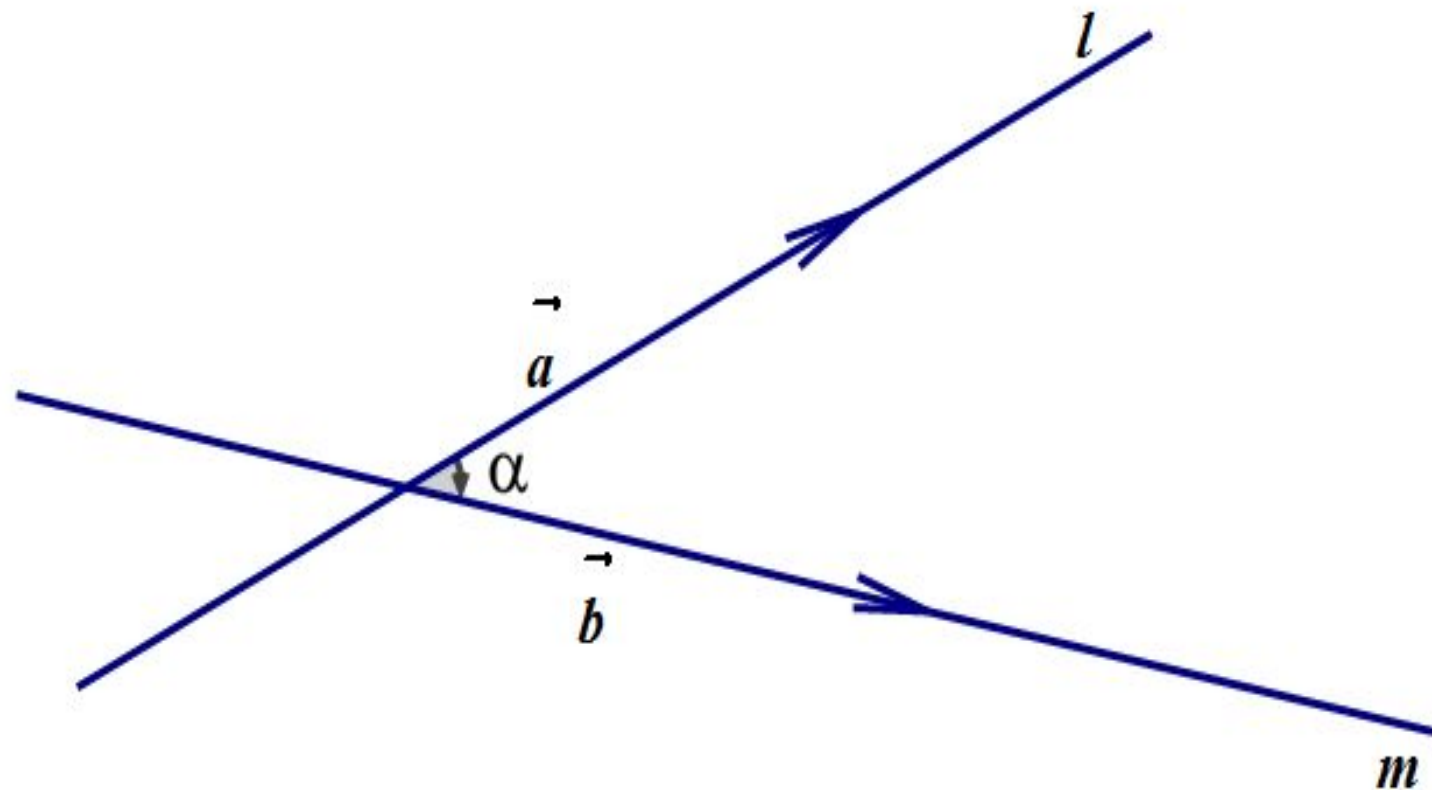


**Решение стереометрических задач методом координат.
Построение сечений**

Угол между прямыми

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$
и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.



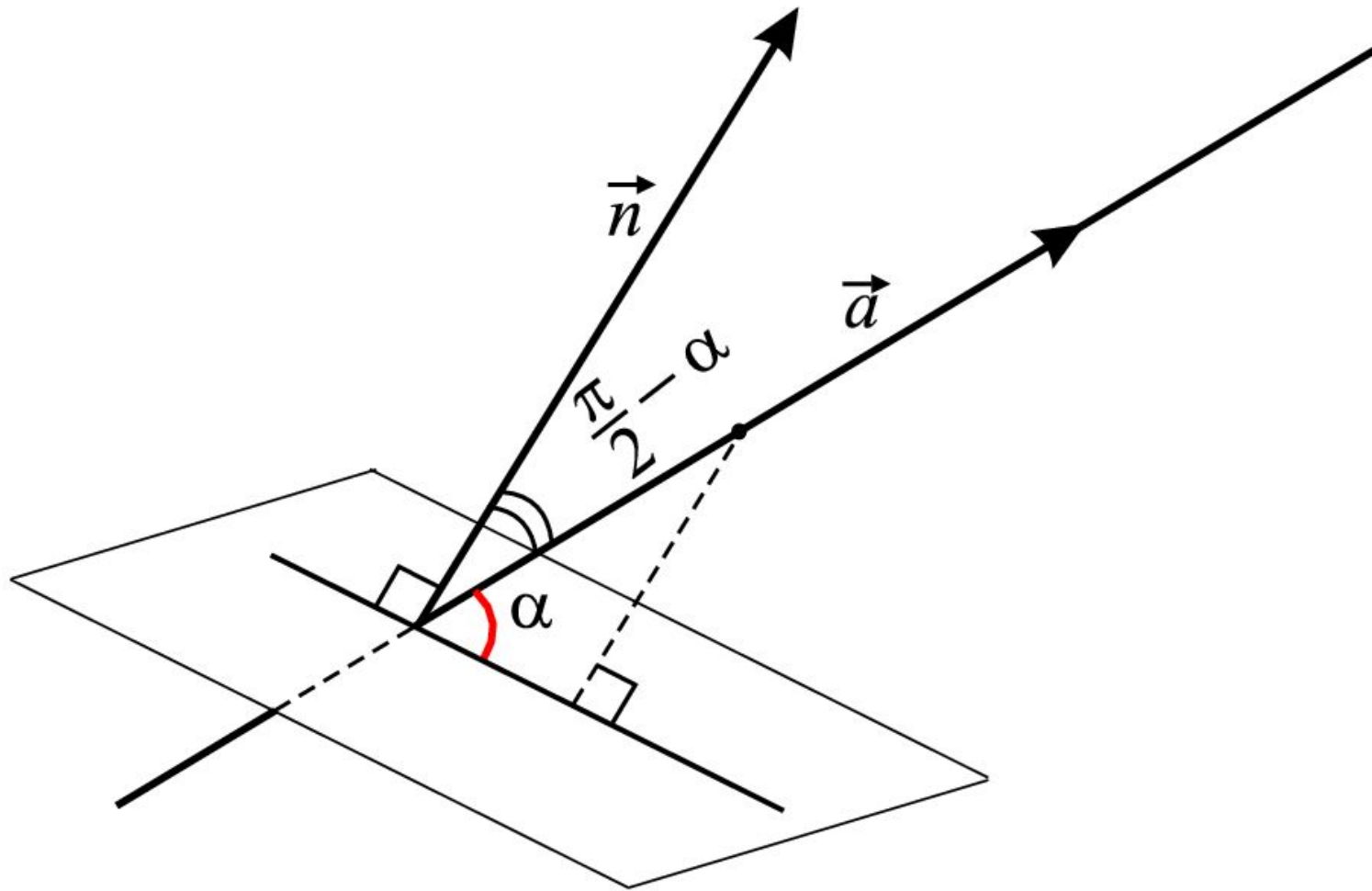
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{a \cdot b} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{a \cdot n}$$

$\vec{a}$ — направляющий вектор
прямой

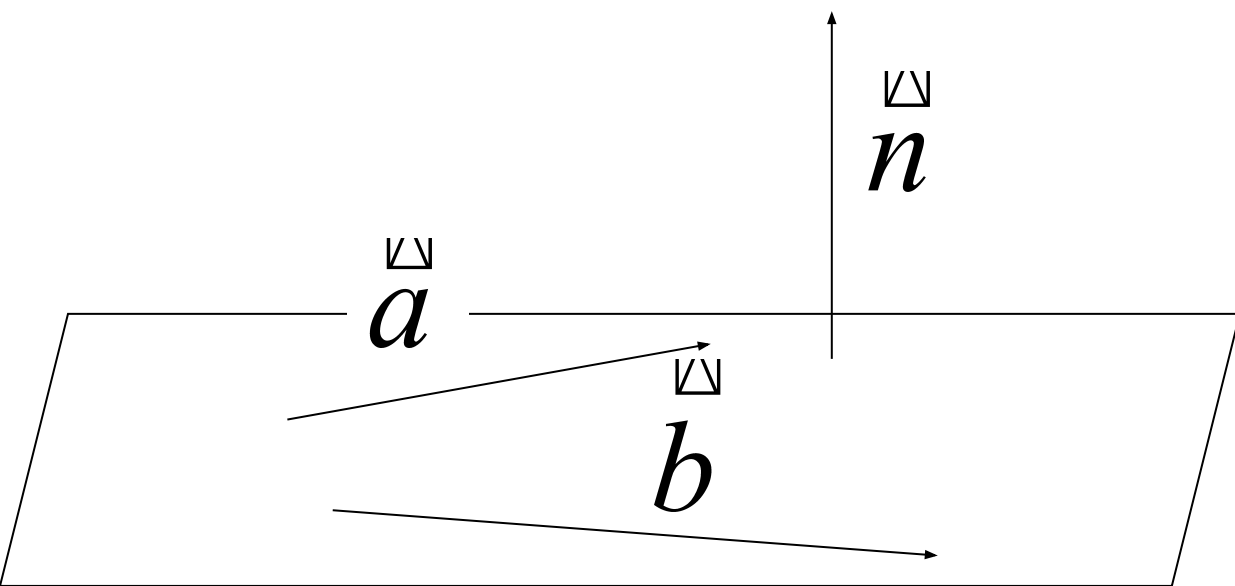
$\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости



Координаты вектора нормали к плоскости

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{n}(x, y, z) - ?$$

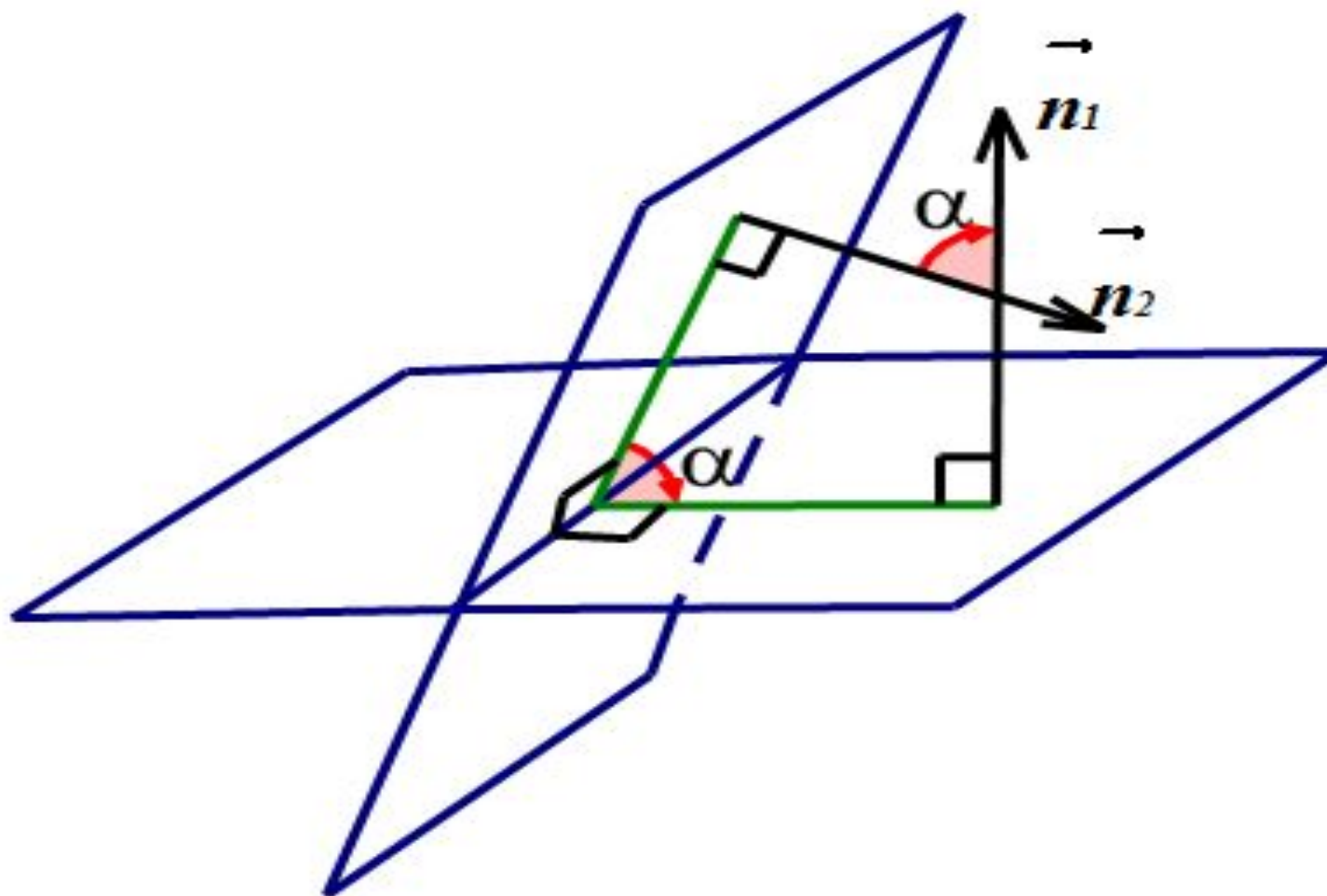


$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

Угол между плоскостями

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{n_1 \cdot n_2}$$

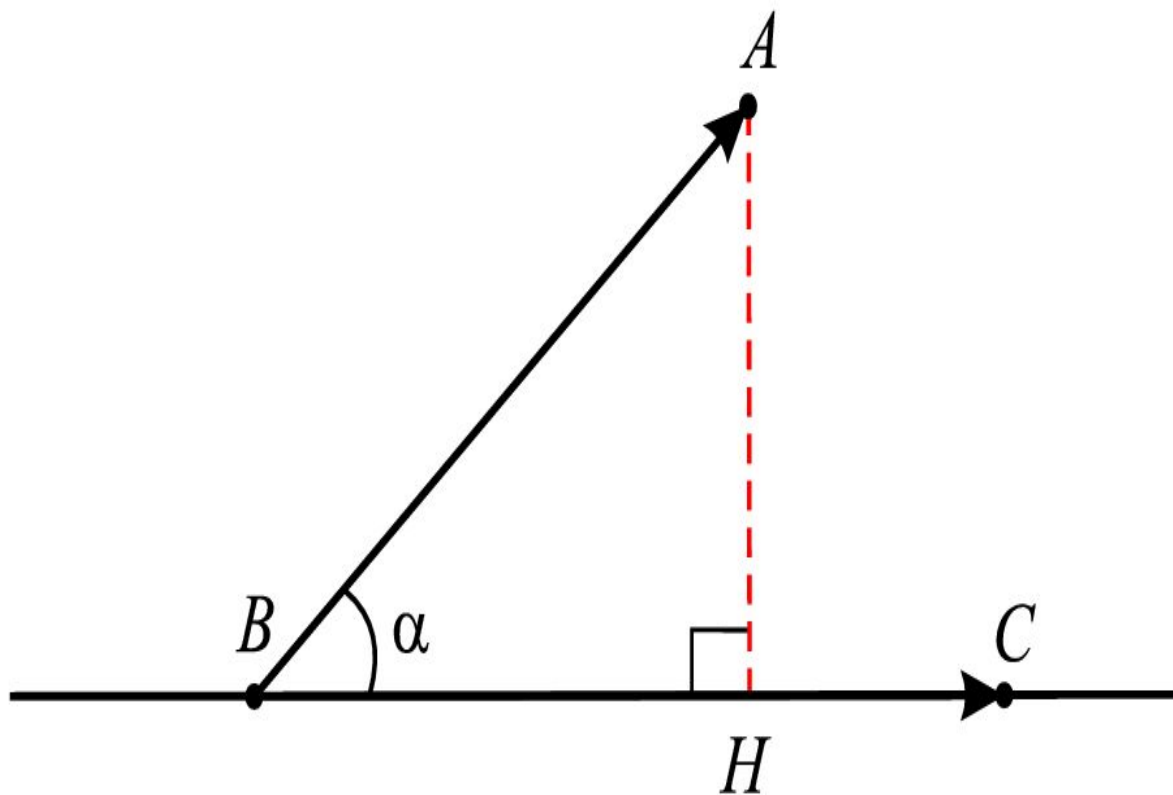


Расстояние от точки до прямой

$$\rho(A, BC)$$

$$1) \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{BA \cdot BC}$$

$$2) AH = AB \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$



Расстояние от точки до плоскости

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

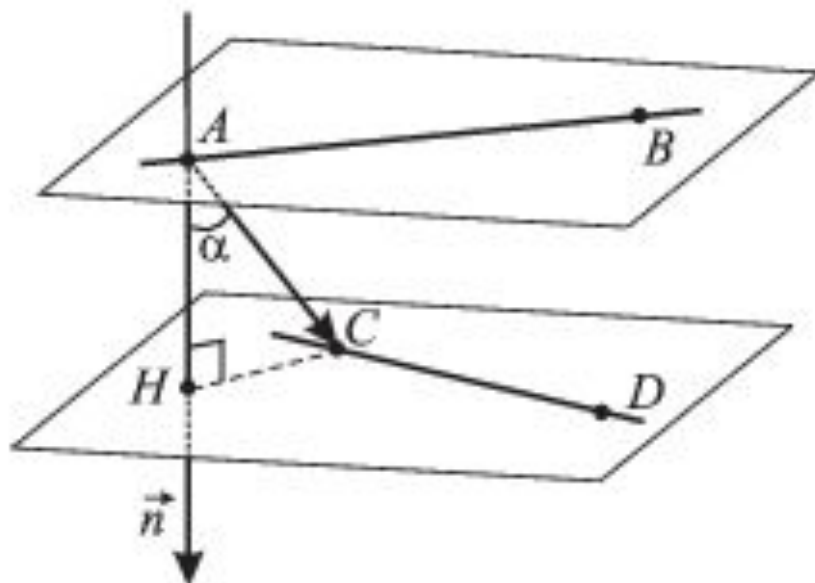
где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки,

$ax + by + cz + d = 0$ - уравнение плоскости.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми (метод координат)

- 1) Классический метод — построение отрезка общего перпендикуляра и нахождение его длины.
- 2) Проектирование.
- 3) Метод координат. Использование вспомогательной плоскости.
- 4) Метод координат. Проекция на нормаль.
- 5) Векторный метод.

Найти расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD .



$\vec{n}$ — произвольный вектор, который перпендикулярен обеим прямым, а следовательно, и обеим этим плоскостям. Видно, что искомое расстояние между прямыми AB и CD равно AH и представляет собой длину проекции вектора AC на вектор $\vec{n}$. Легко понять, что вместо вектора $\vec{AC}$ можно взять любой вектор, начало которого лежит на одной прямой, а конец — на другой.

Алгоритм

1) Вводим систему координат и определяем в ней координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

2) Находим координаты какого-нибудь вектора $\vec{n}(x, y, z)$, перпендикулярного обоим векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Это можно сделать уже привычным для читателя способом, используя условия перпендикулярности:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$$

3) Находим координаты какого-нибудь вектора, начало которого лежит на одной прямой, а конец — на другой. Пусть, например, это будет вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{n}$ можно из определения скалярного произведения, а именно: скалярному произведению $\vec{n} \cdot \vec{a}$ соответствует умножение длины вектора $\vec{n}$ на проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = |\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cos \alpha = |\vec{n}| \cdot \text{Пр}_{\vec{n}} \vec{a},$$

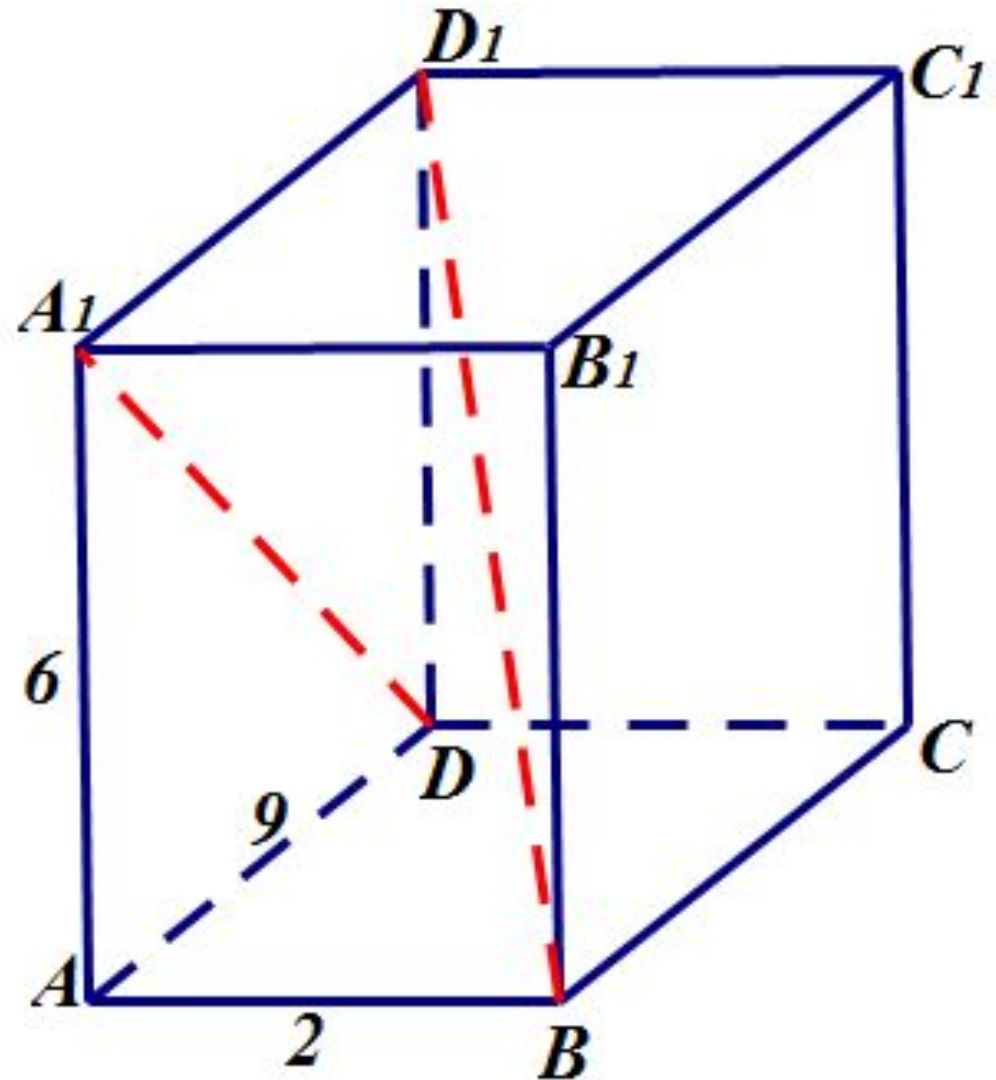
где $\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{a}$ — искомая проекция. Отсюда расстояние между прямыми можно вычислить по формуле

$$\rho = |\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{a}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}|}.$$

Задача

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
 $AB=2$, $AD=9$, $AA_1=6$.

Найдите угол между
прямыми A_1D и BD_1 .



Решение. 1 способ (метод координат)

$$D(0; 0; 0), B(9; 2; 0);$$

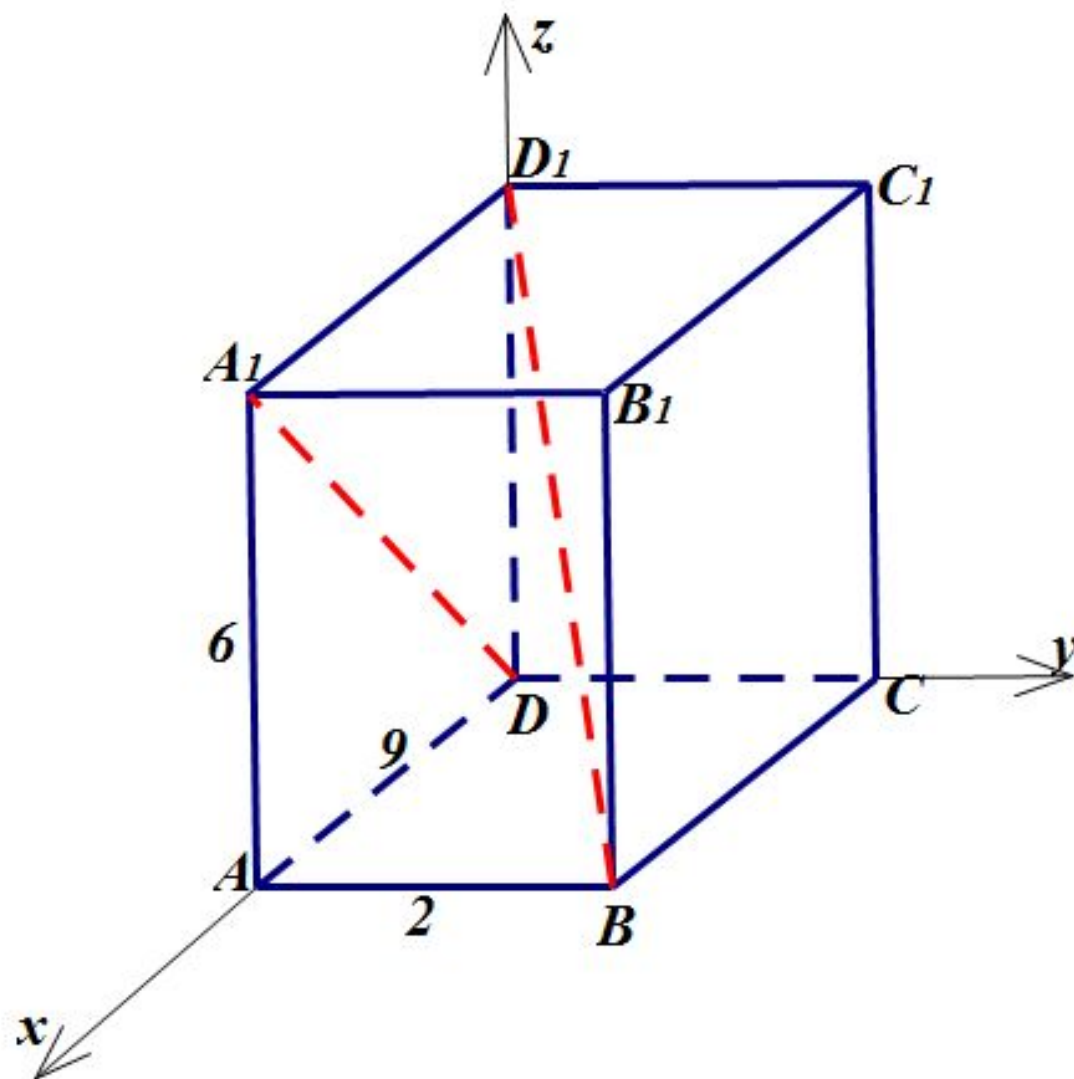
$$A_1(9; 0; 6); D_1(0; 0; 6)$$

$$\overrightarrow{DA_1}\{9; 0; 6\}; DA_1 = 3\sqrt{13}.$$

$$\overrightarrow{BD_1}\{-9; -2; 6\}; BD_1 = 11.$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{BD_1}|}{DA_1 \cdot BD_1}.$$

$$\cos\alpha = \frac{|-81 + 36|}{3\sqrt{13} \cdot 11} = \frac{15}{11\sqrt{13}}.$$



2 способ (геометрический)

$$D(0; 0; 0), B(9; 2; 0);$$

$$A_1(9; 0; 6); D_1(0; 0; 6)$$

$$\overrightarrow{DA_1}\{9; 0; 6\}; DA_1 = 3\sqrt{13}.$$

$$\overrightarrow{BD_1}\{-9; -2; 6\}; BD_1 = 11.$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{BD_1}|}{DA_1 \cdot BD_1},$$

$$\cos\alpha = \frac{|-81 + 36|}{3\sqrt{13} \cdot 11} = \frac{15}{11\sqrt{13}}.$$

