, D^2, D^3 и C^1, C^2, C^3 соответственно.
В результате получаем однозначное соответствие
точек D^1, D^2, D^3 прямой a точкам C^1, C^2, C^3 прямой b.



Через точку E проведем прямую l^4 параллельно прямой b.

$l^4 \cap a = D^4$; $l^4 \parallel b \Rightarrow l^4 \not\cap b$

Точке D^4 прямой a нет соответствующей точки C^4 прямой b.

Евклидово пространство неоднородно

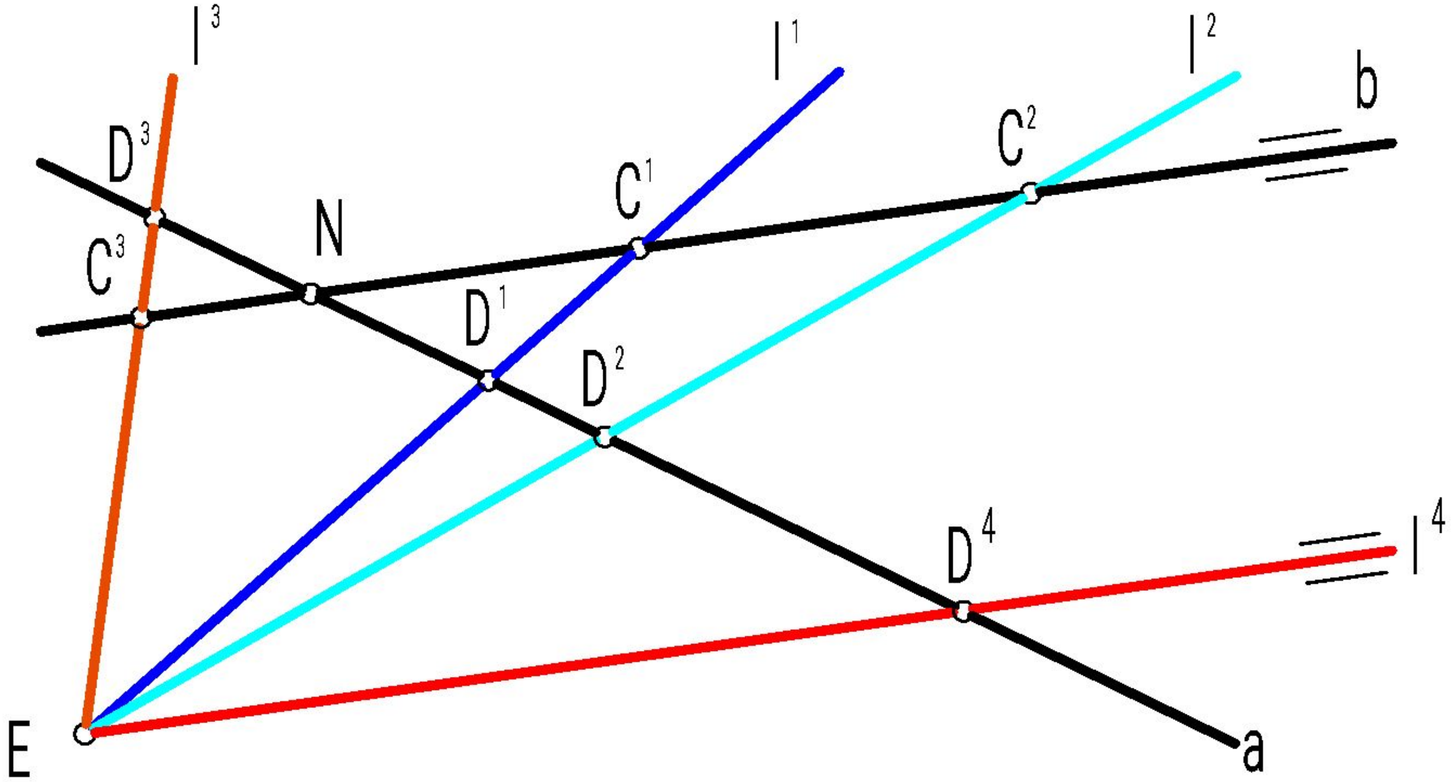
Для устранения неоднородности Евклидова пространства

условно принято,

что параллельные между собой прямые ***пересекаются*** *в бесконечно удаленной точке F^{∞} -*

несобственной точке пространства.

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m \cap n = F^{\infty})$$



Тогда, если $l^4 \parallel b$, то $l^4 \cap b = C^{\infty}$.

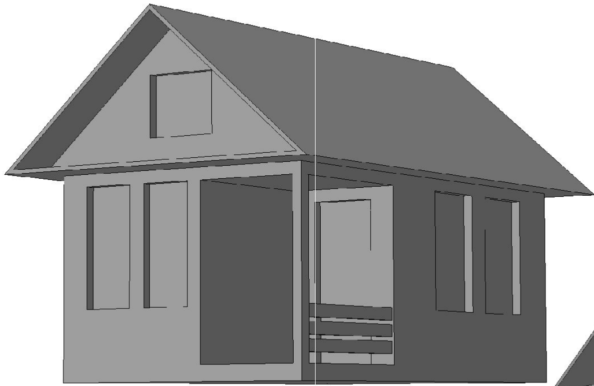
Следовательно, точке D^4 прямой a однозначно соответствует несобственная точка C^{∞} прямой b.

Евклидово пространство становится однородным.

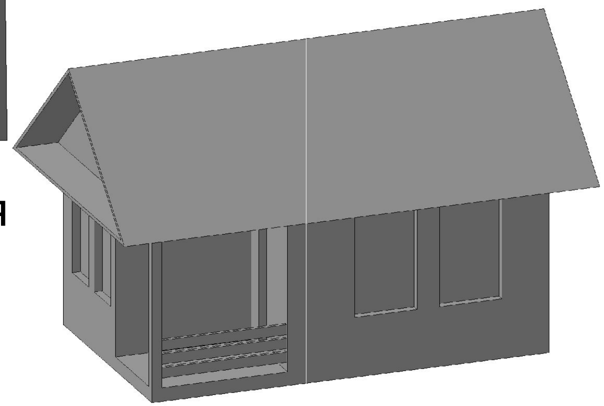
Евклидово пространство, дополненное несобственными элементами,

называют <u>проективным</u>.

Метод проецирования



Перспективная проекция

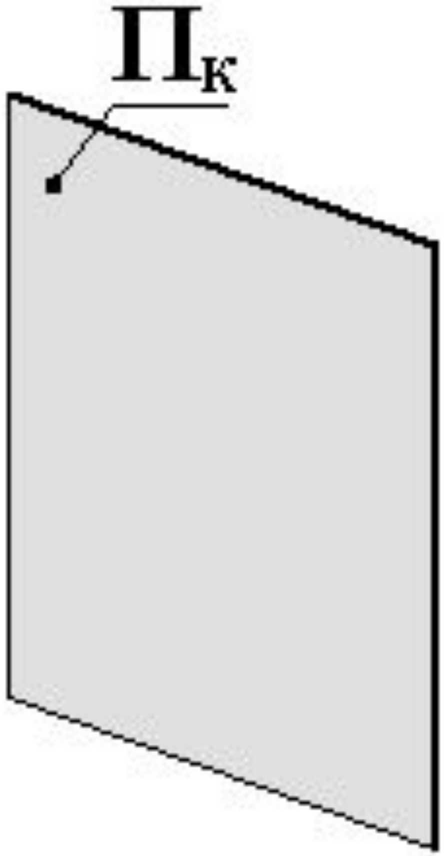


Аксонометрическая проекция

Ортогональные проекции

Все изображения разные, но их объединяет то, что в основе их построения лежит один и тот же метод – **метод проецирования.**

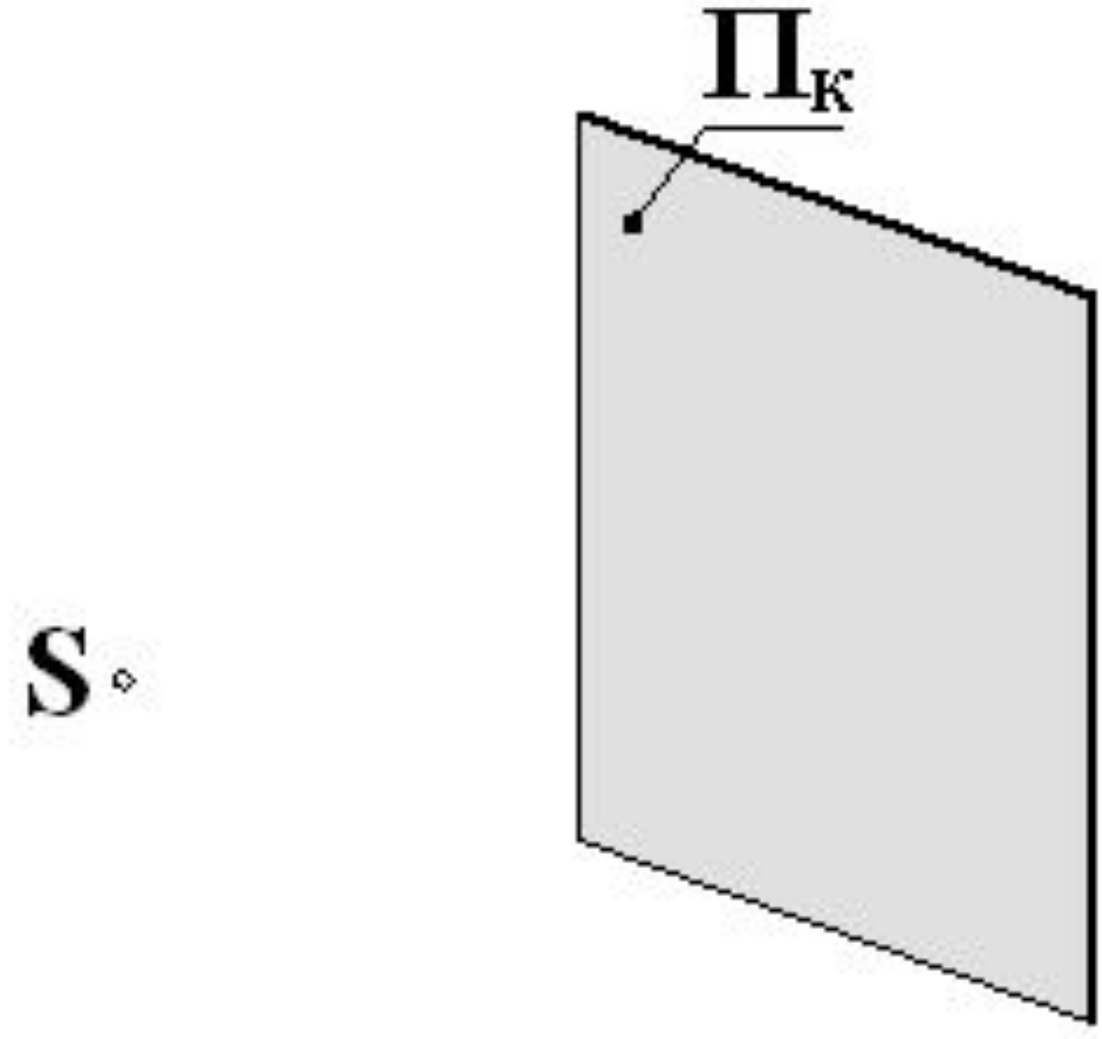
Все изображения, построенные на основе метода проецирования, называются проекционными



Задаем произвольную плоскость $П_к$

$П_к$ – плоскость проекций

k – порядковый номер плоскости, k =1, 2, 3, …, n



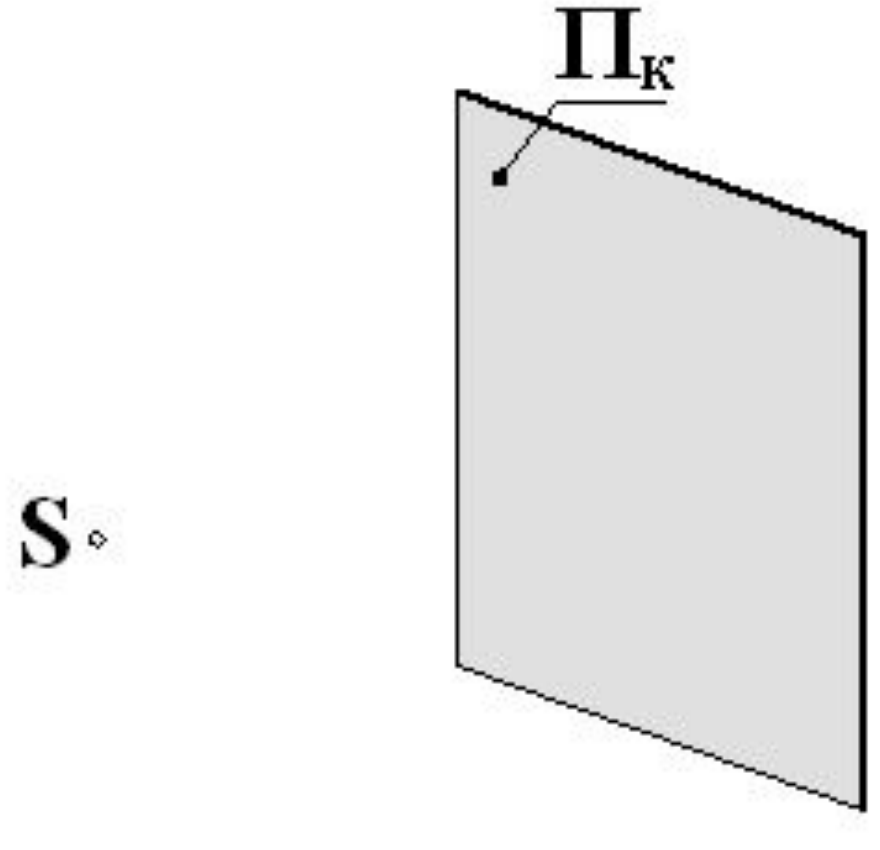
Задаем произвольную точку S

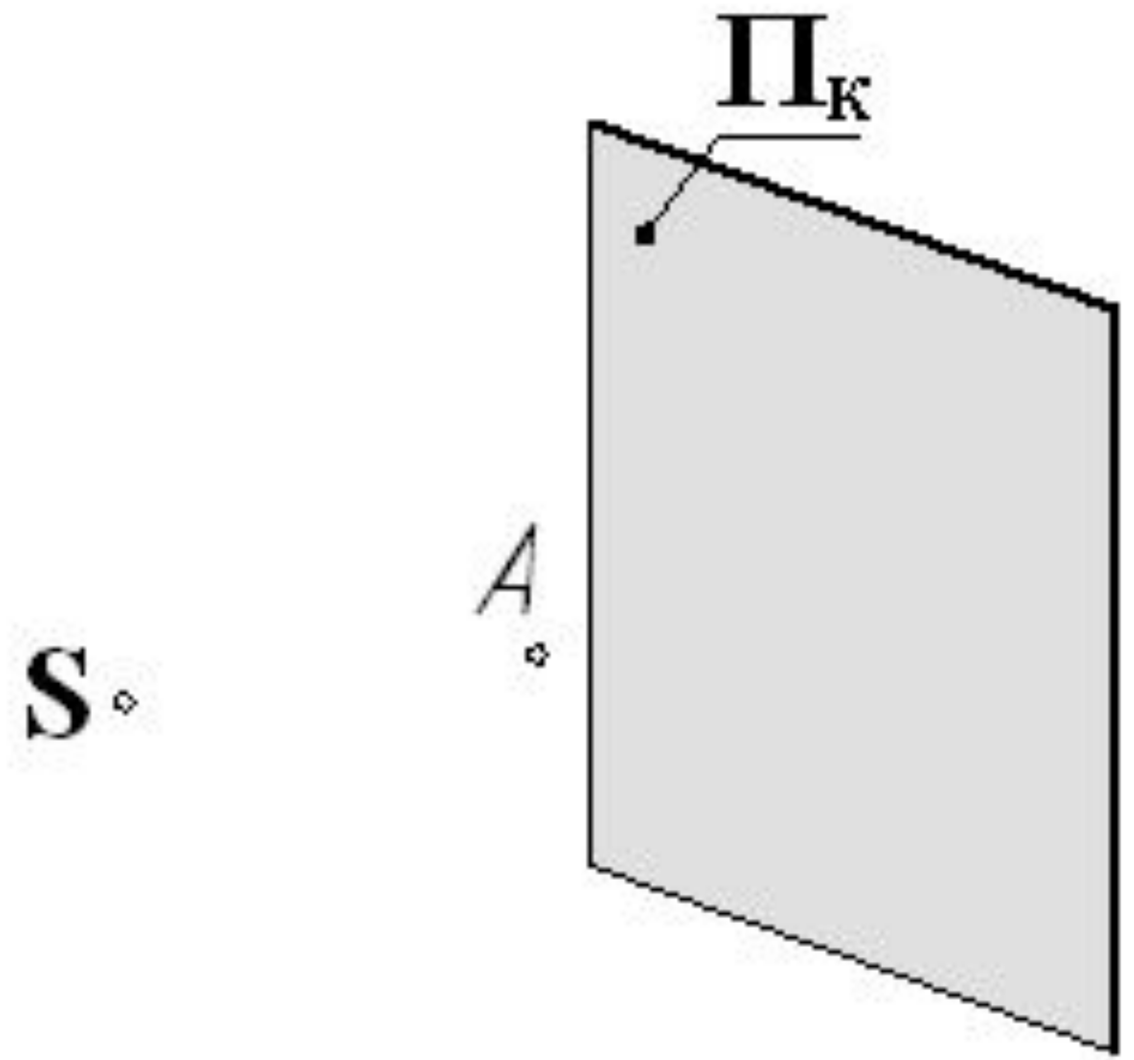
S – центр проецирования

Аппарат проецирования

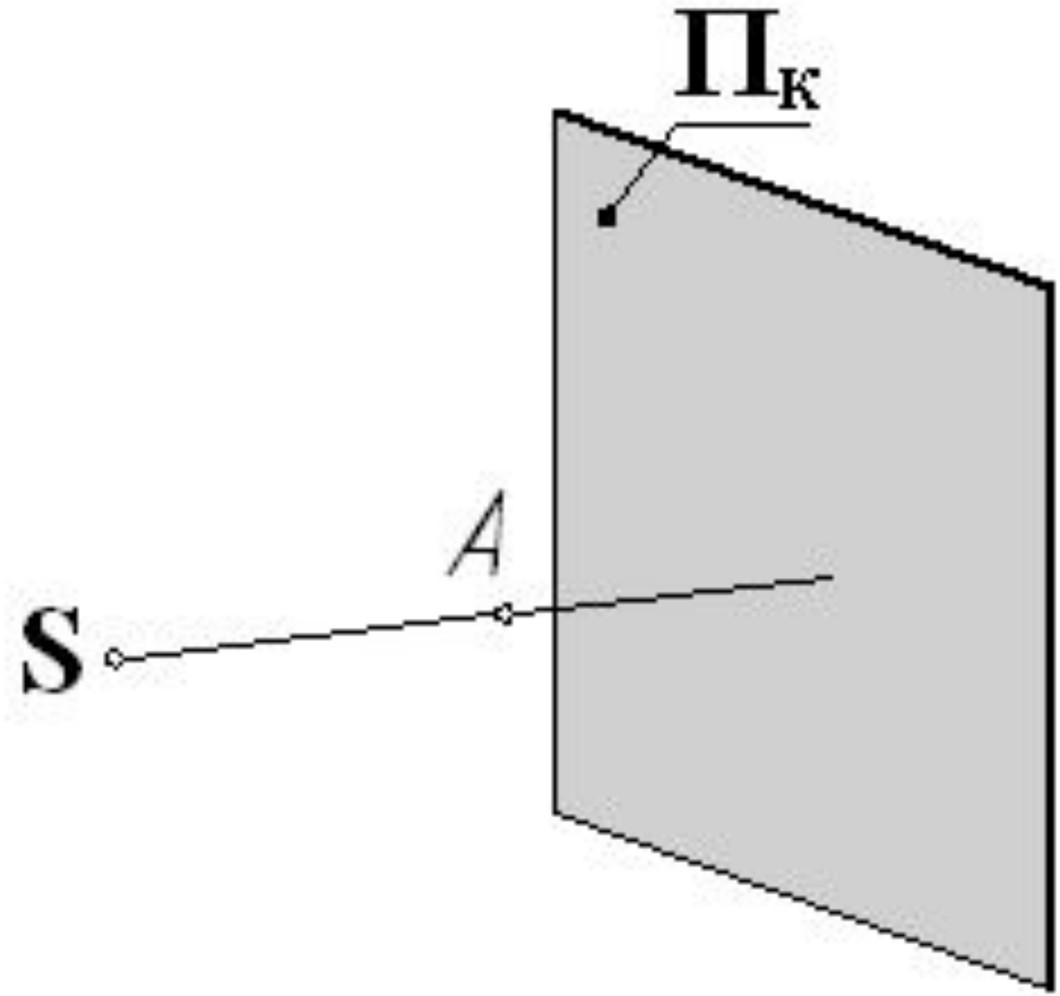
$П_к$ – плоскость проекций

S – центр проецирования



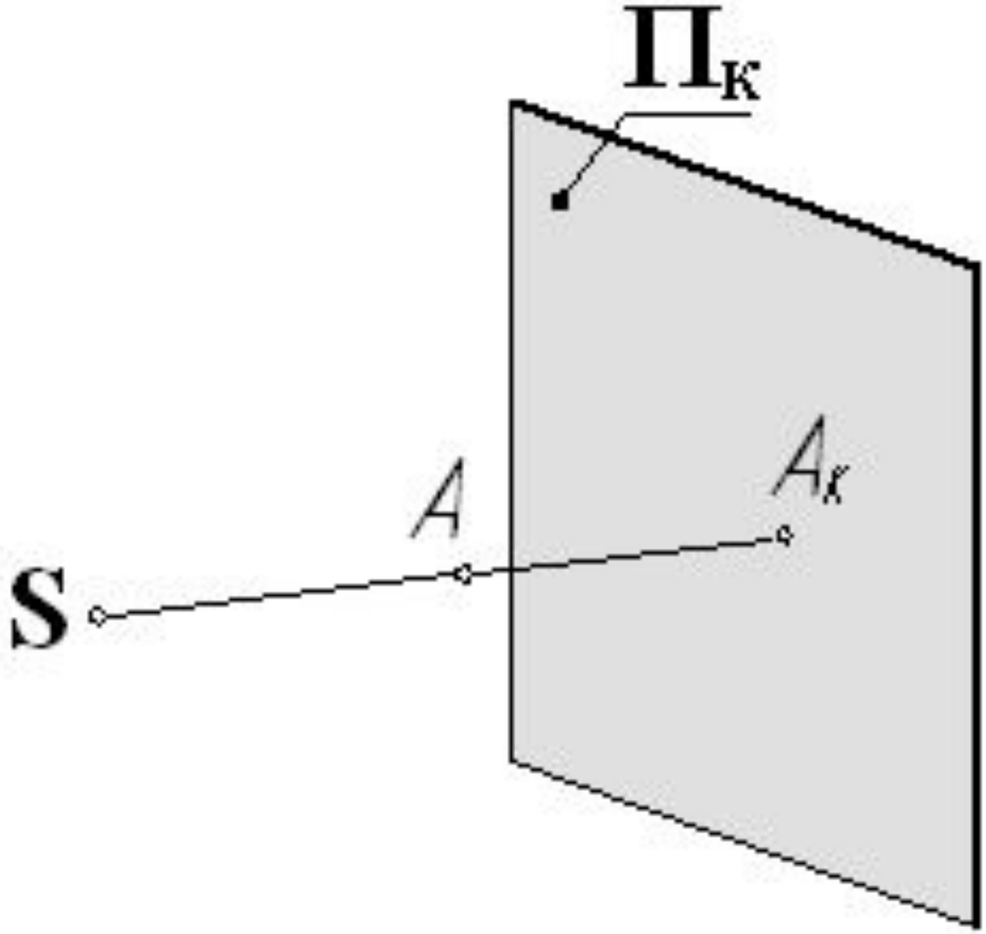


В качестве объекта взята произвольная точка **A**



Для получения изображения точки *A* на плоскости проекций $\Pi_к$ проведем из центра проецирования **S** прямую ***SA*.**

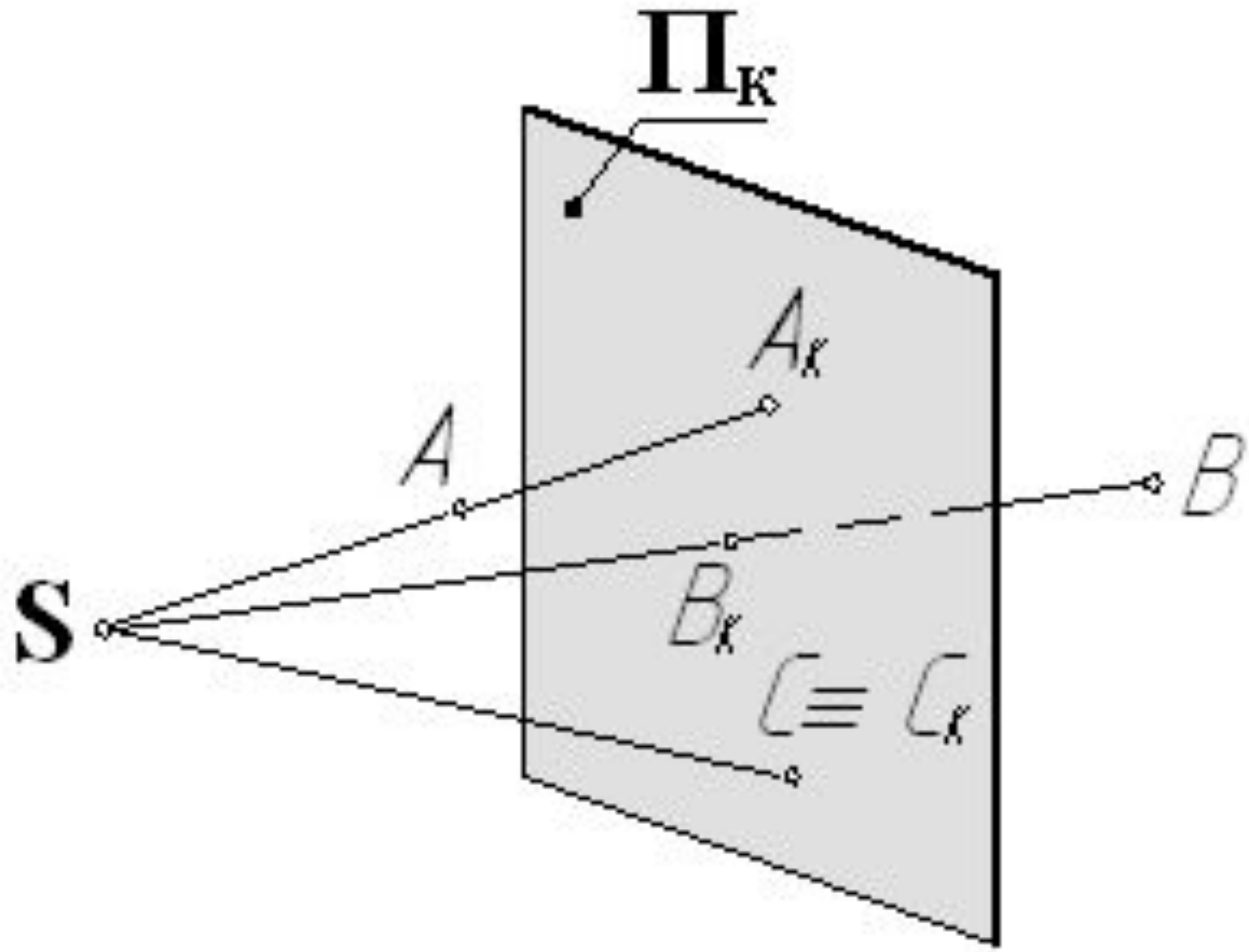
S*A* – проецирующая прямая (луч)



Определим точку пересечения проецирующей прямой **SA** с выбранной плоскостью проекций $\mathbf{П_к}$.

$$SA \cap П_к = A_к$$

$A_к$ – проекция точки A на плоскости проекций $П_к$



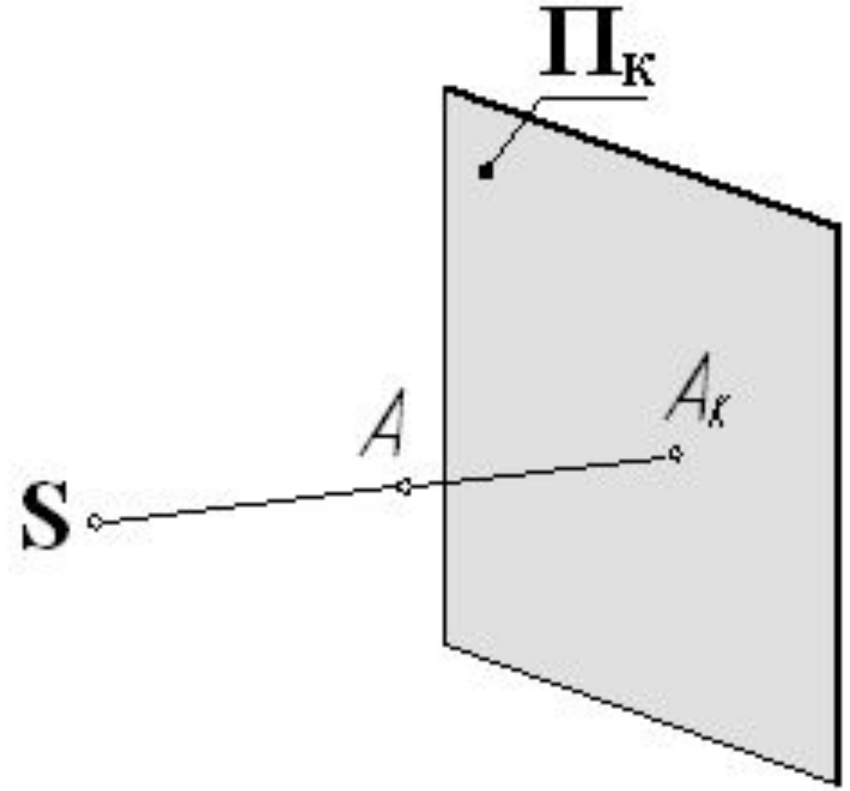
Для любой точки пространства

$SA \cap П_к = A_к$ $SB \cap П_к = B_к$ $SC \cap П_к = C_к$

$SA \cap SB \cap SC \cap \ldots = S$

Метод проецирования

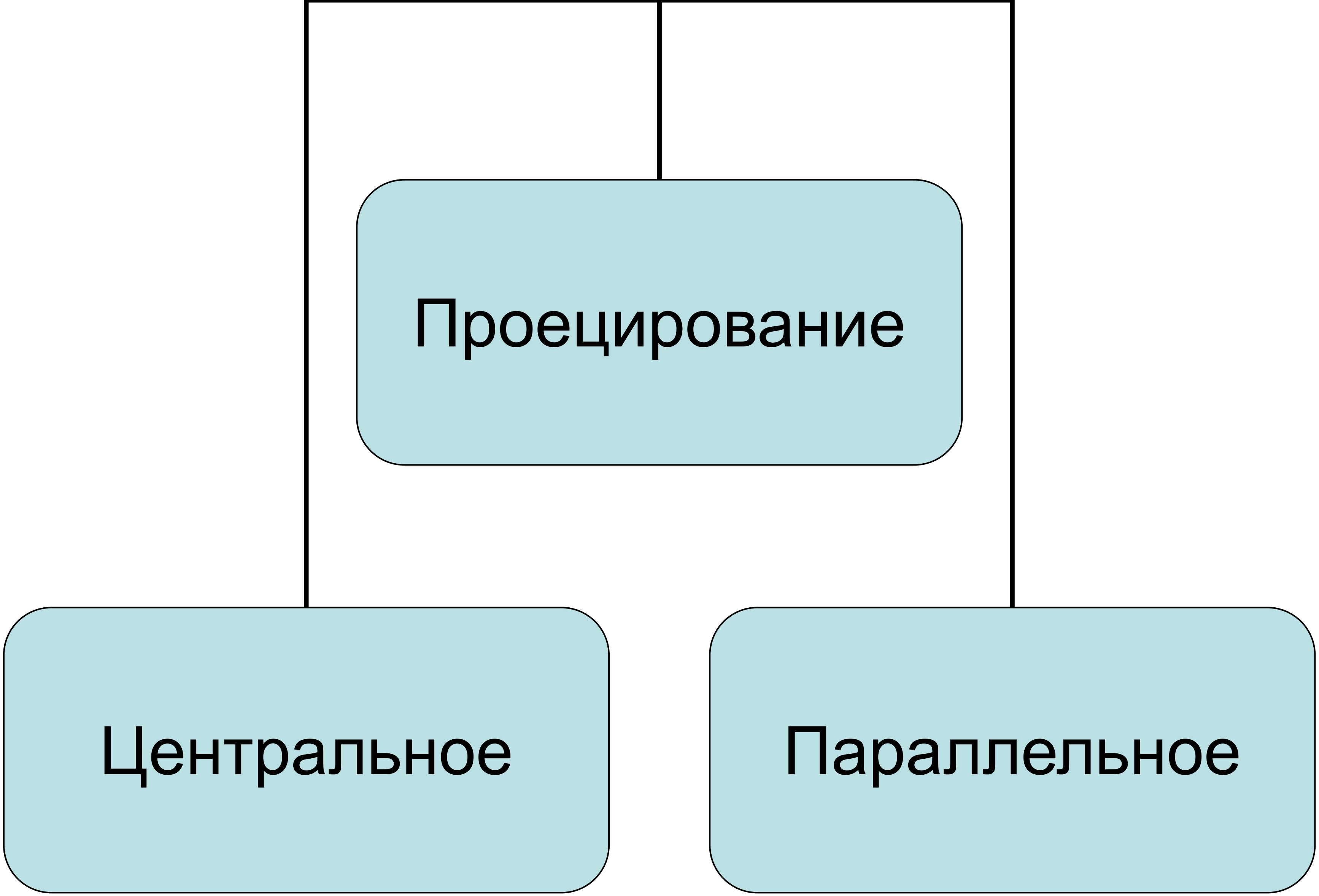
$П_к$ – плоскость проекций
S – центр проецирования
SA – проецирующая прямая
A – объект (точка)



$$SA \cap П_к = A_к$$

$A_к$ – проекция объекта (точки) *A* на плоскости проекций $П_к$

Варианты метода проецирования

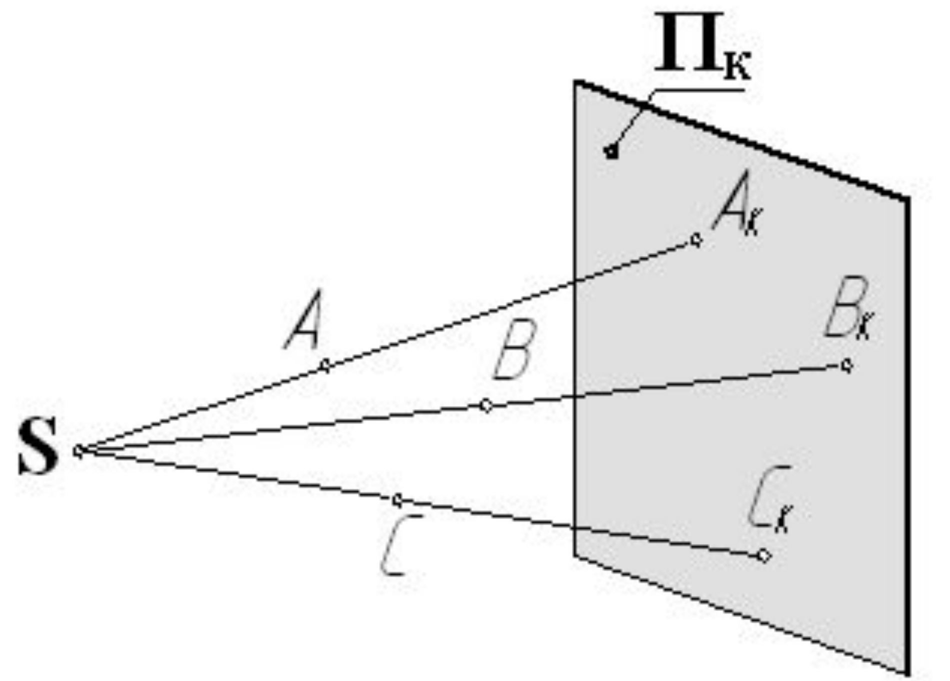

Проецирование
Центральное
Параллельное

Центральное проецирование (коническое)

S (центр проецирования)– реальная точка.

Расстояние от **S** до плоскости проекций $\Pi_к$ измеримая величина.

$$\mathbf{S}\boldsymbol{A} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{B} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{C} \ldots = \mathbf{S}$$



Параллельное проецирование (цилиндрическое)

S (центр проецирования) – несобственная точка.

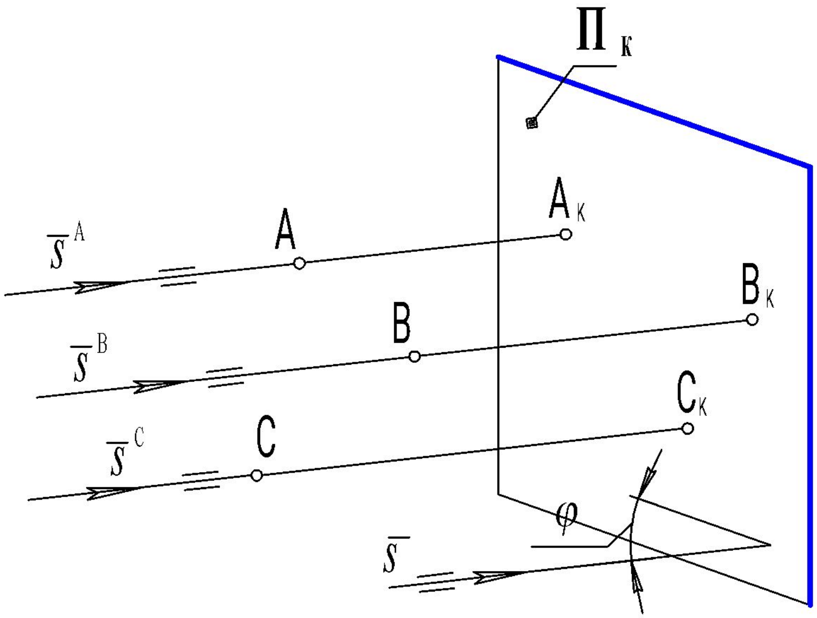
$$S \equiv S^{\infty}$$

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S^{\infty}$$

следовательно

$$S^{\infty}A \parallel S^{\infty}B \parallel S^{\infty}C \parallel \ldots \parallel s$$

s – направление проецирования; $S^{\infty} \in s$



Параллельное проецирование

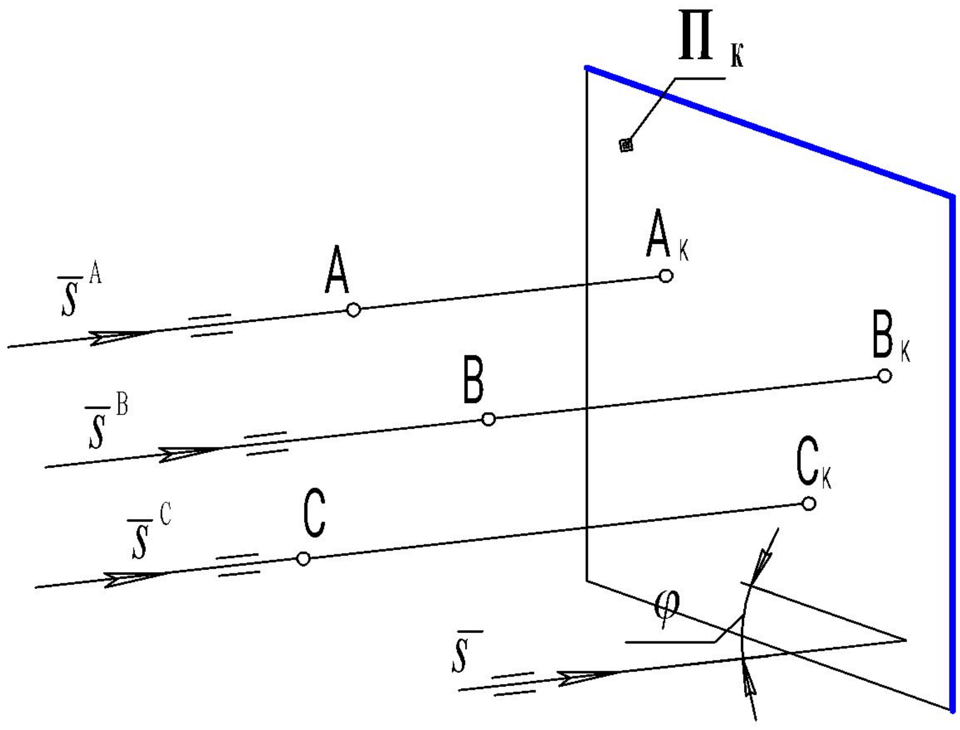
Косоугольное

Направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекций

Прямоугольное

Направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций

Параллельное проецирование



$(s \wedge \Pi_к) = \angle\,\varphi$

$\angle\varphi = 90^\circ \vee (s \perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование прямоугольное

(ортогональное)

$\angle\varphi \neq 90^\circ \vee (s \not\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование косоугольное

Проецирование

Центральное

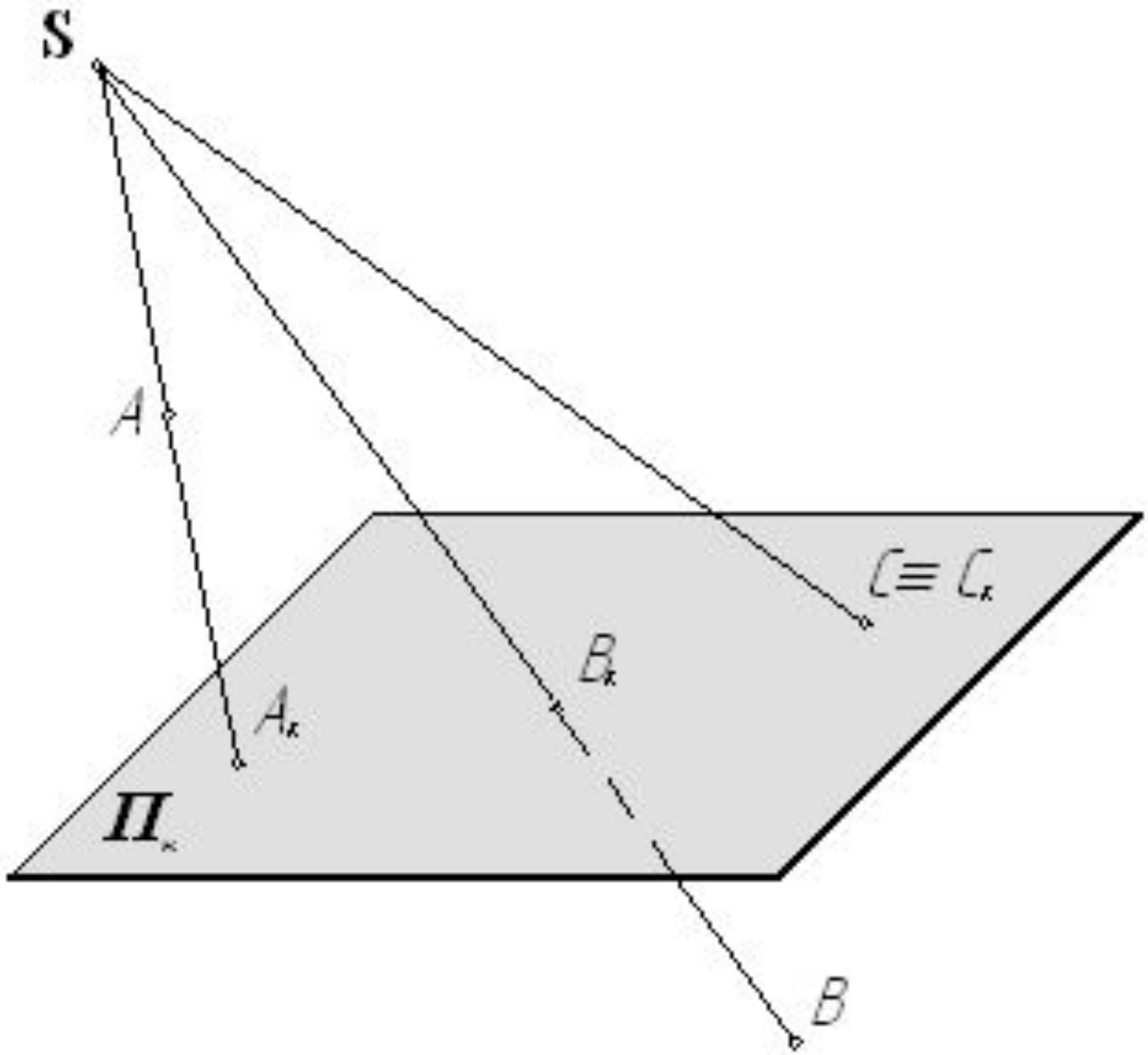
Параллельное

Косоугольное

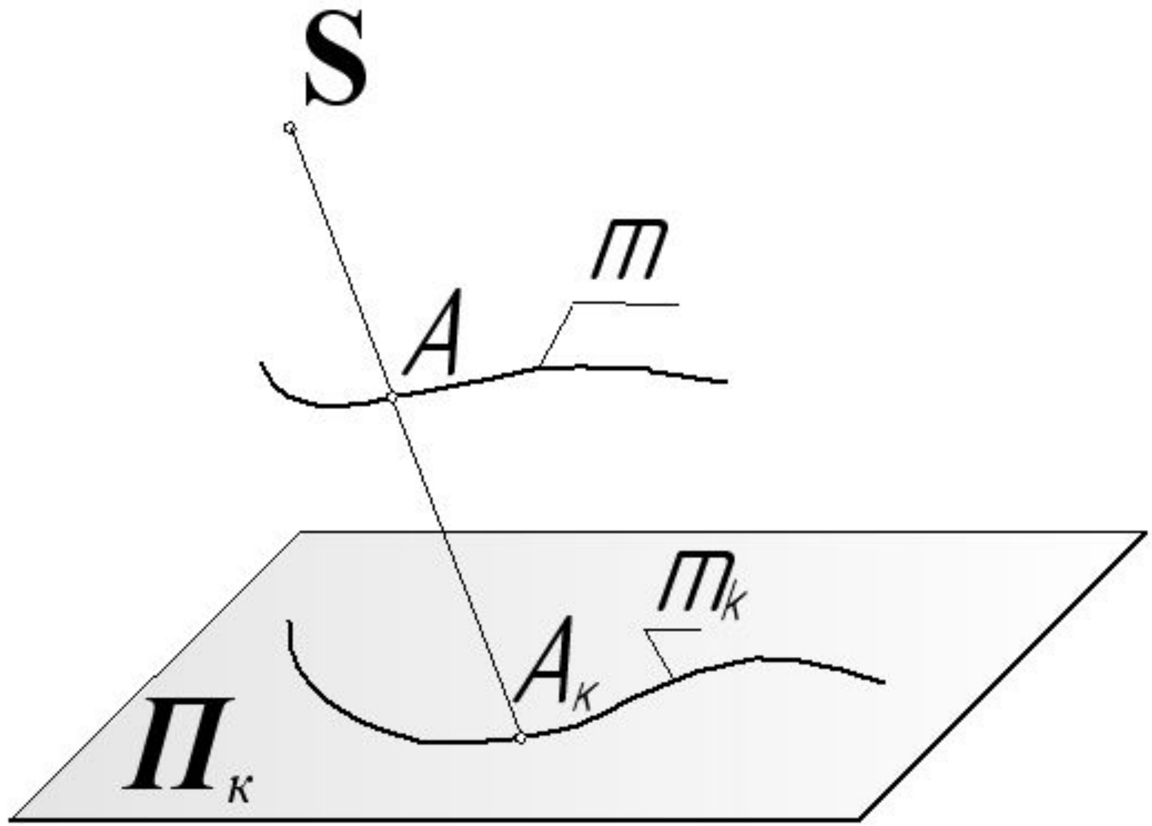
Прямоугольное

Свойства проецирования

Общие свойства проецирования

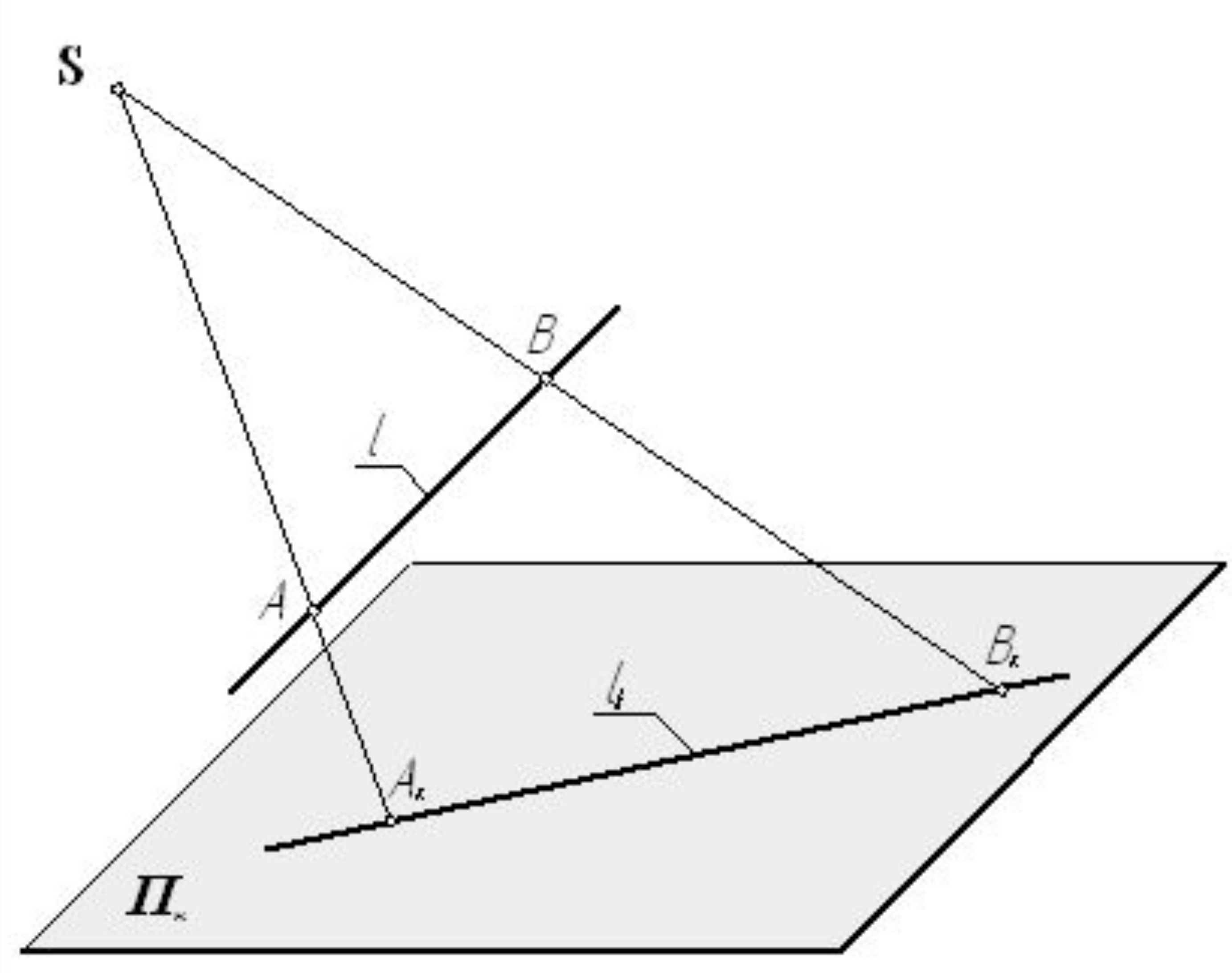


Проекция точки - точка

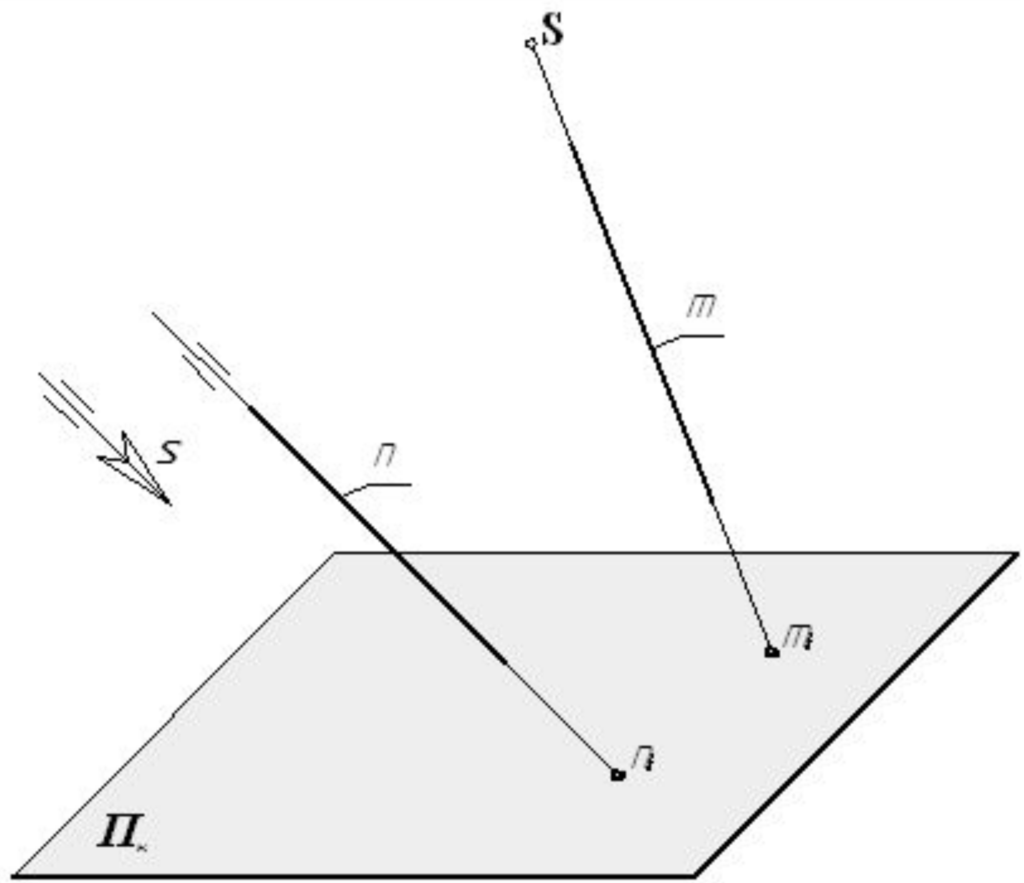


Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат одноименным проекциям этой линии.

$$\mathbf{A} \in \boldsymbol{m} \Rightarrow \mathbf{A_k} \in \boldsymbol{m_k}$$



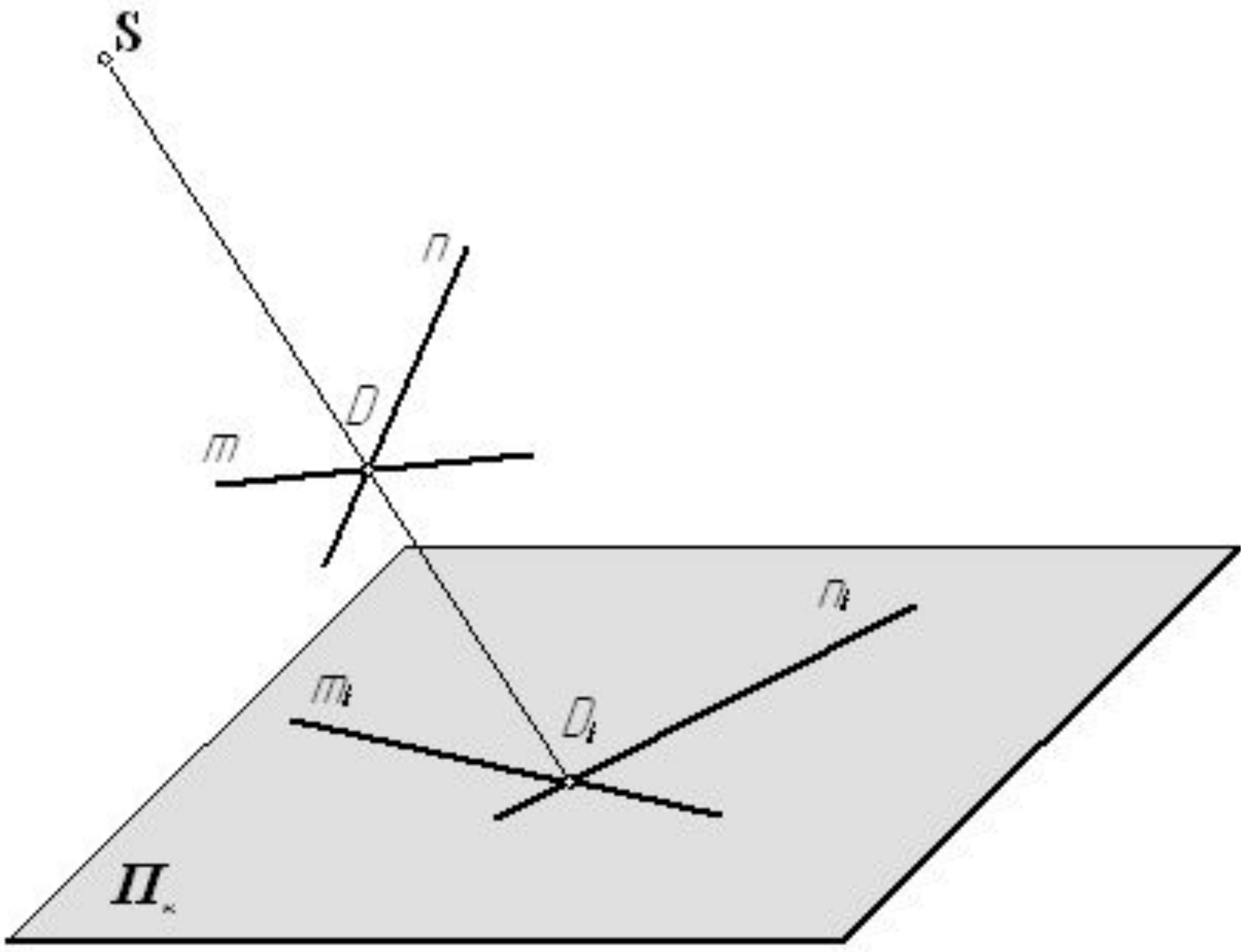
Проекция прямой, в общем случае, - прямая.



Если прямая проходит через центр проецирования **S** (или параллельна направлению проецирования *s*), то ее проекция вырождается в точку.

$$(S \in m) \vee (n \parallel \hat{s}) \Rightarrow (m_k \text{ и } n_k \text{ - точка})$$

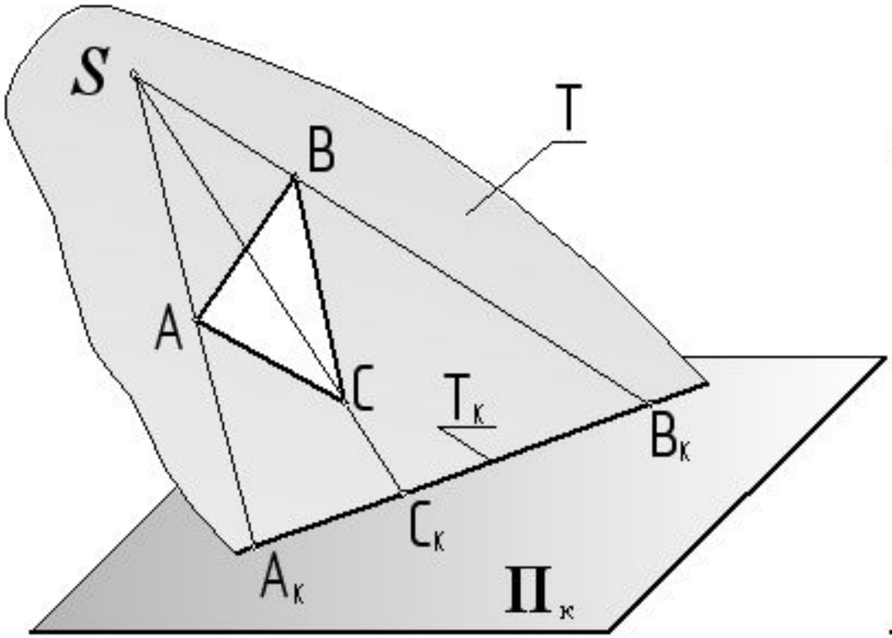
Такая прямая называется проецирующей.

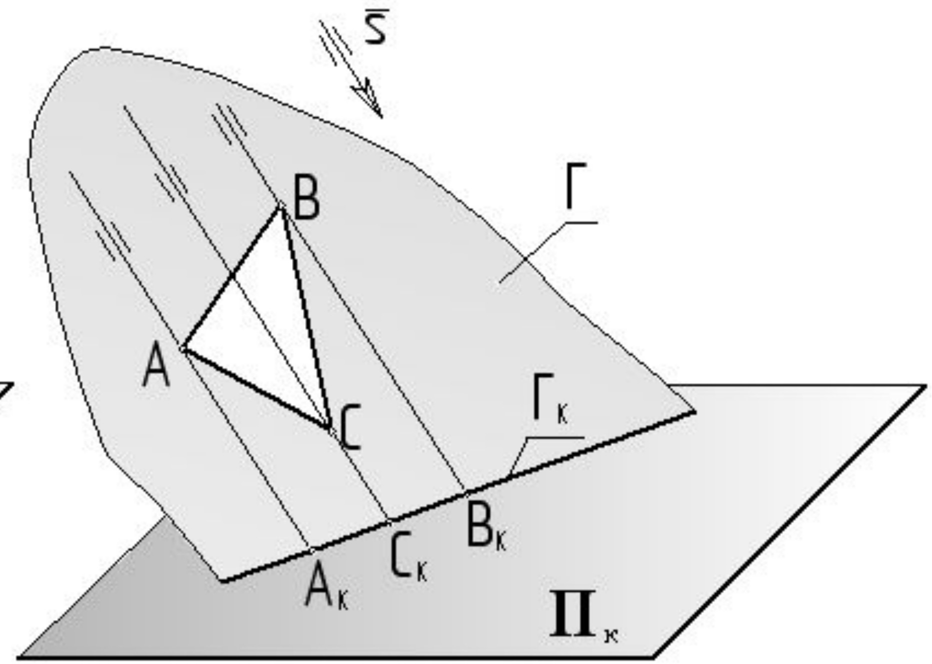


Если прямые пересекаются, то пересекаются и их проекции.

Точки пересечения прямых и их проекций лежат на одной проецирующей прямой.

$$(m \cap n = D) \Rightarrow (m_k \cap n_k = D_k \wedge S \in DD_k)$$

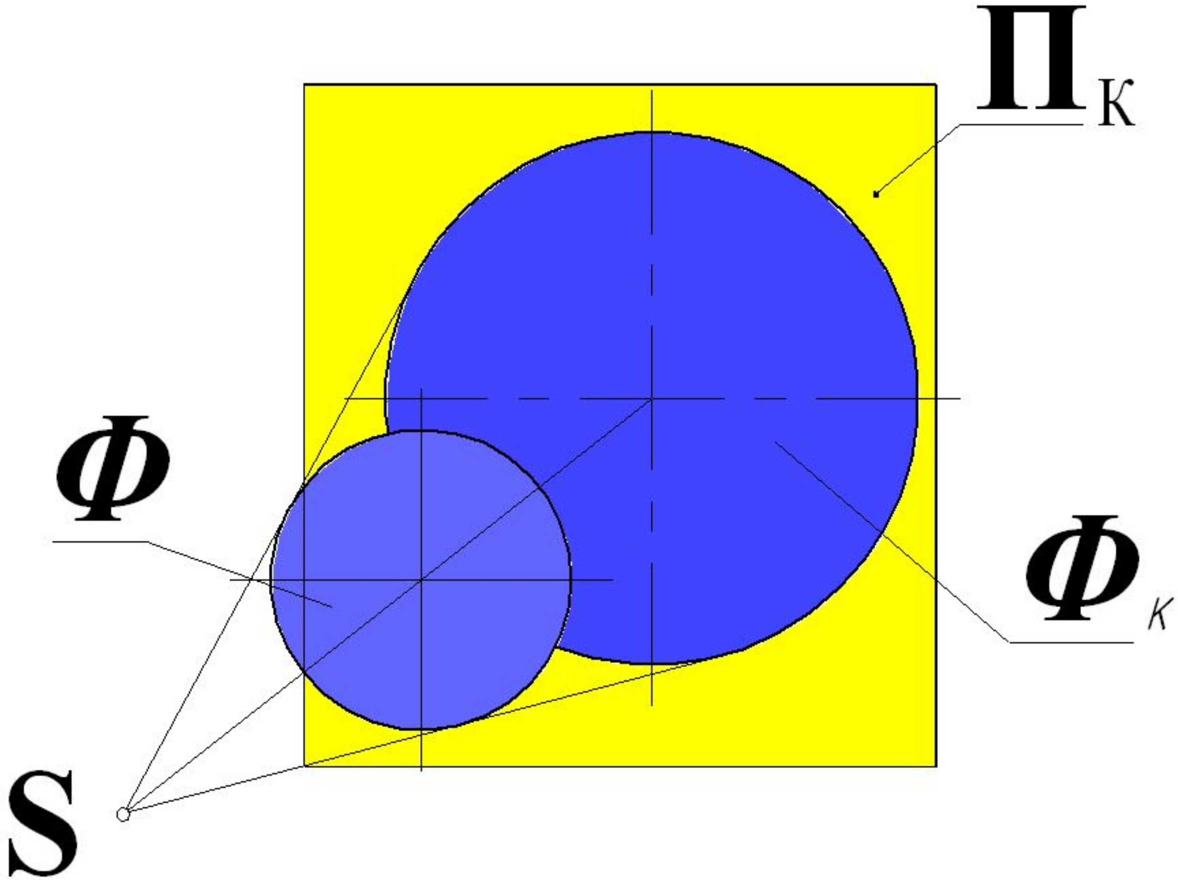




Если плоскость проходит через центр проецирования (включает в себя) ($S \in T$), то проекция плоскости вырождается в прямую линию (T_k – прямая).

$$S \in T \Rightarrow T_k \text{ – прямая}$$

Такая плоскость называется проецирующей



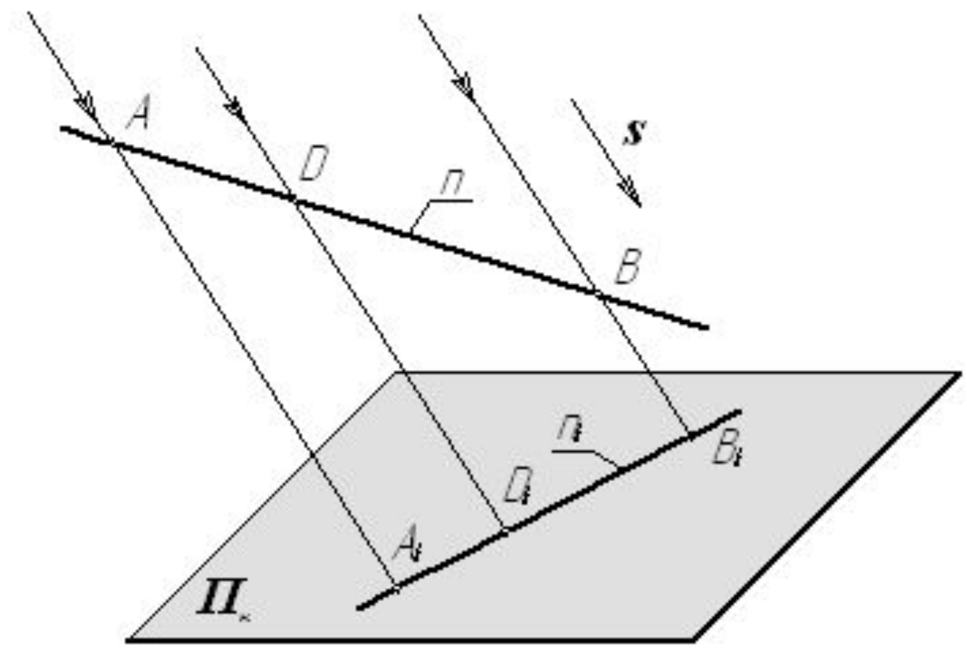
Если плоская фигура $\boldsymbol{\Phi}$ параллельна плоскости проекций $\Pi_к$, то ее проекция $\boldsymbol{\Phi}_к$ на эту плоскость подобна самой фигуре $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\Phi \parallel \Pi_к \Rightarrow \Phi_к \sim \Phi$$

Инвариантные свойства параллельного проецирования

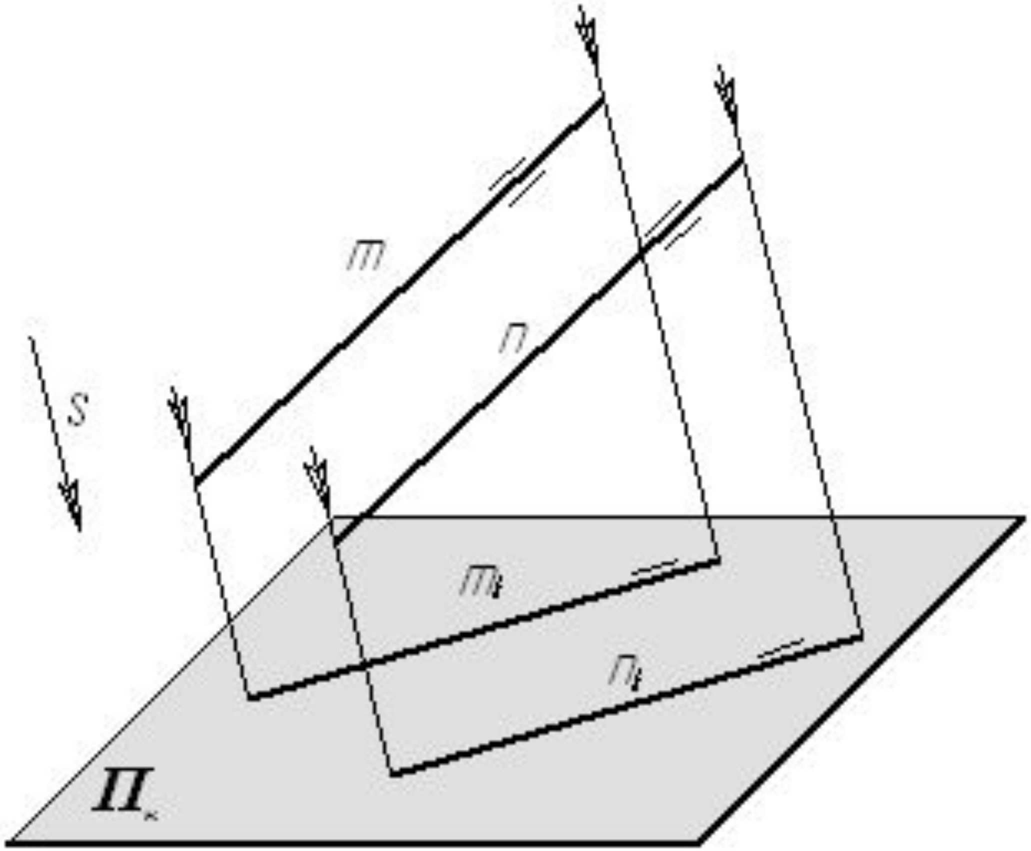
Если отрезок прямой разделен в заданном отношении, то в таком же отношении будет разделена и проекция этого отрезка.

$$AD : DB = A_K D_K : D_K B_K$$



Если прямые параллельны, то их одноименные проекции также параллельны.

$(m \parallel n) \Rightarrow (m_k \parallel n_k)$



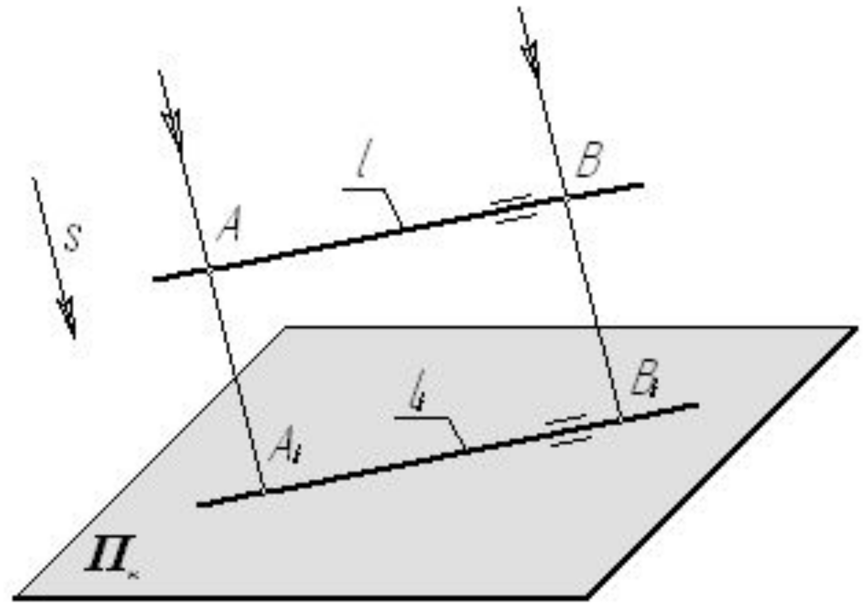
Если прямая параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости параллельна прямой, а отрезок, ей принадлежащий, отображается в истинную величину.

$$(l \parallel \Pi_k) \Rightarrow (l \parallel l_k)$$

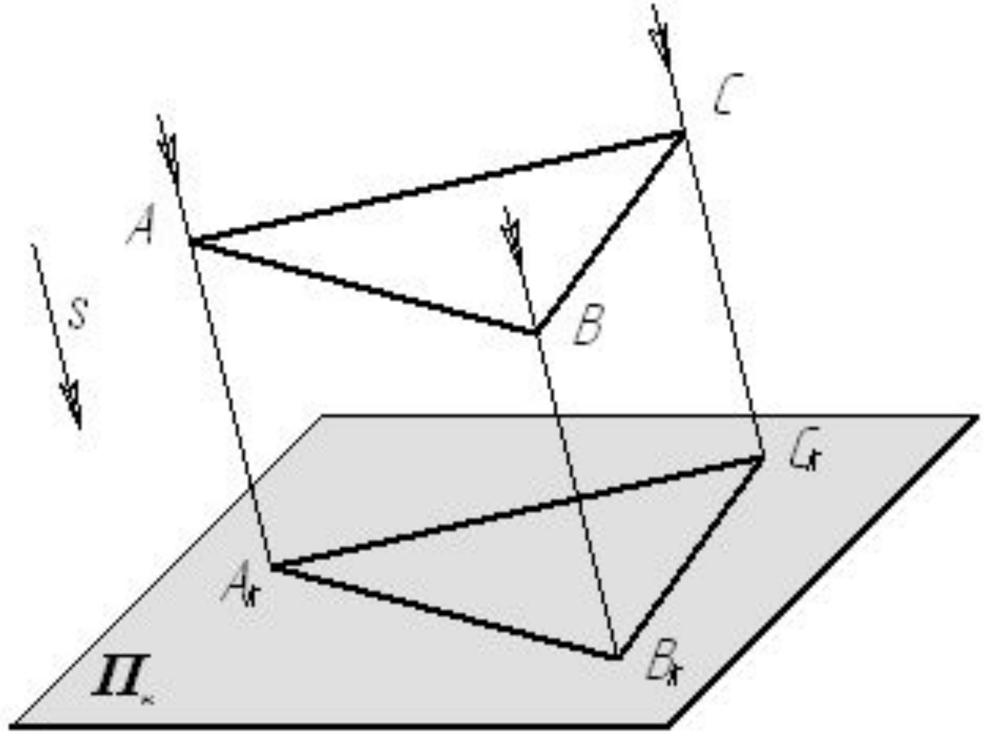
$$(AB \subset l\ ) \Rightarrow (|\ AB\ | = |A_k\ B_k|$$

Т.е. проекция отрезка конгруэнтна самому отрезку

$$A_k\ B_k \cong AB$$



Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости конгруэнтна самой фигуре.

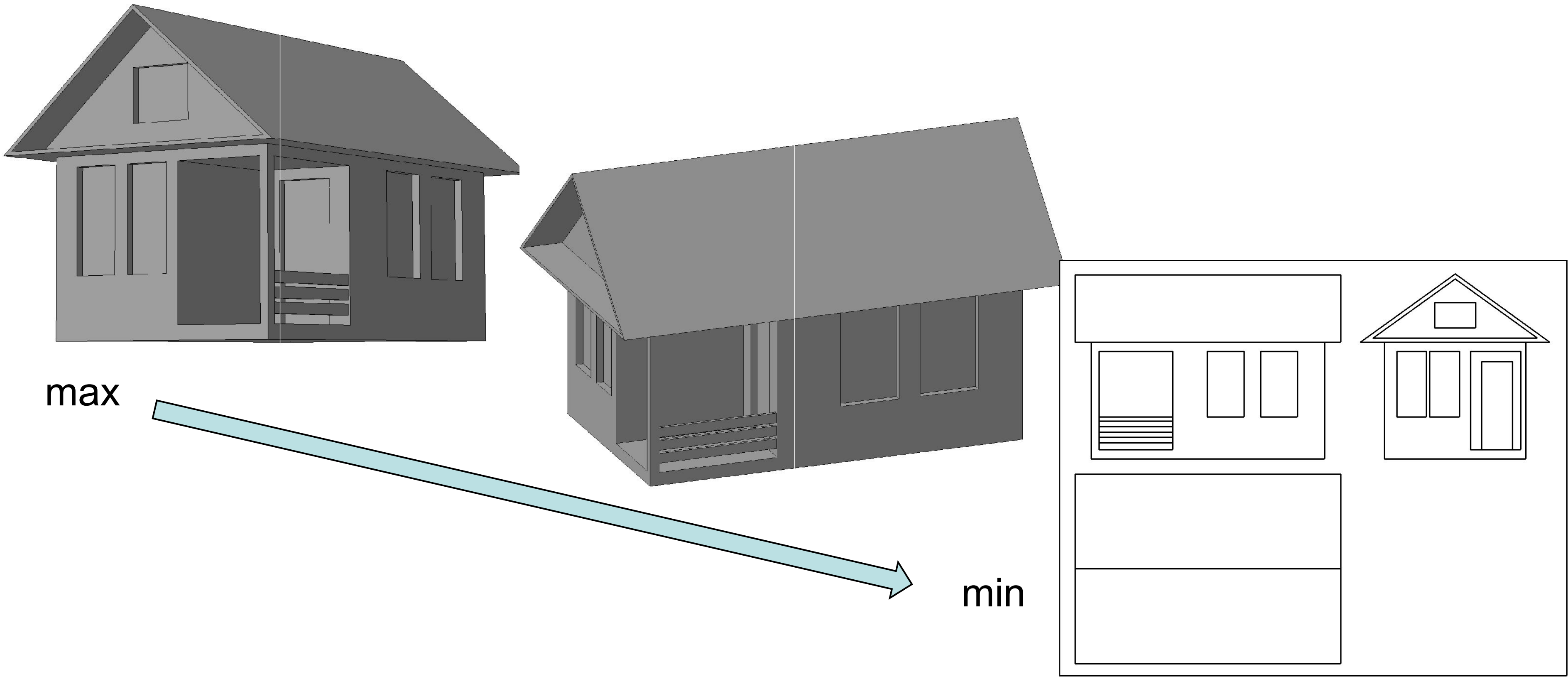


$$(\Phi(ABC) \parallel \Pi_k) \Rightarrow (\Phi_{\text{к}}(A_{\text{к}}B_{\text{к}}C_{\text{к}}) \cong \Phi(ABC))$$

Требования, предъявляемые к проекционному изображению

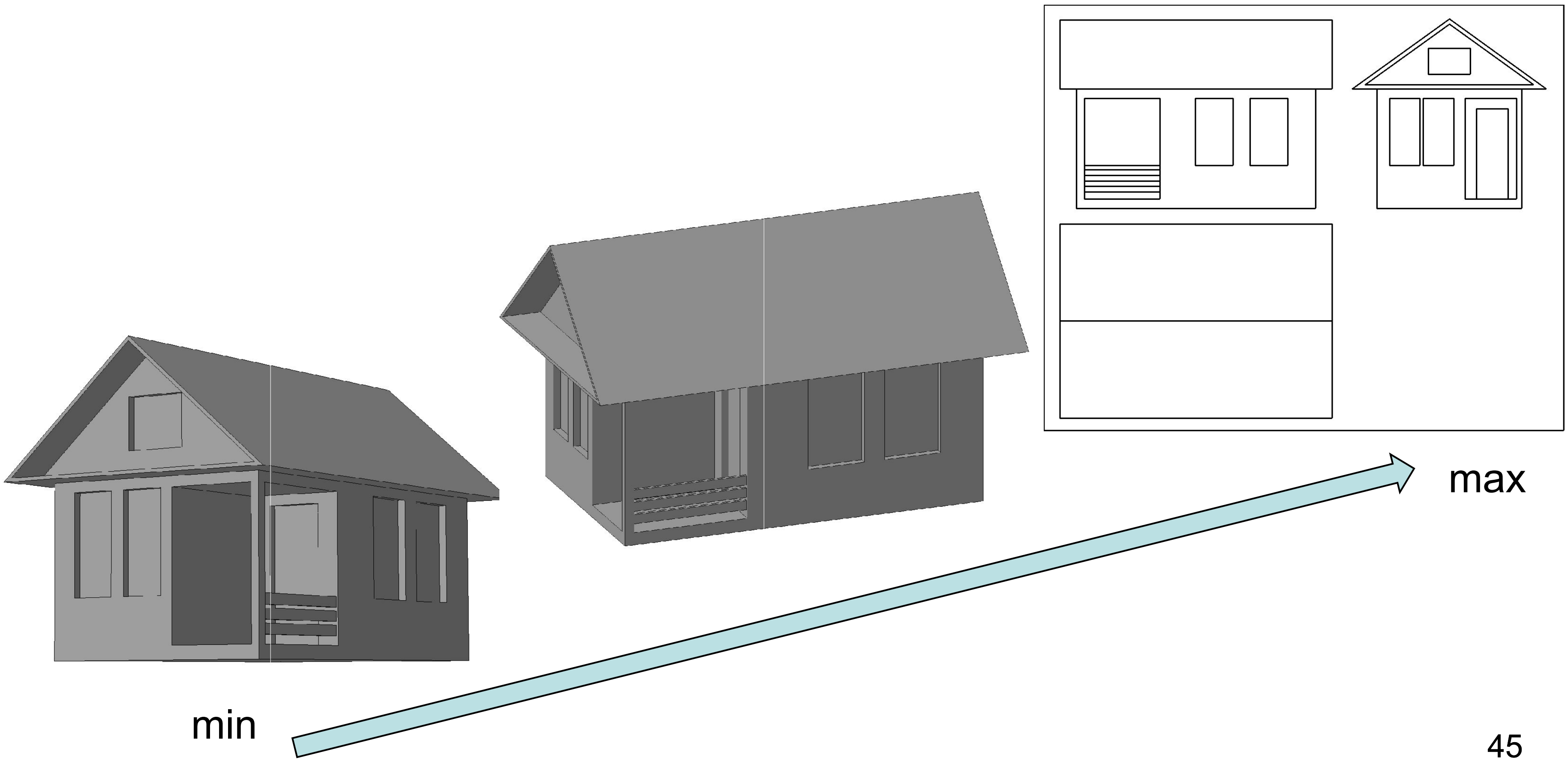
1. Наглядность

- Свойство, которое дает возможность по изображению представить внешнюю форму заданного объекта



2. Обратимость

- Свойство, на основе которого по изображению можно восстановить реальную форму объекта, его размеры и, если необходимо, положение заданного объекта в пространстве



3. Единство правил построения изображения и правил его графического оформления

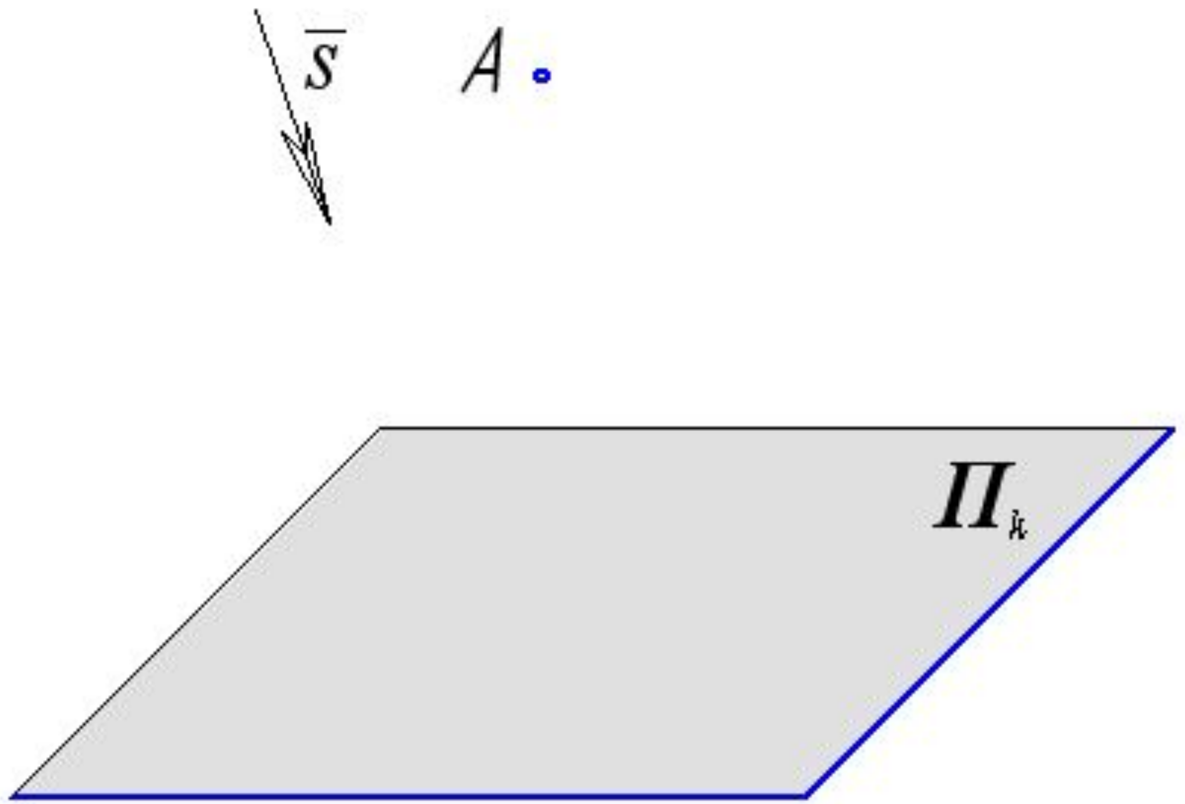
Выводы

- Выбор того или иного вида проекции определяется функциональным назначением получаемого изображения.
- Для презентаций определяющим свойством является наглядность изображения (перспективная или аксонометрическая проекция).
- Для разработки технологического процесса изготовления (строительства) объекта определяющим является обратимость изображения (ортогональные проекции).

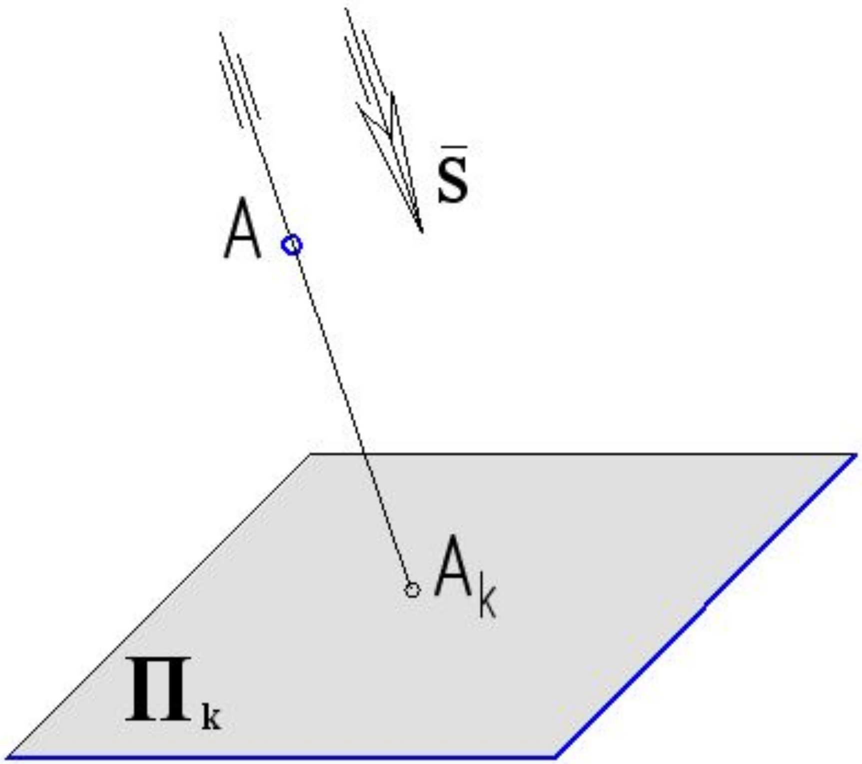
Ортогональные проекции

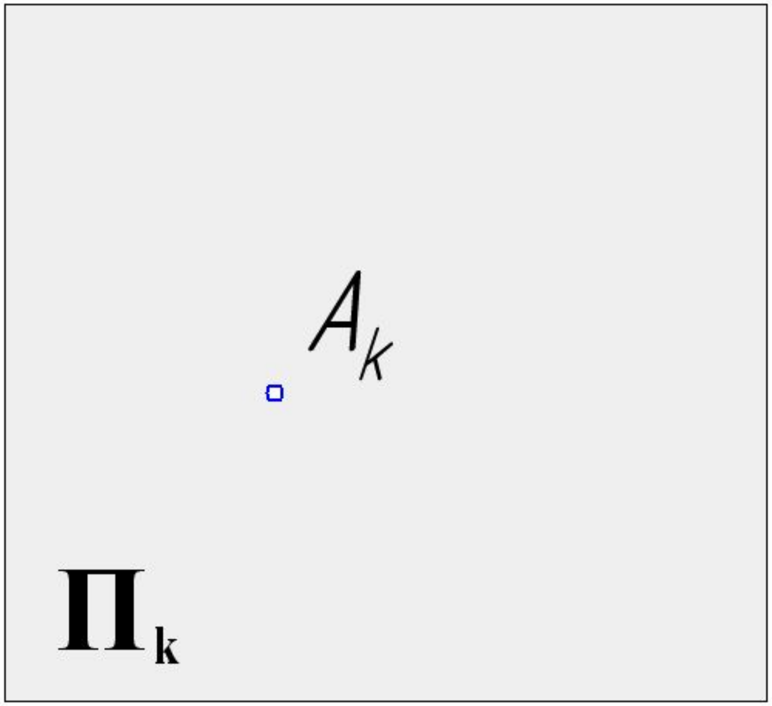
48

Возьмем произвольную точку A и плоскость проекций $\Pi_к$.



49





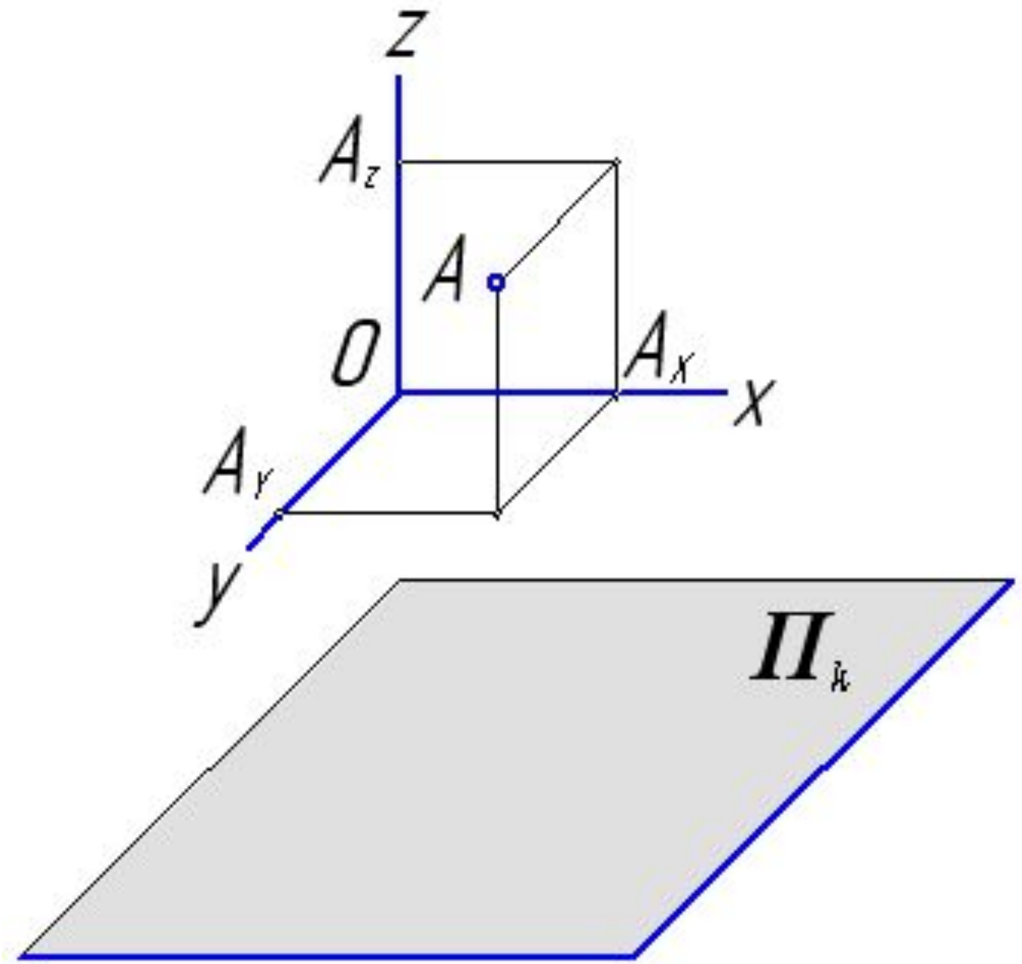
Спроецируем точку A на плоскость проекций $П_к$ по направлению **s**.

Полученная проекция $A_к$ точки A не дает возможности точно определить положение самой точки A в пространстве, так как проекции $A_к$ соответствует все множество точек, принадлежащих проецирующей прямой, проходящей через точку A

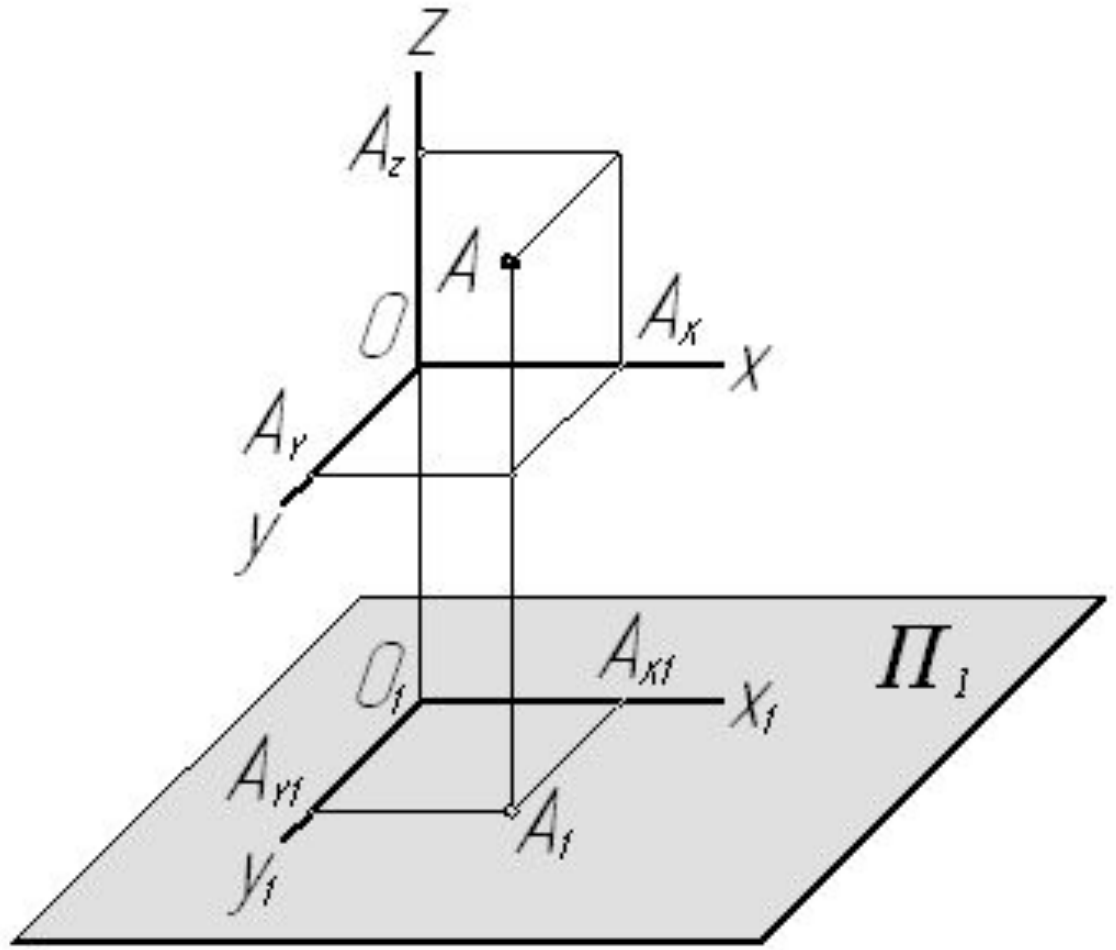
Одна проекция точки без дополнительных условий однозначно не определяет ее положение в пространстве

50

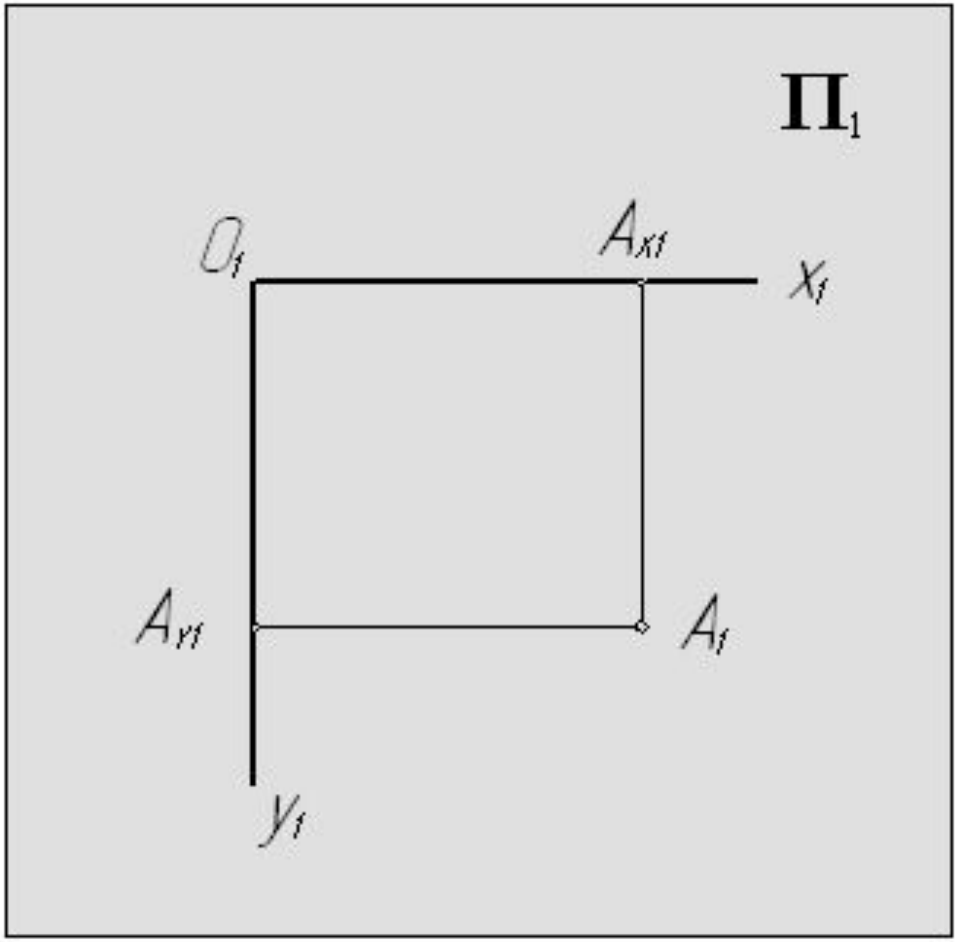
Введем пространственную ортогональную систему координат $Oxyz$ с условием, что координатная плоскость xOy будет параллельна плоскости проекций Π_1. “Привяжем” точку A к выбранной системе координат.



Ортогонально спроецируем системукоординат $Oxyz$ и связанную с ней точку A на плоскость проекций Π_1.



В этом случае на проекции мы имеем только две координаты точки A – x_A и y_A, но отображаемые в истинную величину. Координата z_A, определяющая высоту точки A, отсутствует.

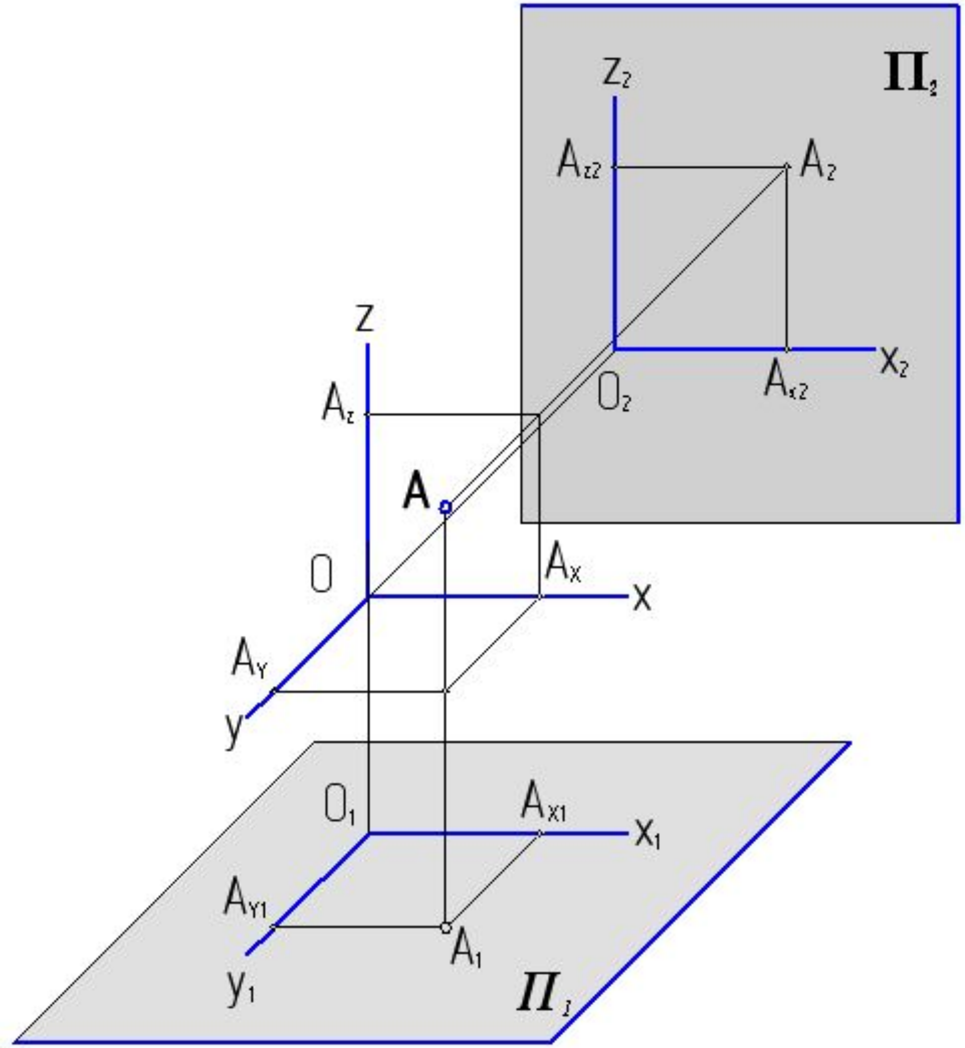


Как было определено ранее, без дополнительных условий изображение необратимо

Введем вторую плоскость проекций Π_2, параллельную координатной плоскости xOz Ортогонально спроецируем точку A совместно с системой координат $Oxyz$ на плоскость проекций Π_2.

Как и предыдущем случае получаем две координаты x_A и z_A в истинную величину.

Т.е. мы получили все три координаты точки A в истинную величину.



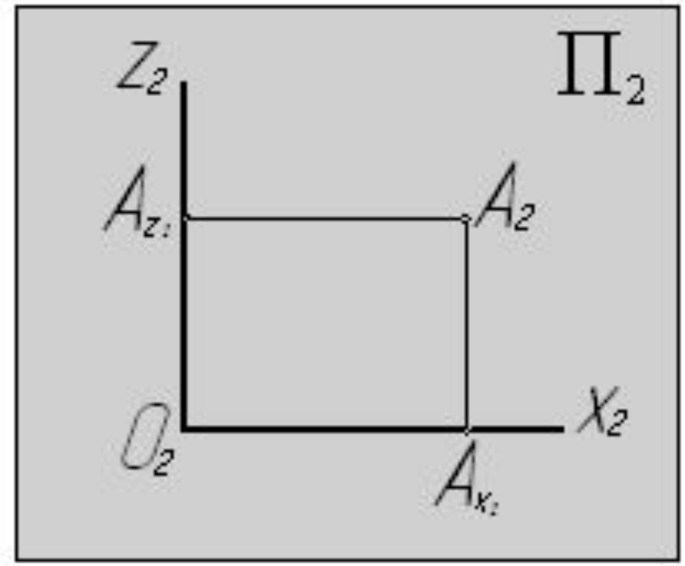
54

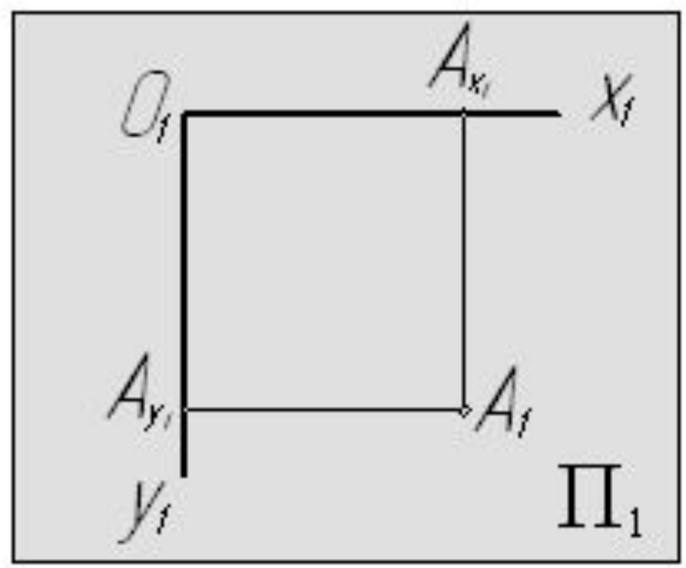
Но координатные плоскости xOz и xOy взаимно перпендикулярны.

$$xOz \perp xOy$$

Следовательно, плоскости проекций Π_1 и Π_2 также взаимно перпендикулярны

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$





Следовательно:

55

Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

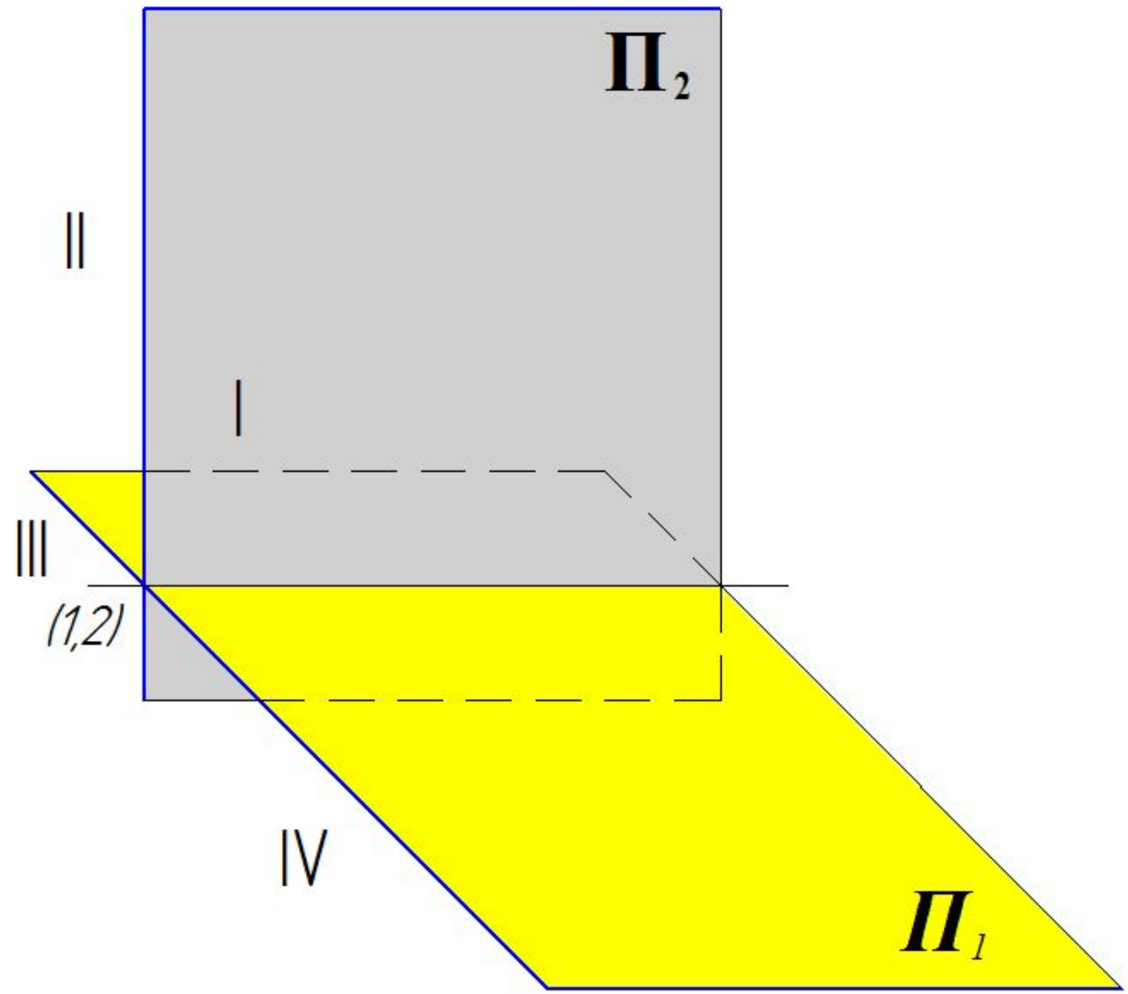
56

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций

$\Pi_1 \perp \Pi_2$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$



Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

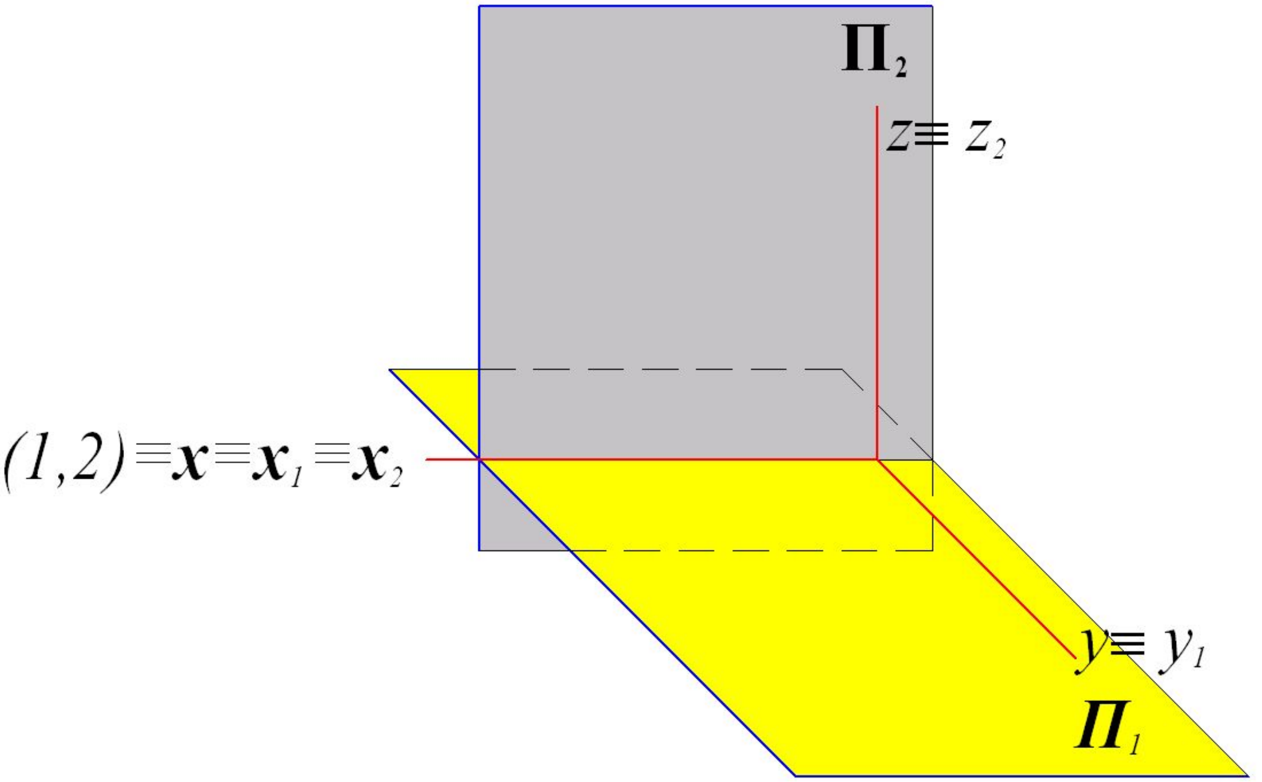
I, II, III, IV – четверти пространства

Пространственная система координат совмещается с плоскостями проекций так, чтобы

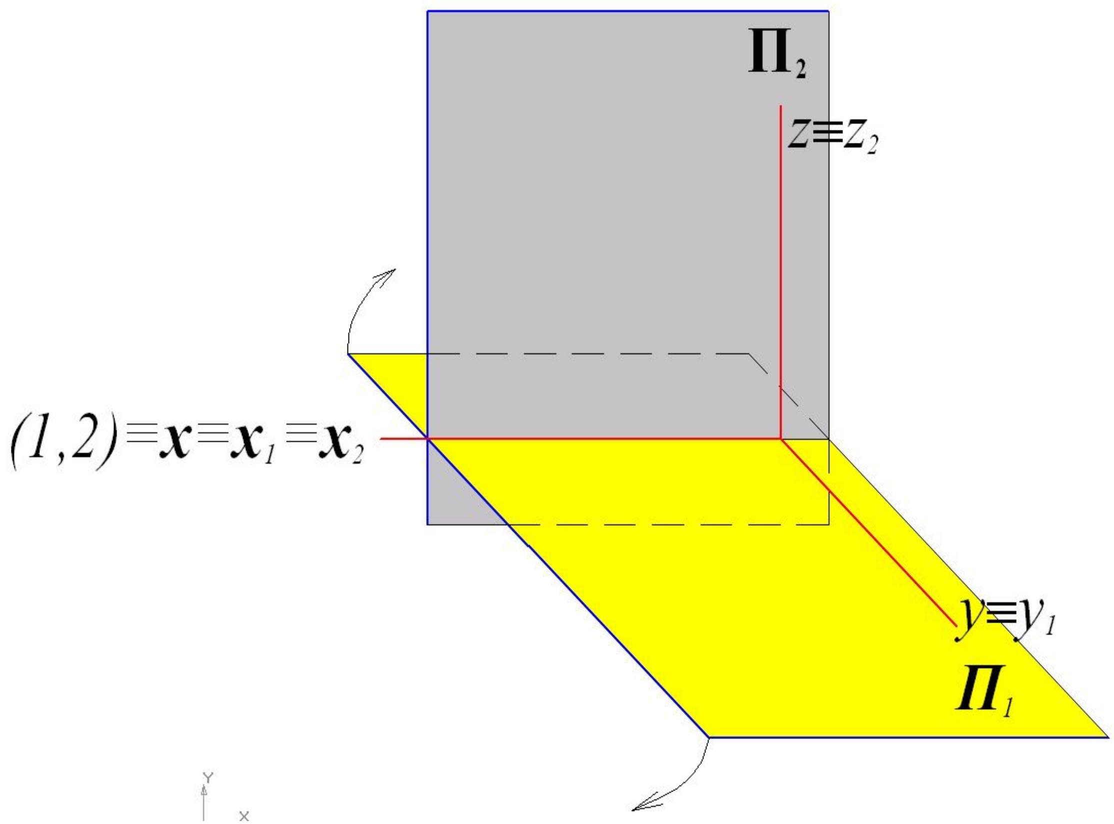
$$xOz \equiv \Pi_2\ ,$$

$$xOy \equiv \Pi_1\ ,$$

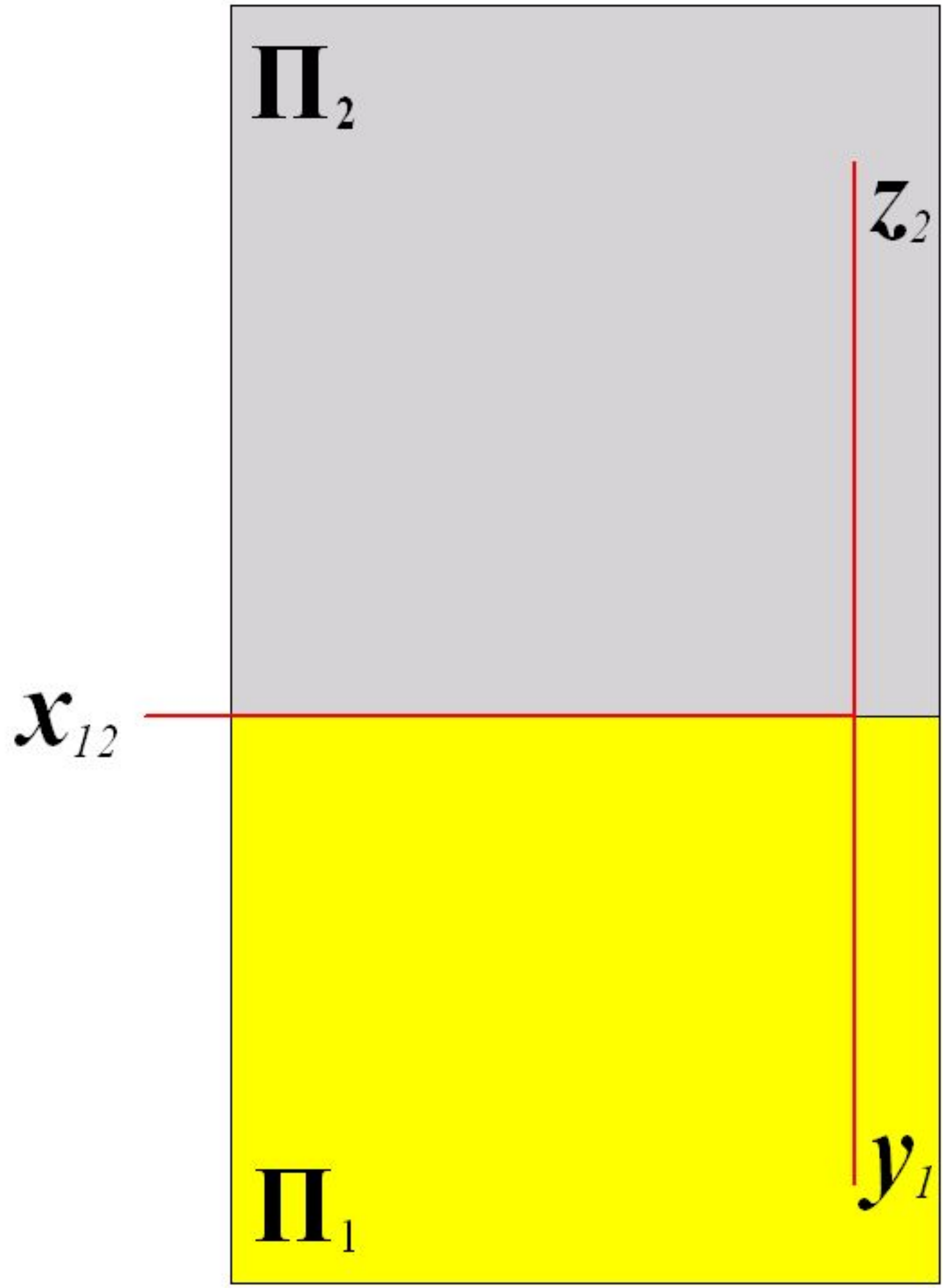
$$x \equiv (1{,}2)$$



Для получения плоскостного чертежа горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг линии пересечения *(1,2)* до совмещения с плоскостью Π_2.



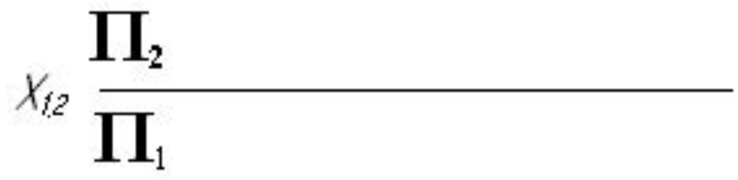
Плоскости проекций Π_1 и Π_2 совмещены в одну общую плоскость.



Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не оказывают.

Координатные оси y и z также не показывают.

В дальнейшем, когда не требуется знать положение объекта в пространстве относительно системы координат $Oxyz$, ось $x_{1,2}$ также может не изображать-ся. Получаем безосную систему.



Ортогональная система трех плоскостей проекций

Вводится третья плоскость проекций

Π_3 – профильная

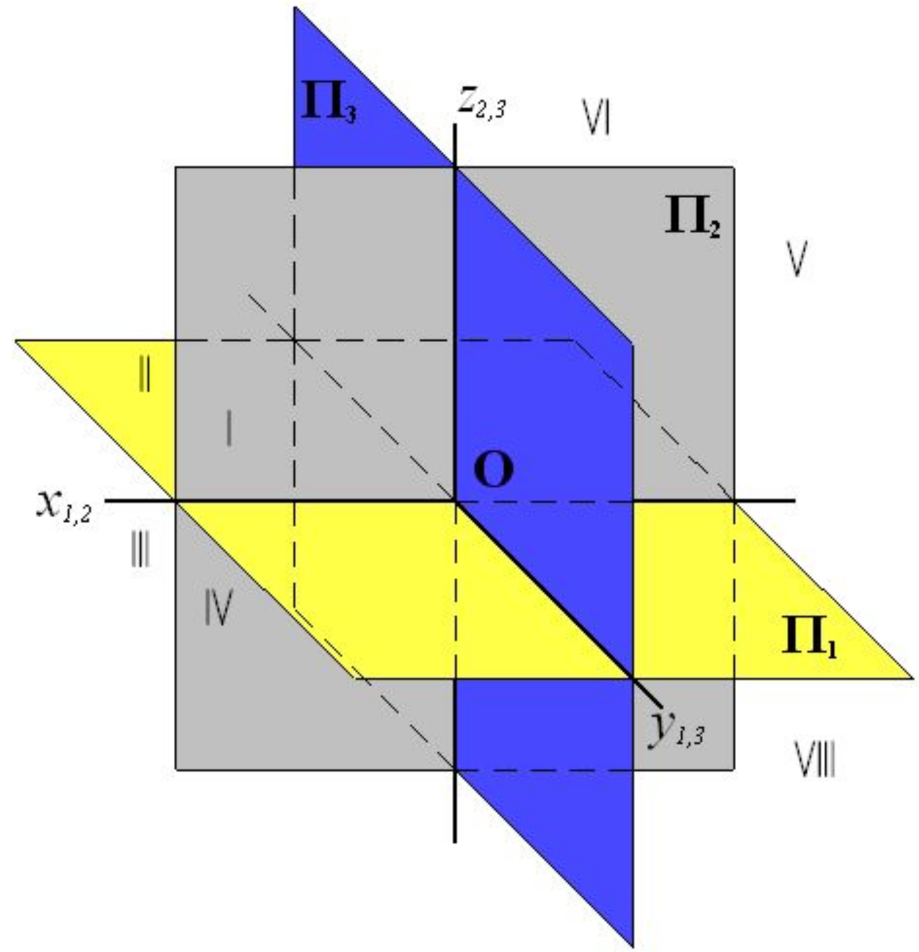
$\Pi_3 \equiv yOz$

$\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$;

$\Pi_3 \cap \Pi_1 = (1,3)$, $(1,3) \equiv y \Rightarrow y_{1,3}$

$\Pi_3 \cap \Pi_2 = (2,3)$, $(2,3) \equiv z \Rightarrow z_{2,3}$

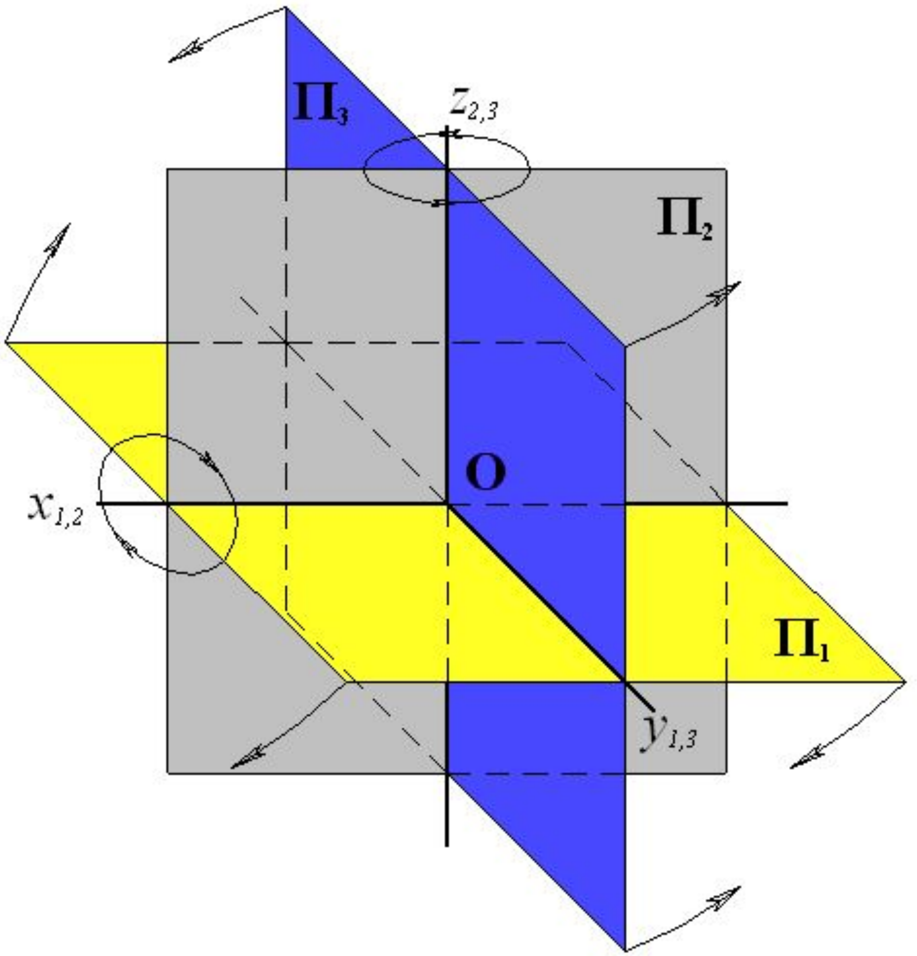
$\Pi_2 \cap \Pi_1 = (1,2)$, $(1,2) \equiv x \Rightarrow x_{1,2}$



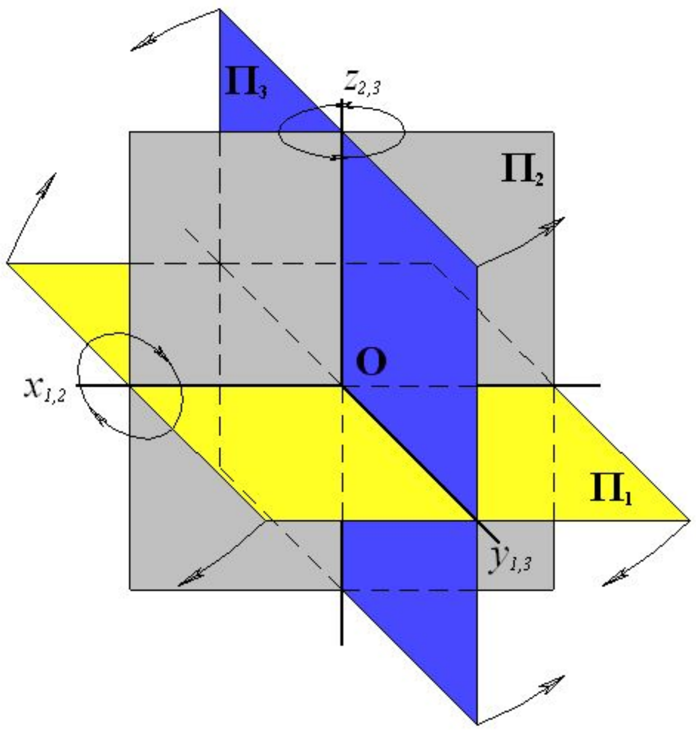
Пространство разделено на 8 частей - октантов

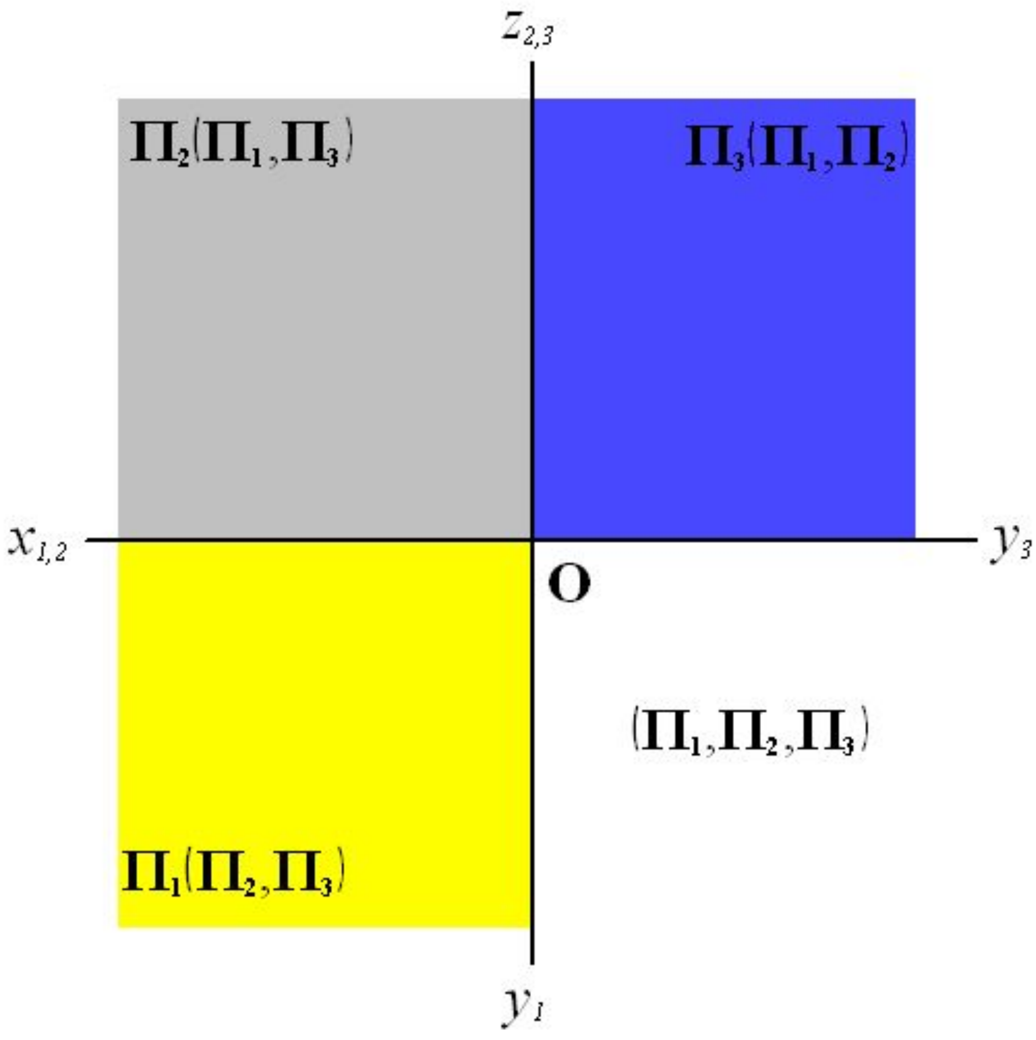
Для перехода от трехмерного изображения к плоскостному- двумерному выполняют следующие действия:

- Положение фронтальной плоскости проекций Π_2 не изменяют;
- горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг оси $x_{1,2}$ до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2;
- профильную плоскость проекций Π_3 поворачивают вокруг оси $z_{2,3}$ также до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2.



Все три плоскости проекций совмещены в одну общую плоскость

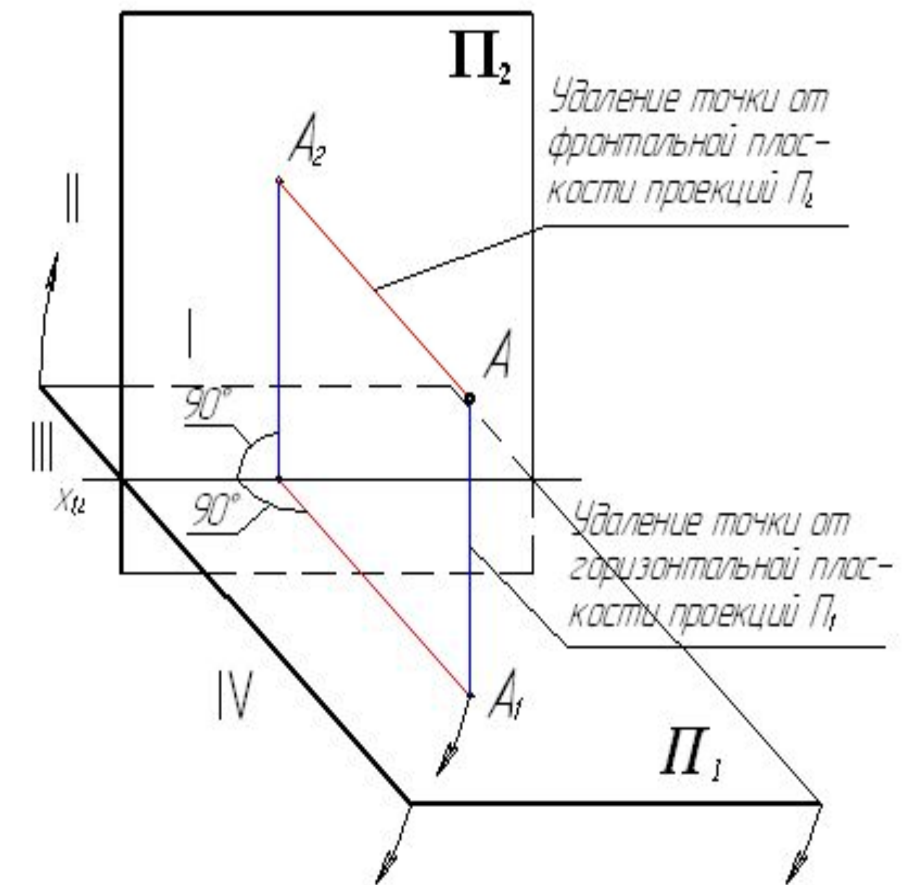




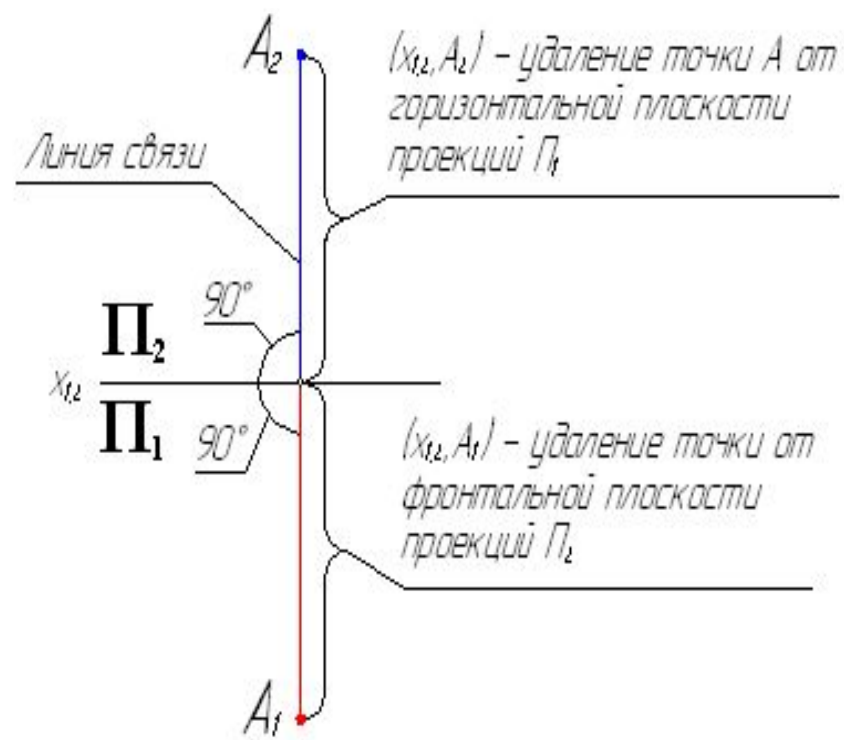
Проецирование точки

Точка в I-ой четверти

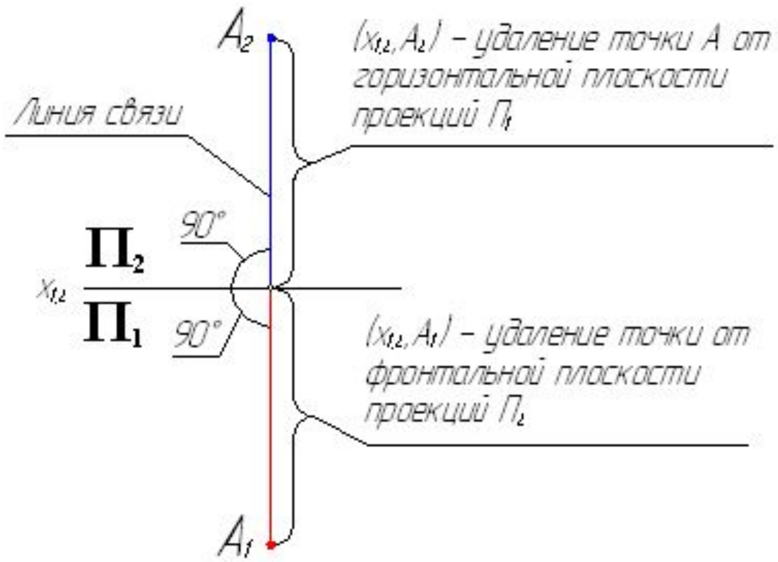
Наглядное изображение



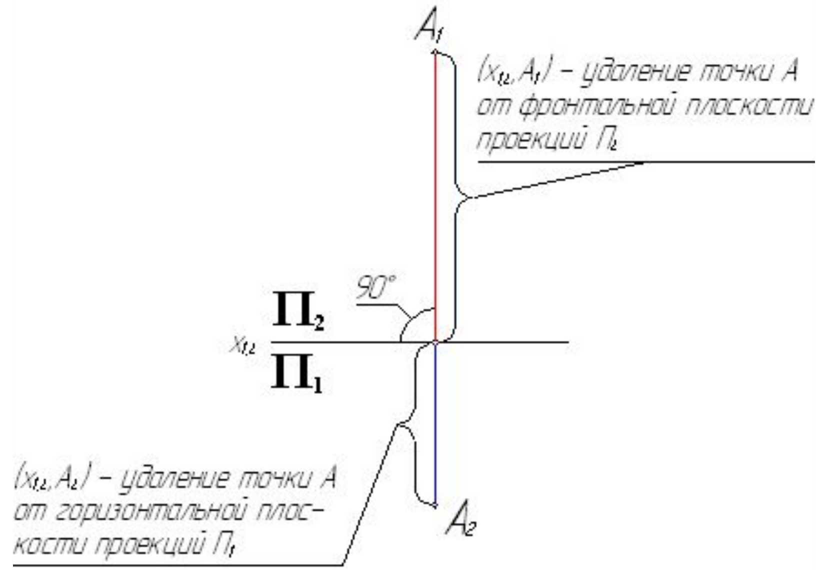
Плоскостное изображение - **Эпюр**



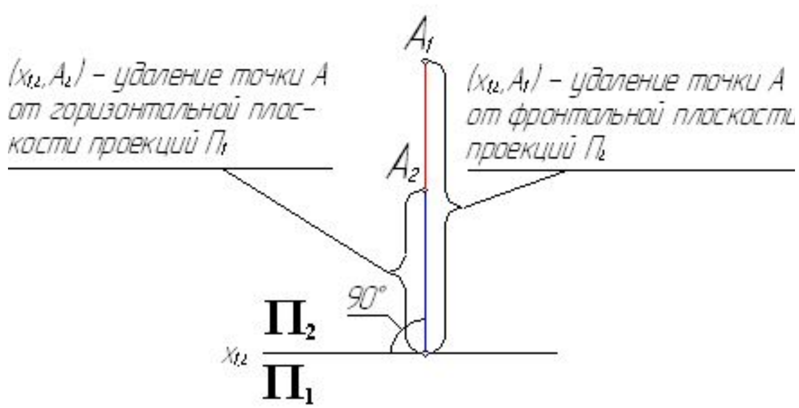
I


A2
(x12,A2) – удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций П1
Линия связи
90°
П2
x12
П1
90°
(x12,A1) – удаление точки от фронтальной плоскости проекций П2
A1

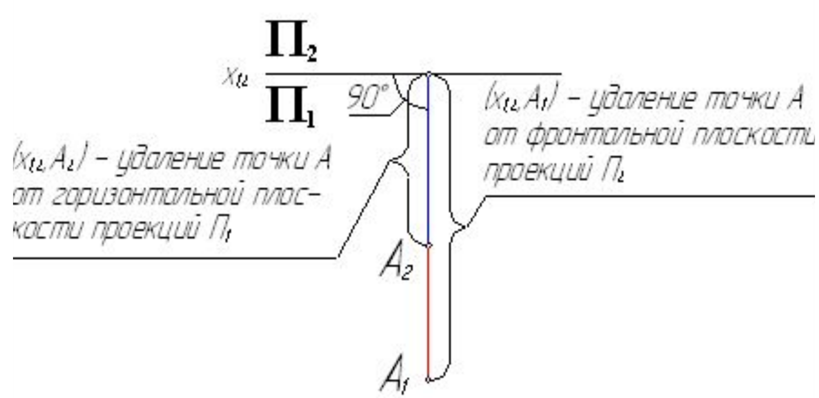
III


A1
(x12,A1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций П2
90°
П2
x12
П1
(x12,A2) – удаление точки A от горизонтальной плос-кости проекций П1
A2

II


A1
(x12,A2) – удаление точки A от горизонтальной плос-кости проекций П1
(x12,A1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций П2
A2
90°
П2
x12
П1

IV


П2
x12
П1
90°
(x12,A1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций П2
(x12,A2) – удаление точки A от горизонтальной плос-кости проекций П1
A2
A1

Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси $x_{1,2}$

$$A_1A_2 \perp x_{1,2}$$

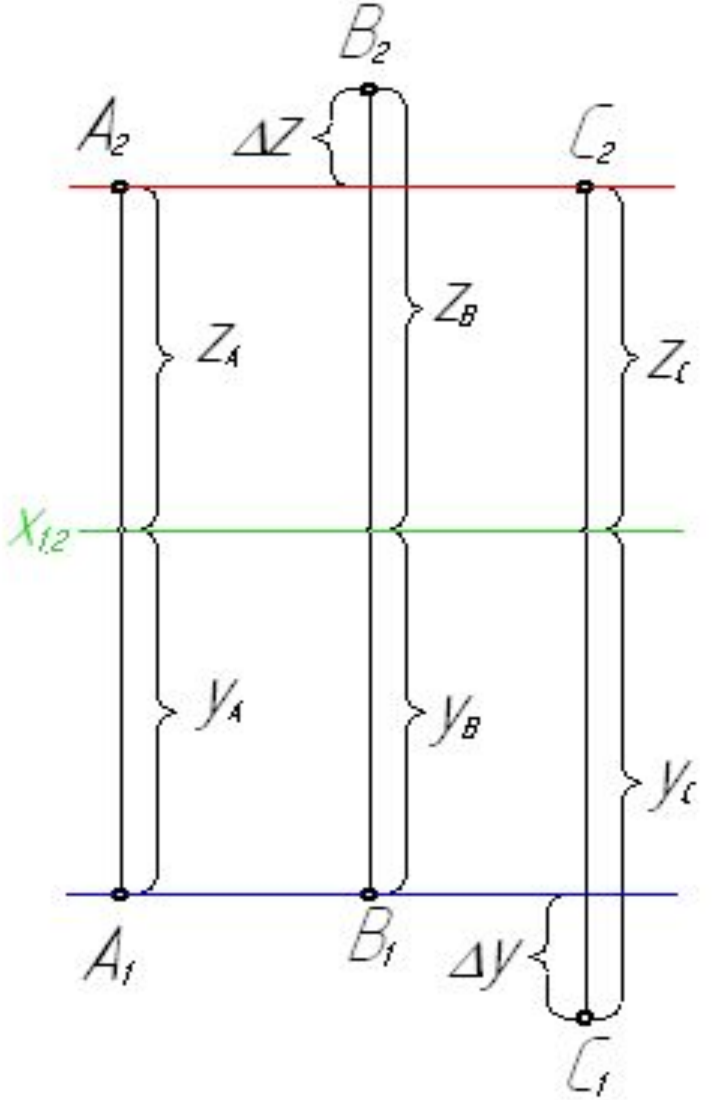
Расстояние от оси $x_{1,2}$ до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

$$(x_{1,2}, A_1) = (A, \Pi_2) \text{ - } \underline{\textit{глубина}}$$

Расстояние от оси $x_{1,2}$ до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

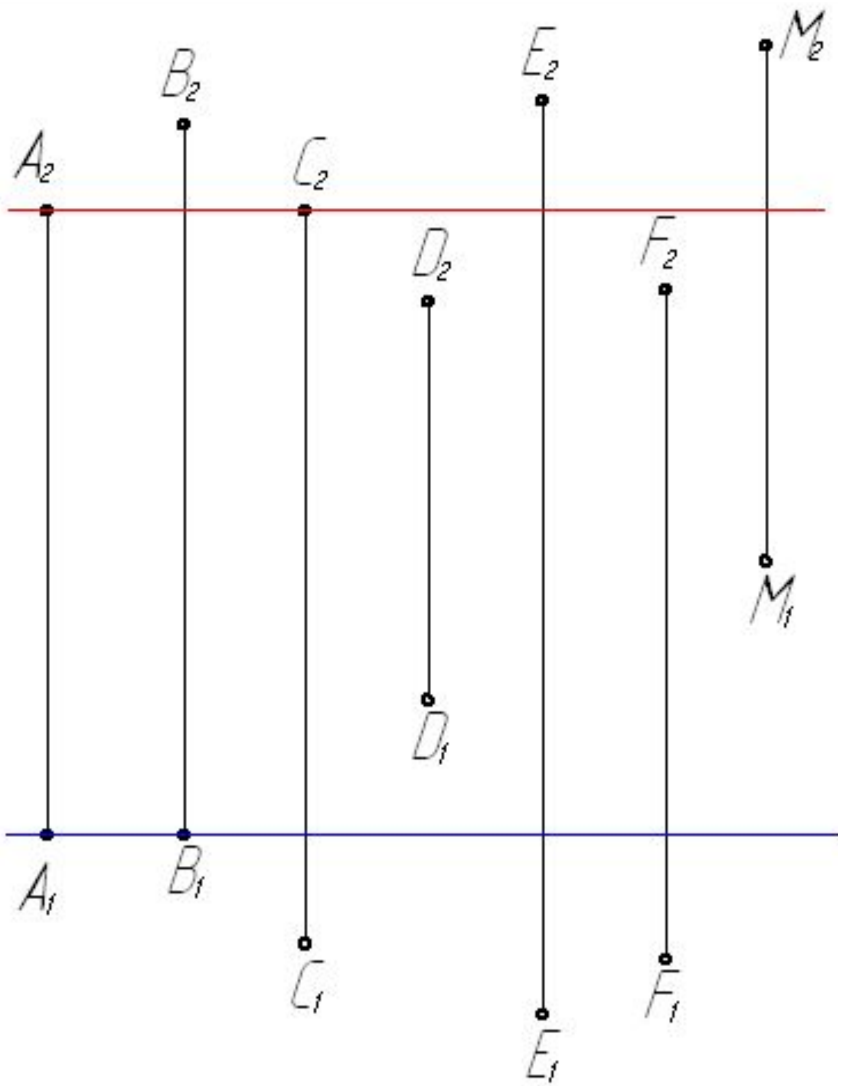
$$(x_{1,2}, A_2) = (A, \Pi_1) \text{ - } \underline{\textit{высота}}$$

Абсолютные и относительные координаты точки



- z_A, z_B, z_C, y_A, y_B, y_C – абсолютные координаты;
- Δz, Δy – относительные координаты (приращения).

Безосный эпюр

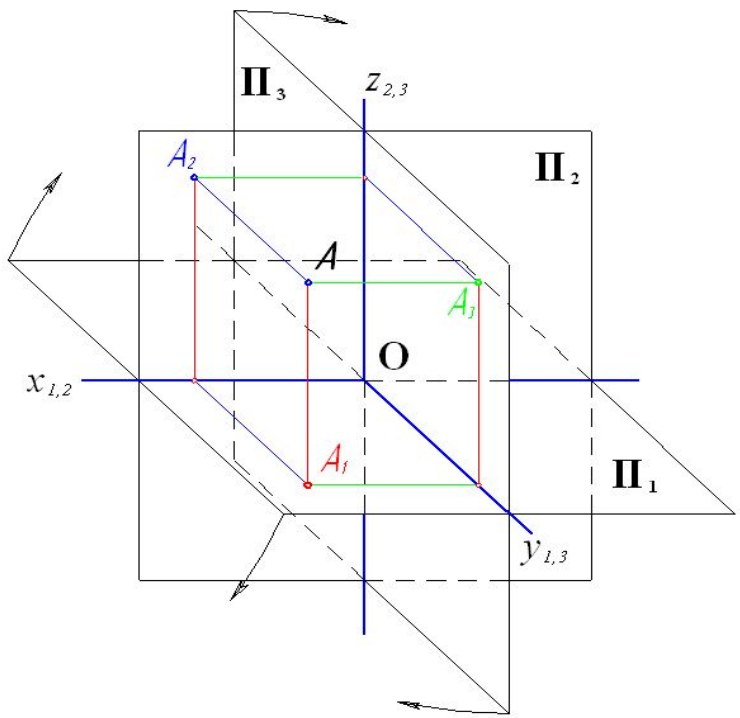


- Точка B выше точки A;
- Точка C перед точкой A;
- Точка D ниже точки A и за точкой A;
- Точка E выше точки A и перед точкой A;
- Точка F ниже точки A и перед точкой A;
- Точка M выше точки A и за точкой A.

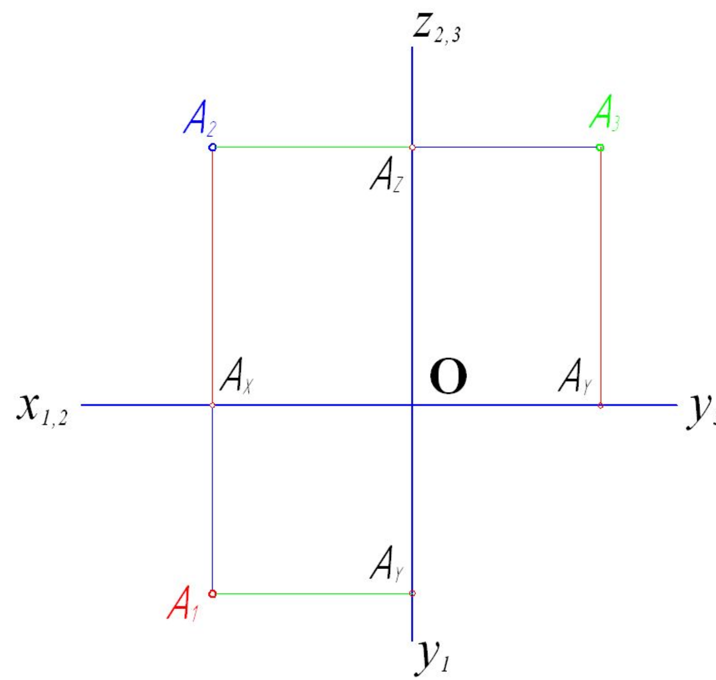
Проецирование точки в системе трех ортогональных плоскостей проекций

Точка в первом октанте

Наглядное изображение



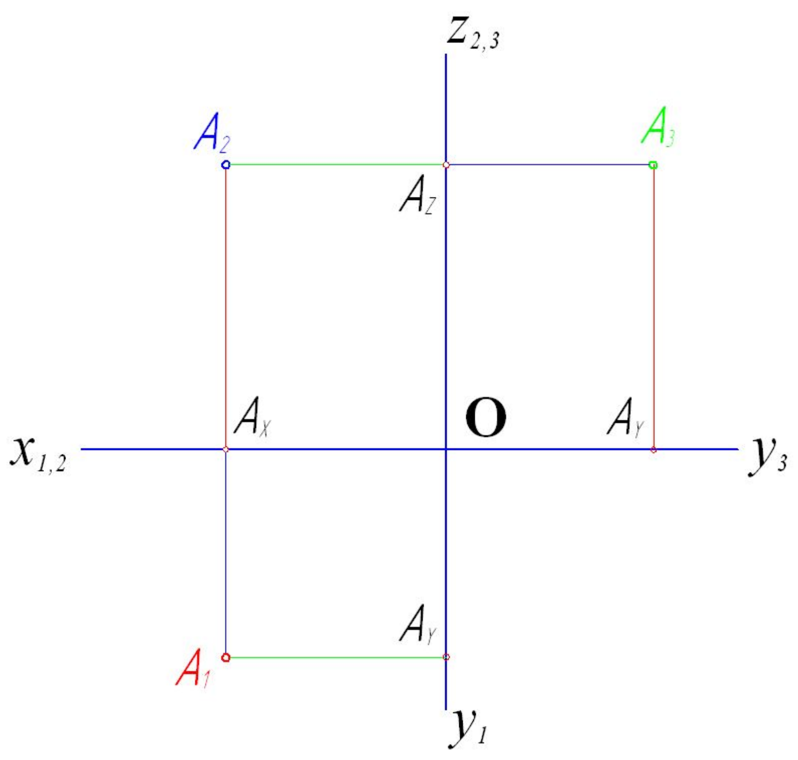
Эпюр



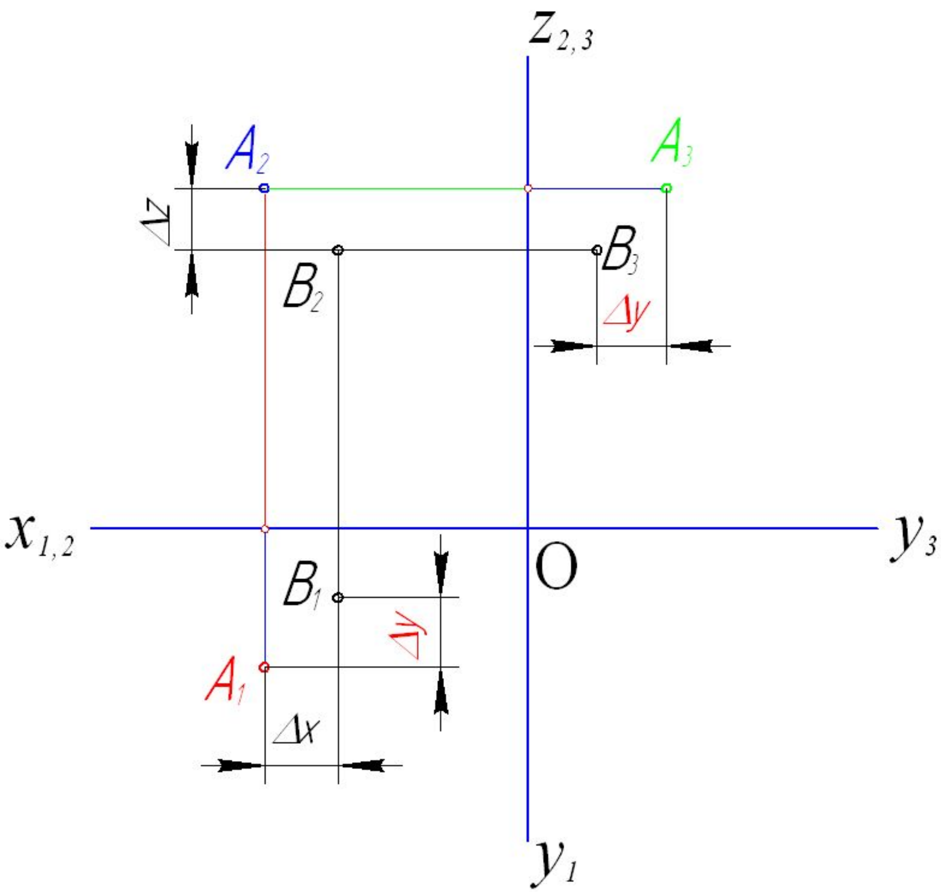
$$\left.\begin{aligned} (A,\Pi_1)&=(A_2,x_{1,2})=z_A \\ (A,\Pi_2)&=(A_1,x_{1,2})=y_A \\ (A,\Pi_3)&=(A_2,z_{2,3})=x_A \end{aligned}\right\} \text{абсолютные координаты точки}$$

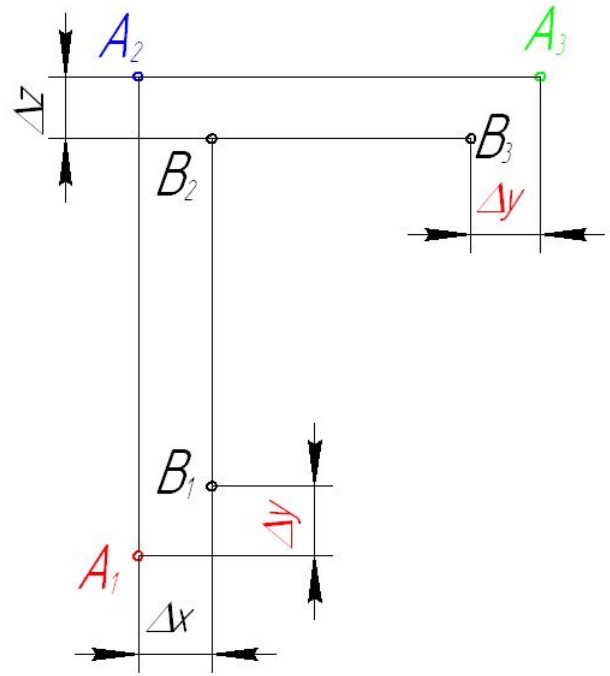
Условия, которым должен удовлетворять эпюр точки, расположенной в любой части пространства, в системе трех ортогональных плоскостей проекций:

- $A_1A_2 \perp x_{1,2}$
- $A_2A_3 \perp z_{2,3}$
- $(A_1,x_{1,2}) = (A_3,z_{2,3})$



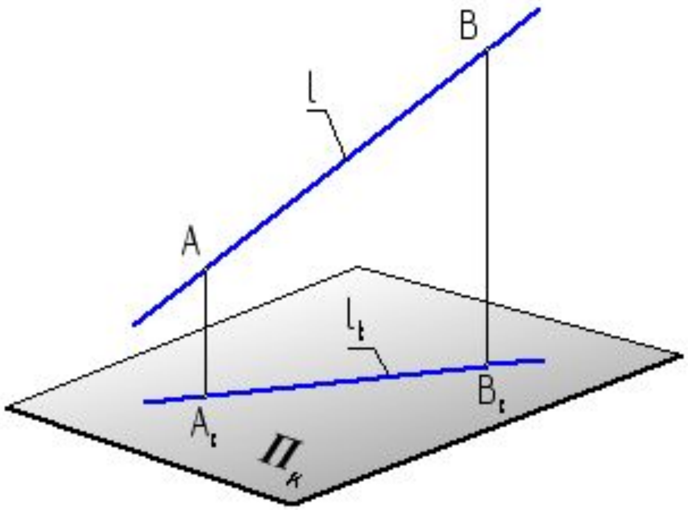
Переход от эпюра в начертательной геометрии к безосному чертежу





Прямая линия

Способы задания прямой на эпюре

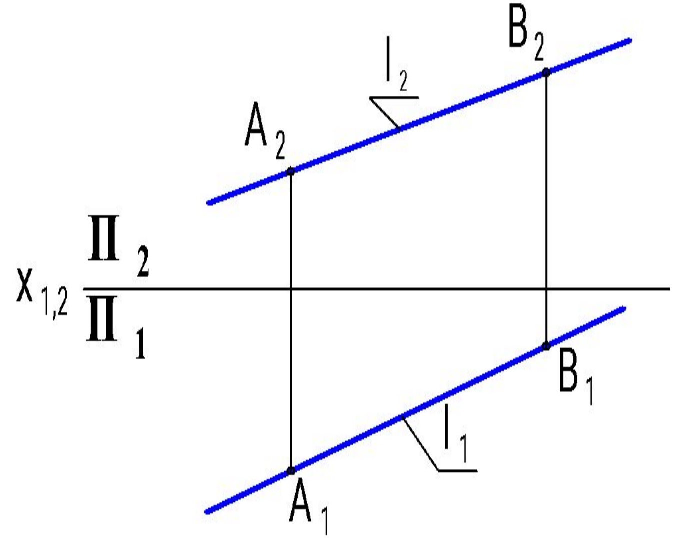


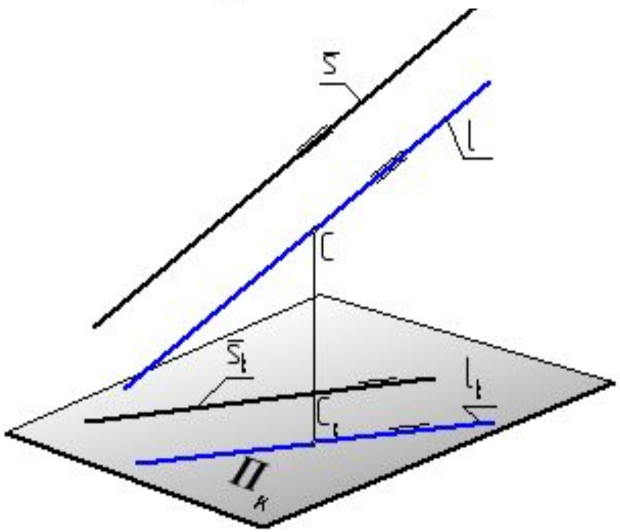
$l\,(A,B)$

$\Downarrow$

$A \in l$

$B \in l$



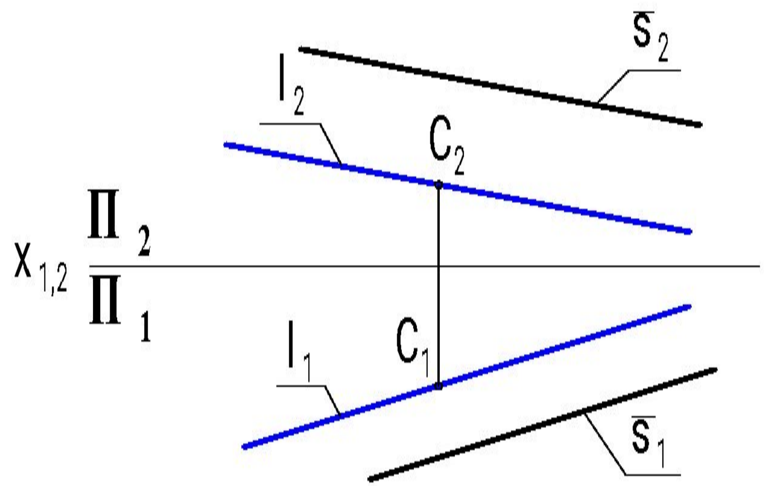


$l\,(C,s)$

$\Downarrow$

$C \in l$

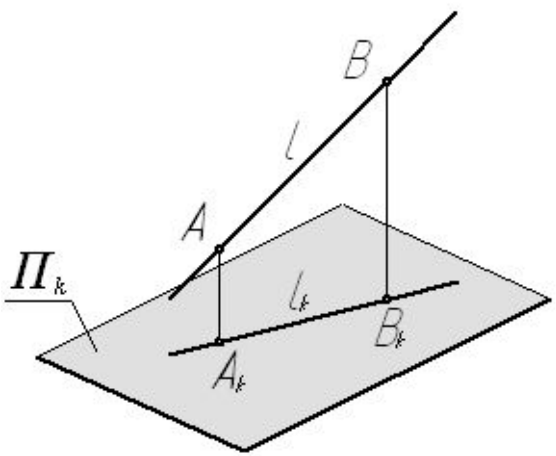
$l \parallel s$



Положение прямой относительно плоскости проекций

Прямая общего положения

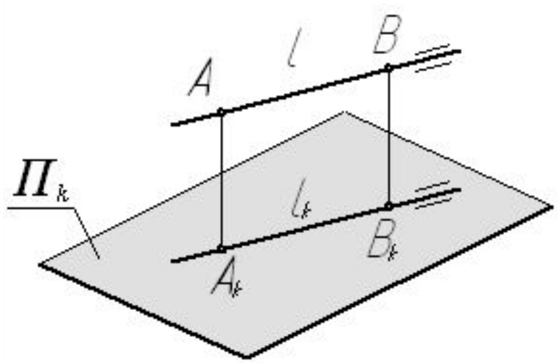
$l \nparallel \Pi_k$ и $l \not\perp \Pi_k$



Прямые частного положения

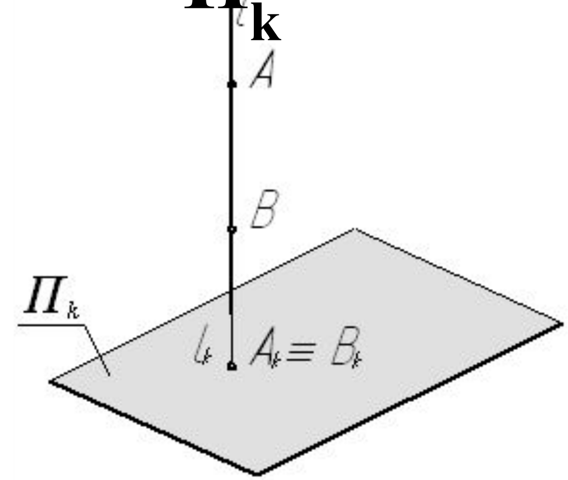
Прямая уровня

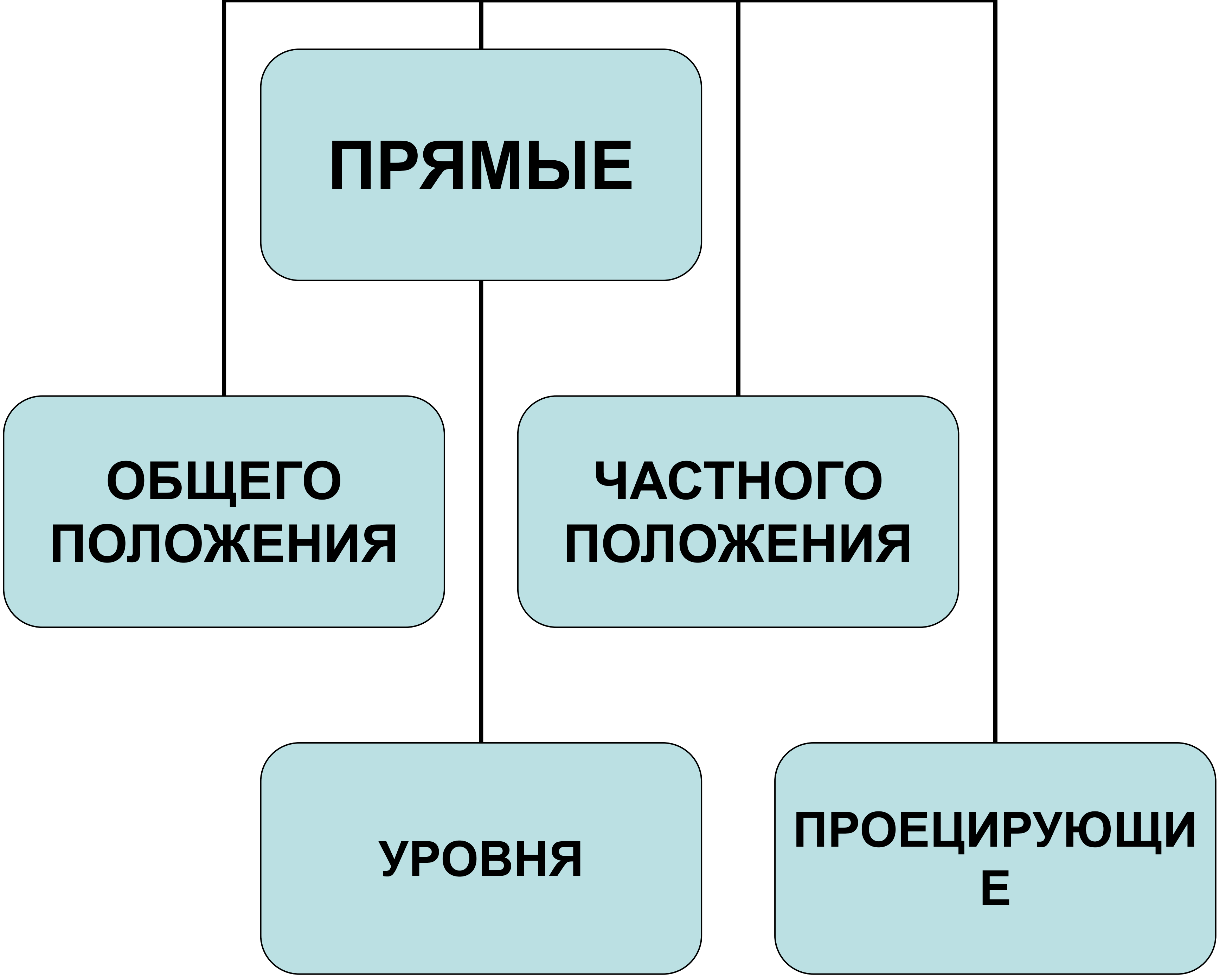
$l \parallel \Pi_k$



Проецирующая прямая

$l \perp \Pi_k$



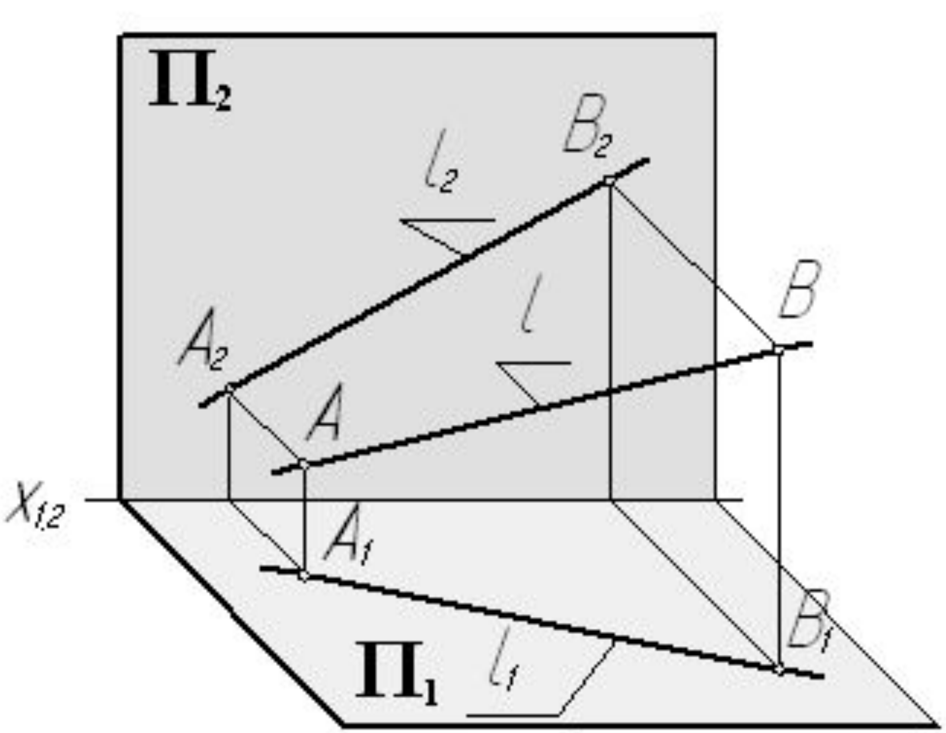

ПРЯМЫЕ
ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ
ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
УРОВНЯ
ПРОЕЦИРУЮЩИЕ

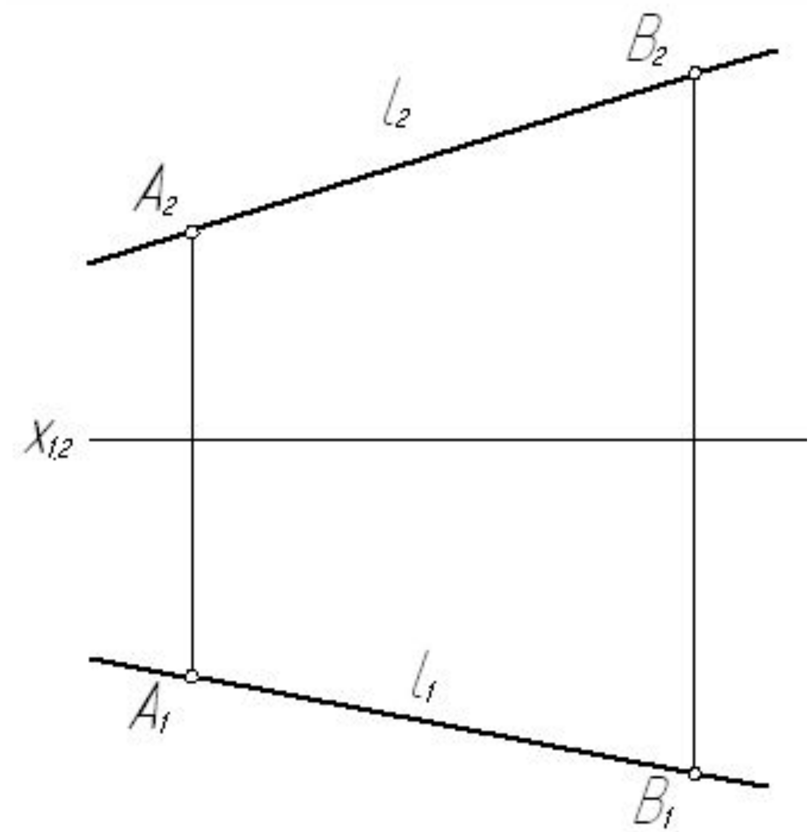
Прямая общего положения

Это прямая не параллельная и
не перпендикулярная
ни одной
из плоскостей проекций

$$l \not\parallel \Pi_k \text{ и } l \not\perp \Pi_k$$

Прямая общего положения





$l \nparallel \Pi_1$ и $l \nparallel \Pi_2$

$l \not\perp \Pi_1$ и $l \not\perp \Pi_2$

$l_1 \nparallel x_{1,2}$ и $l_2 \nparallel x_{1,2}$

$l_1 \not\perp x_{1,2}$ и $l_2 \not\perp x_{1,2}$

Характерная особенность эпюра прямой общего положения – **горизонтальная и фронтальная проекции прямой не параллельны и не перпендикулярны координатной оси $x_{1,2}$**

Прямые частного положения

Это прямые параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций

$$\boldsymbol{l} \parallel \Pi_k \vee \boldsymbol{l} \perp \Pi_k$$

Прямая уровня

Это прямая параллельная какой-либо одной плоскости проекций

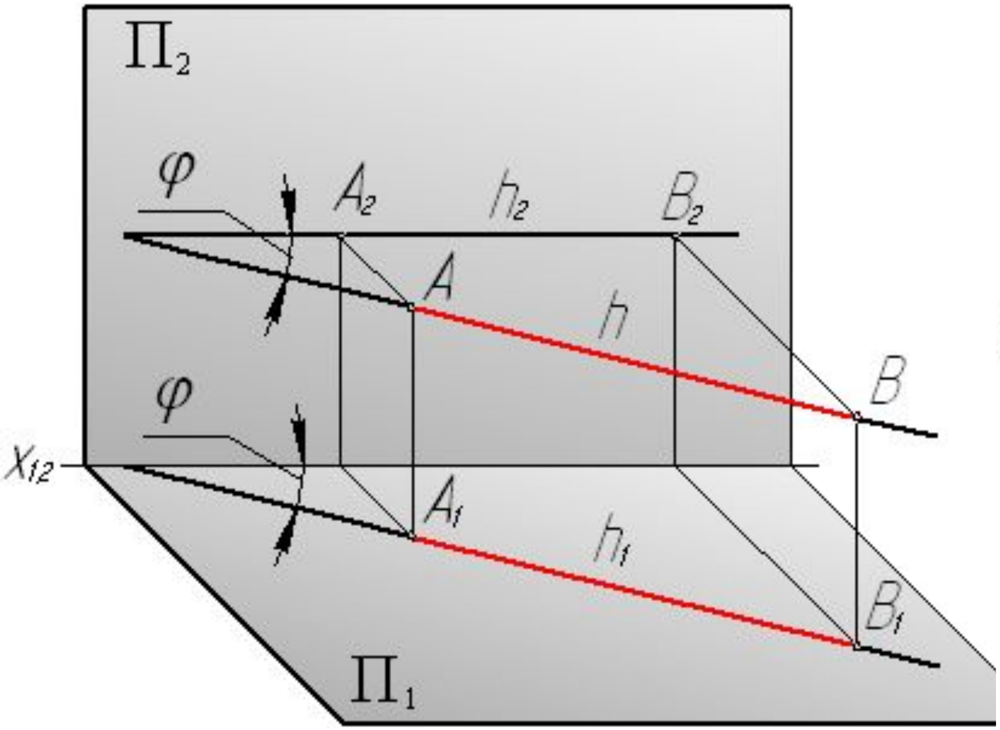
$$l \parallel \Pi_к$$

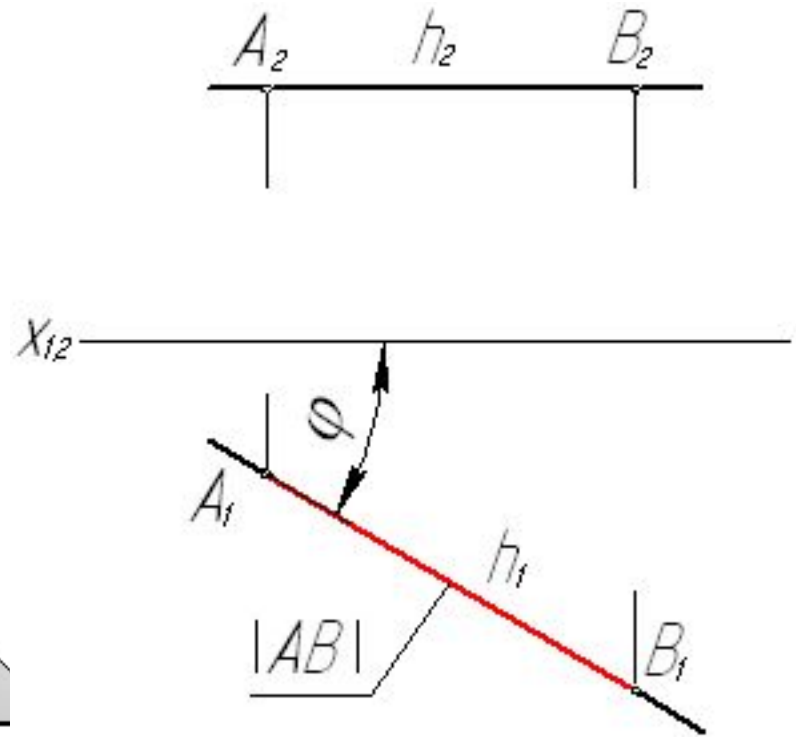
Горизонталь

Это прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций

$$l \parallel \Pi_1 \Rightarrow l \equiv h$$

Горизонталь - *h*





$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

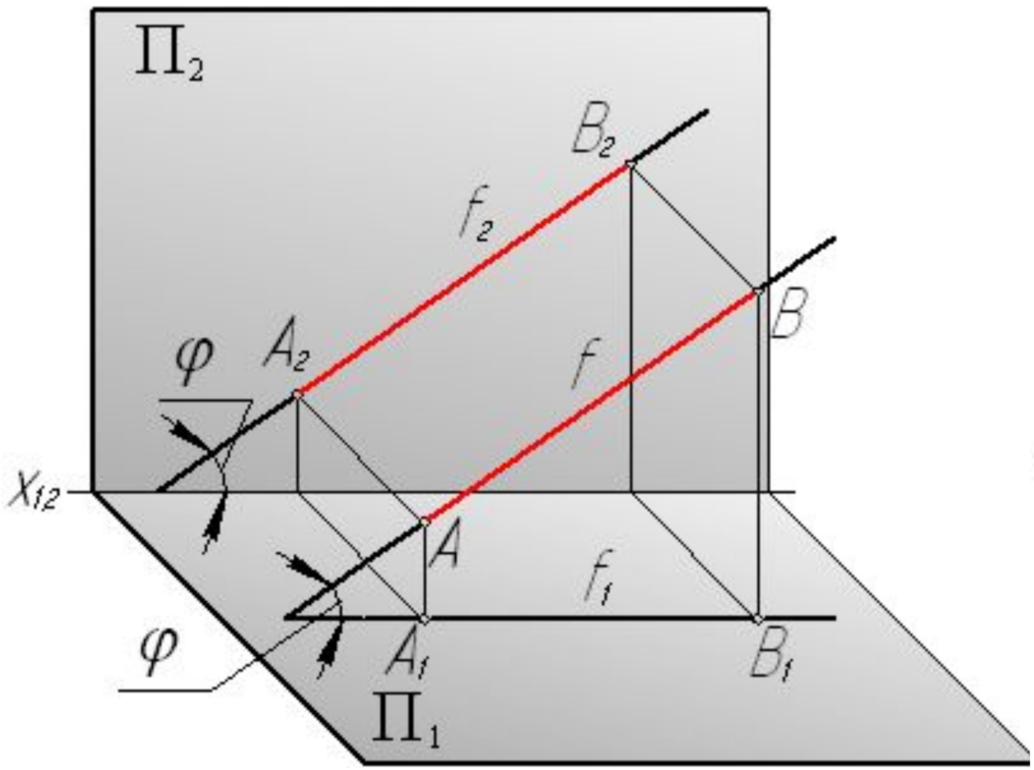
$\angle\phi = h_1(A_1B_1)\,\hat{}$

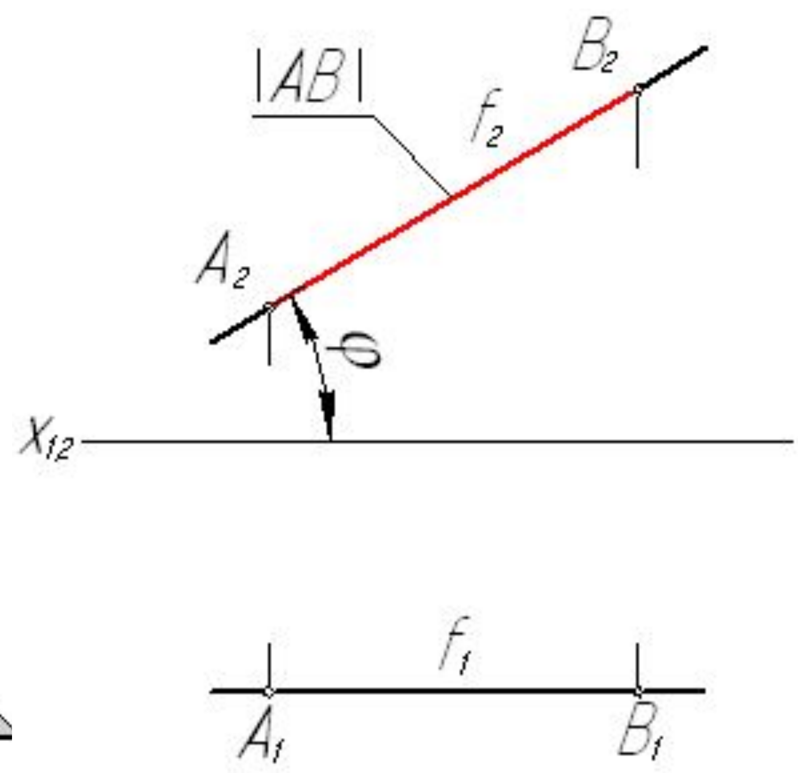
Фронталь

Это прямая параллельная фронтальной плоскости проекций

$$l \parallel \Pi_2 \Rightarrow l \equiv f$$

Фронталь - *f*





$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$

$AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2 \cong |AB|$

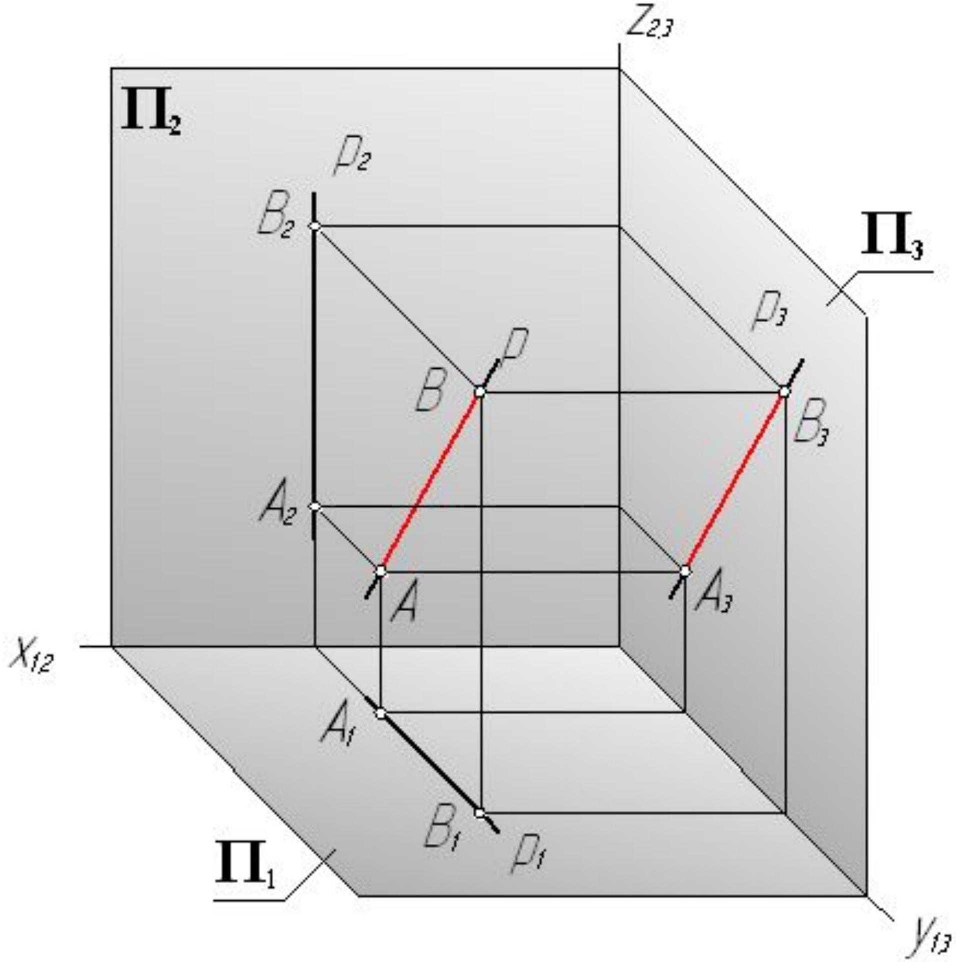
$\angle\phi = f(AB)\hat{}\Pi_1 \quad \angle\phi = f_2(A_2B_2)\ \hat{}\ x_{1,2}$

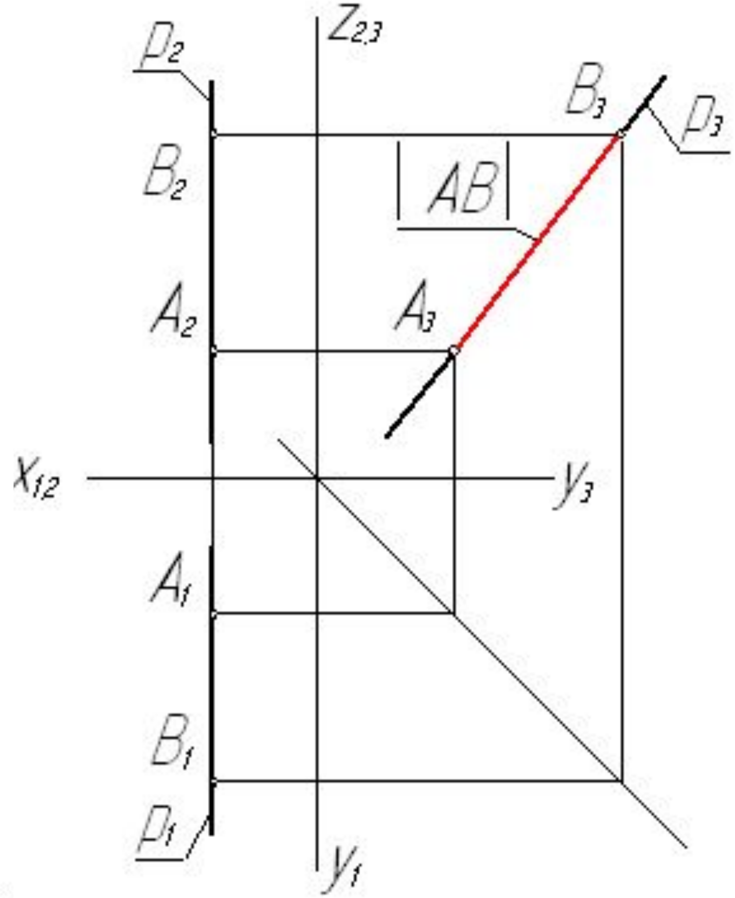
Характерная особенность эпюра горизонтали и фронтали –

одна из проекций параллельна координатной оси $x_{1,2}$

Профильная прямая - *p*

Это прямая параллельная профильной плоскости проекций Π_3





Проецирующая прямая

Прямая перпендикулярная одной из плоскостей проекций

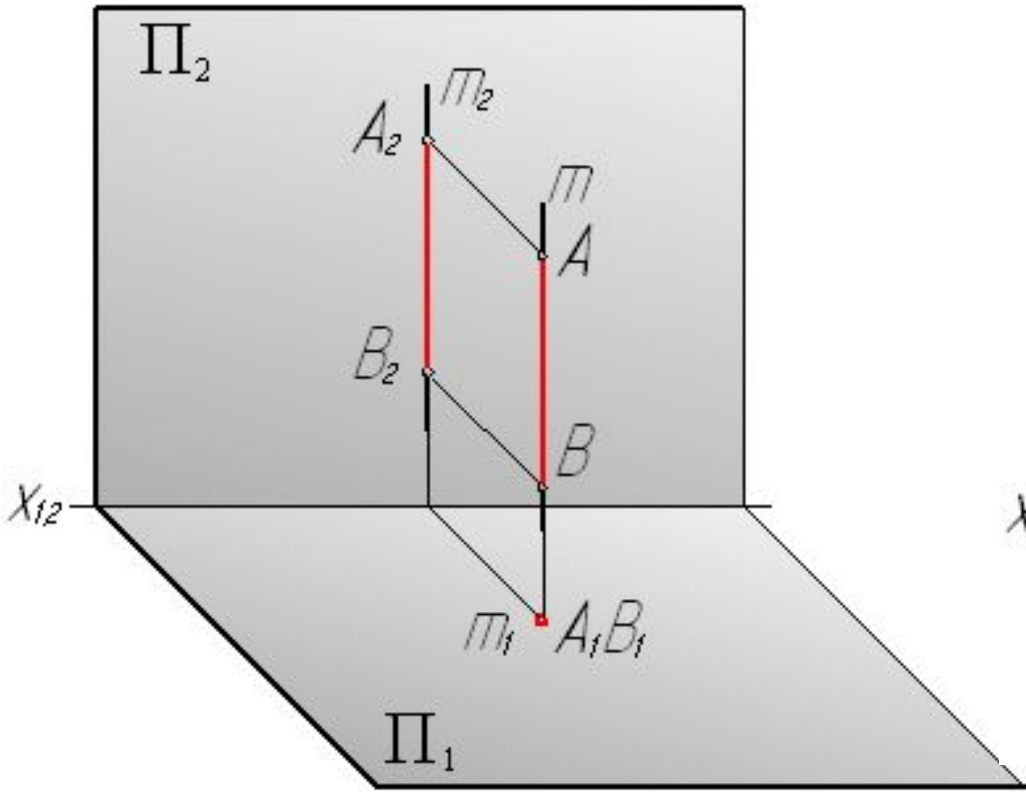
$$m \perp \Pi_к$$

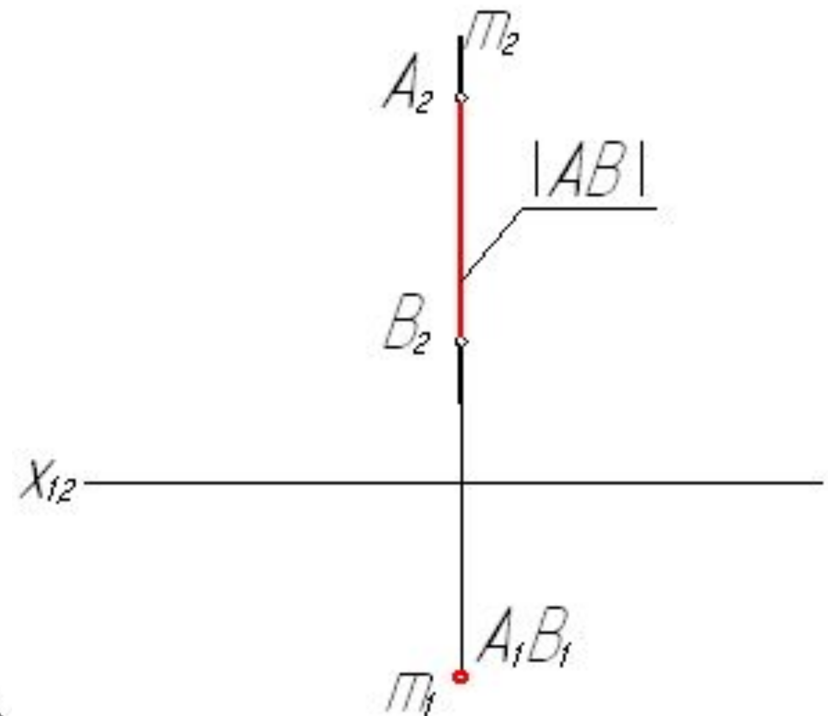
Горизонтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций

$$m \perp \Pi_1$$

Горизонтально-проецирующая прямая





$m \perp \Pi_1 \wedge m \parallel \Pi_2$
$AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_2$

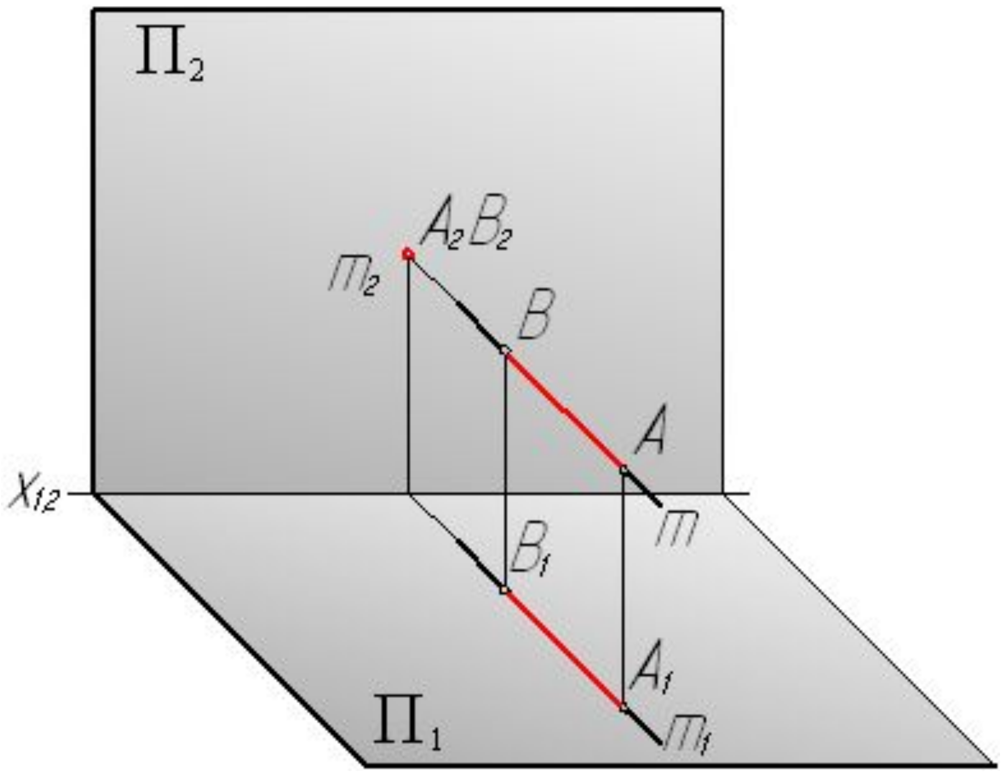
$\Rightarrow m_1$ – точка $\wedge$ $m_2 \perp x_{1,2}$
$\Rightarrow A_1B_1$ - точка $\wedge$ $A_2B_2 \cong |AB|$

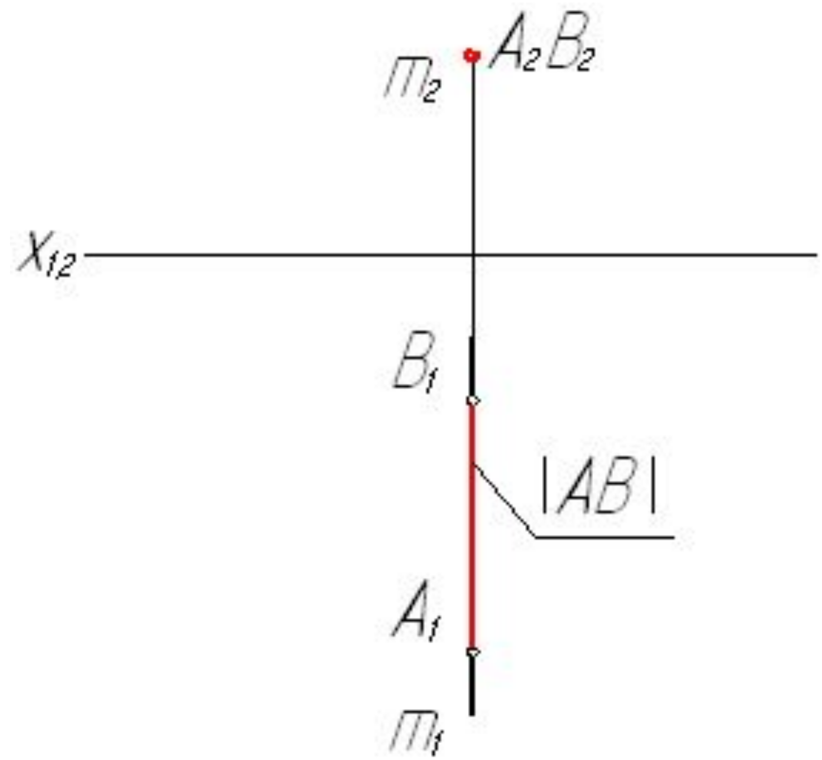
Фронтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций

$$m \perp \Pi_2$$

Фронтально-проецирующая прямая





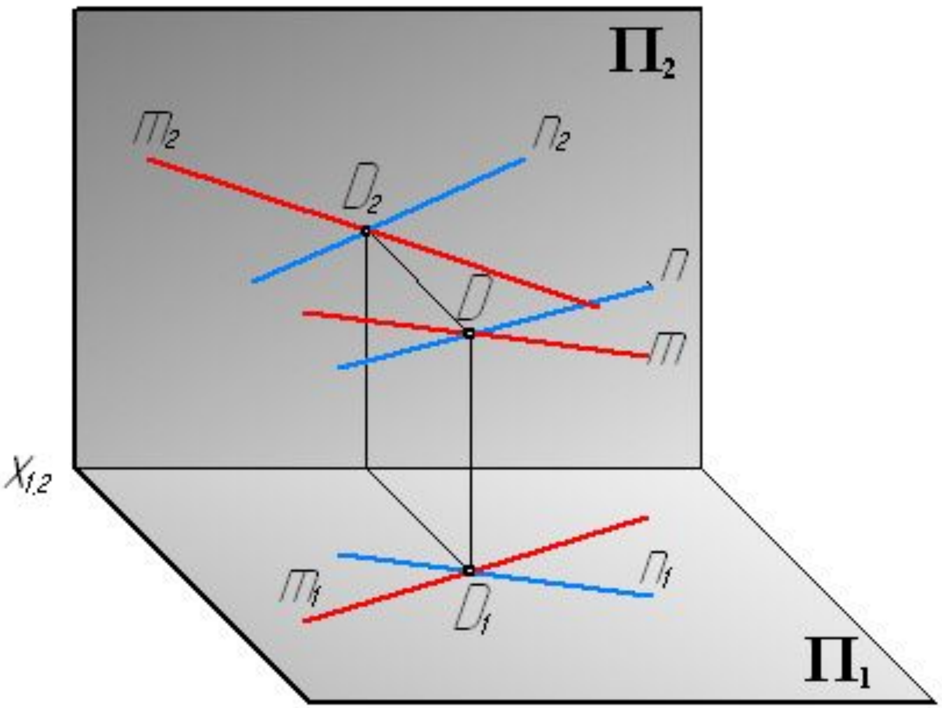
$m \perp \Pi_2 \wedge m \parallel \Pi_1$
$AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_1$

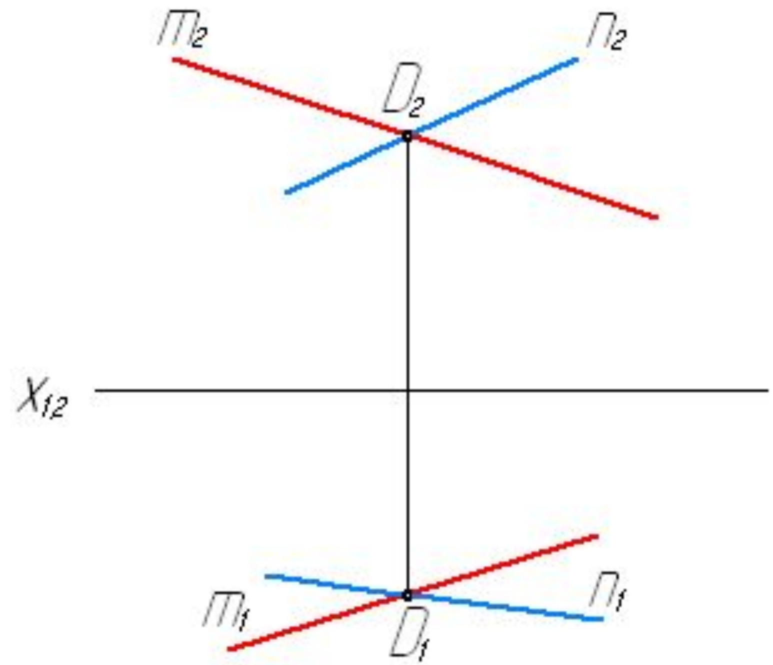
$\Rightarrow m_2$ – точка $\wedge$ $m_1 \perp x_{1,2}$
$\Rightarrow A_2B_2$ - точка $\wedge$ $A_1B_1 \cong |AB|$

Характерная особенность эпюра проецирующей прямой – **одна из проекций прямой точка**

Взаимное положение двух прямых

Пересекающиеся прямые

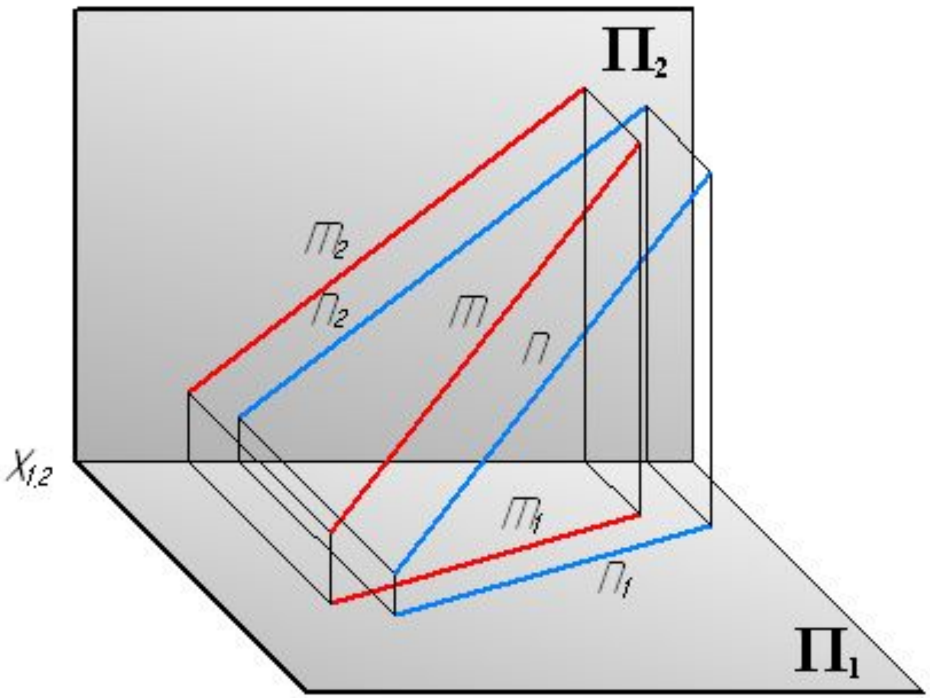


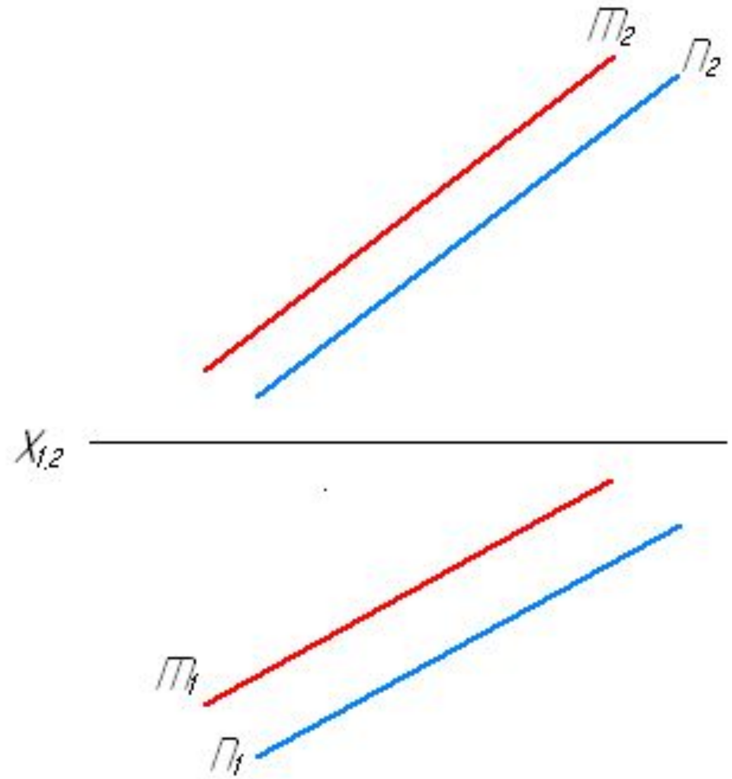


$$m \cap n = D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_k \cap n_k = D_k$$

$$m_1 \cap n_1 = D_1$$
$$m_2 \cap n_2 = D_2$$
$$D_1D_2 \perp x_{1,2}$$

Параллельные прямые





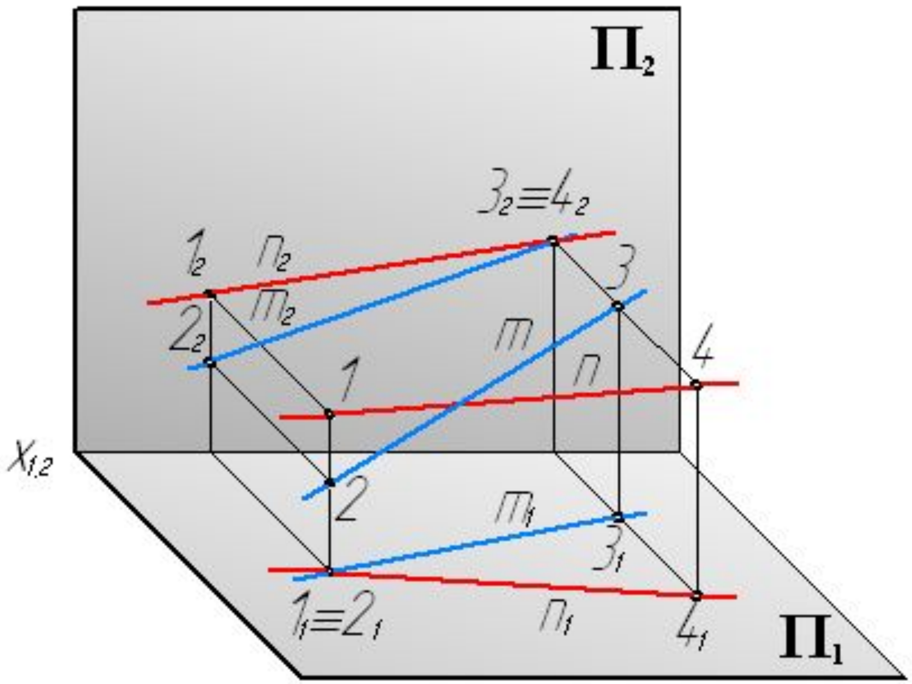
$m \parallel n \Rightarrow$

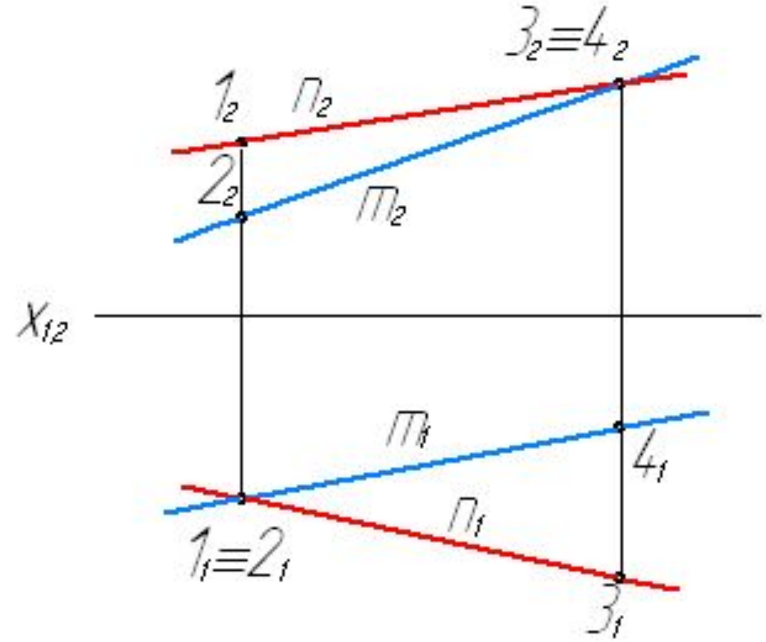
$\Rightarrow m_k \parallel n_k$

$m_1 \parallel n_1$

$m_2 \parallel n_2$

Скрещивающиеся прямые

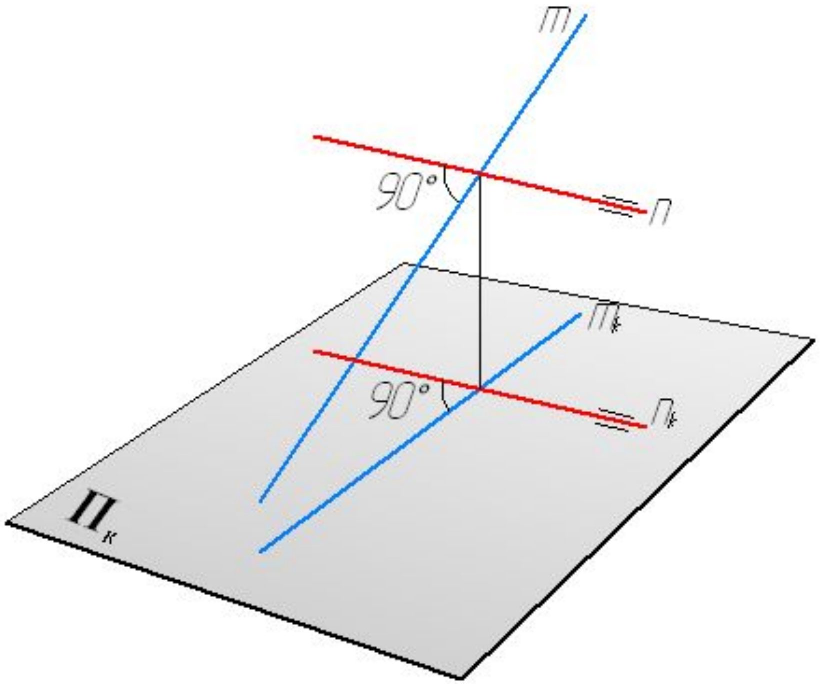




$$m \dot{-} n \Rightarrow m \not\parallel n \wedge m \not\cap n$$

Пары точек (1-2) и (3-4) – конкурирующие точки

Взаимно перпендикулярные прямые



Если $m \perp n$,

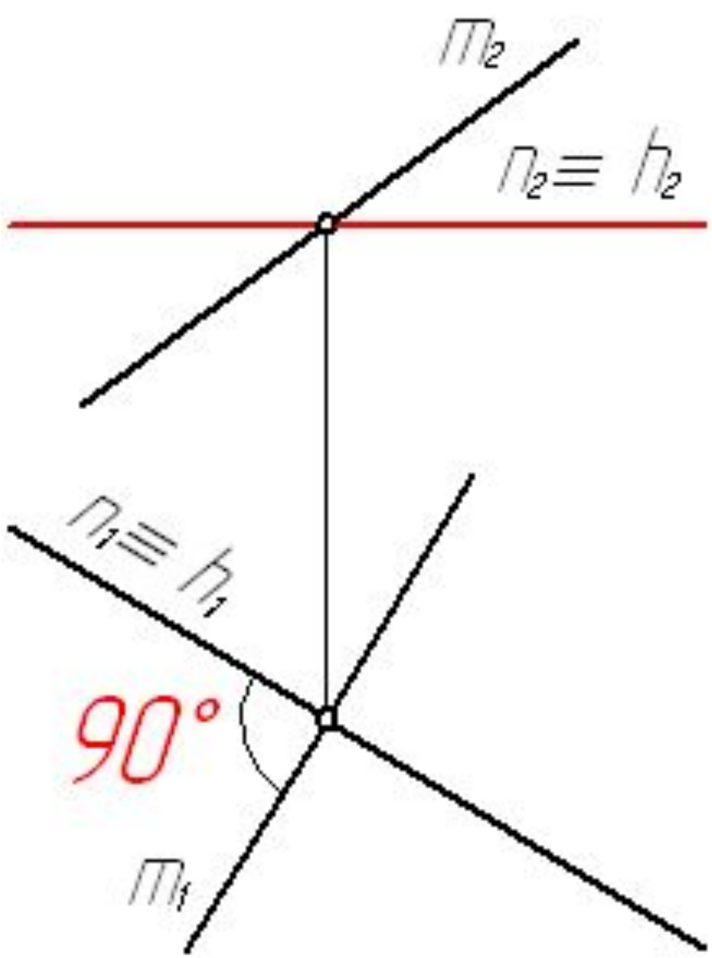
$m \cap n \vee m \,\dot{-}\, n$,

$n \parallel \Pi_k$,

$m \not\perp \Pi_k$,

то $m_k \perp n_k$

Пример. Заданы две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся прямые **m** и **n**. Прямая **n** параллельна горизонтальной плоскости проекций, прямая **m** – прямая общего положения. Построить эпюр этих прямых.



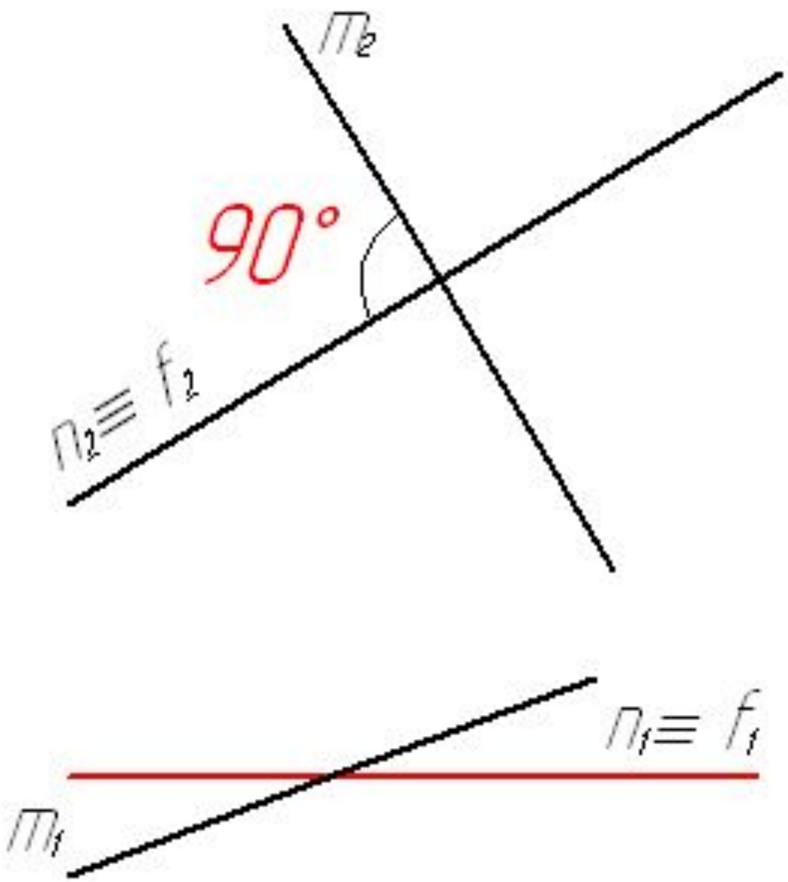
$$m \perp n \ \wedge \ m \cap n$$

$$n \parallel \Pi_1 \Rightarrow n \equiv h \text{ и } n_2 \parallel x_{1.2}$$

$$m \not\perp \Pi_1$$

$$\Rightarrow m_1 \perp n_1$$

<u>Пример</u>. Заданы две взаимно перпендикулярные и скрещивающиеся прямые **m** и **n**. Прямая **n** параллельна фронтальной плоскости проекций, прямая **m** – прямая общего положения. Построить эпюр этих прямых.



$m \perp n \wedge m \,\dot{-}\, n$

$n \parallel П_2 \Rightarrow n \equiv f$ и $n_1 \parallel X_{12}$

$m \not\perp П_2$

$\Rightarrow m_2 \perp n_2$