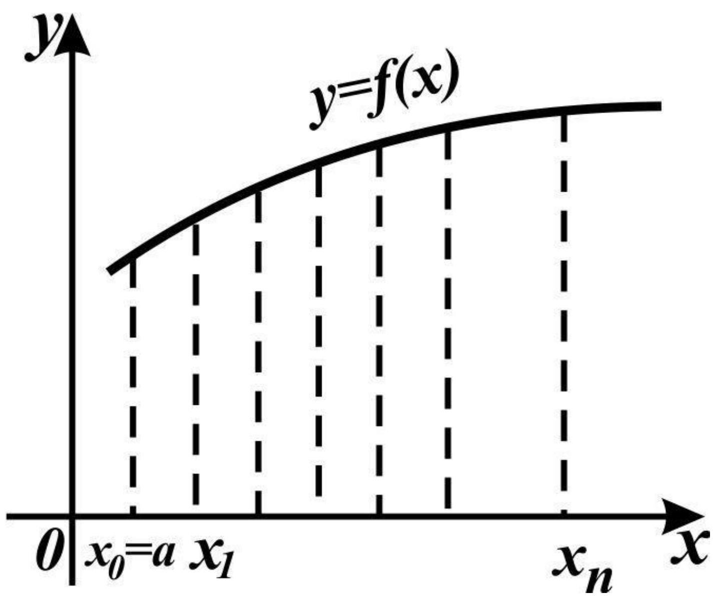
Интегральное исчисление

Определенный интеграл

Пусть на отрезке [a; b] задана непрерывная функция $y=f(x)$. Зададим произвольное разбиение отрезка [a; b] на n частей точками:

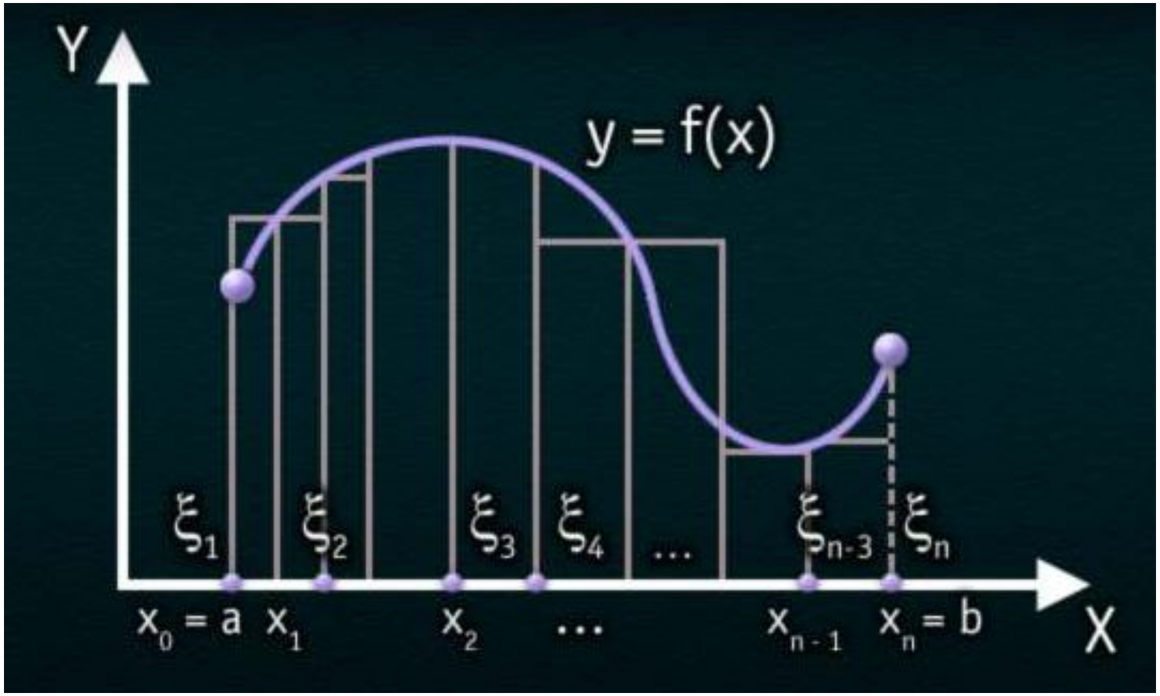
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = b.$$



Найдем длину каждого отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

В каждом из отрезков разбиения выберем произвольную точку ξ_i $\left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и вычислим значение функции в каждой из этих точек:

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots , f(\xi_n).$$



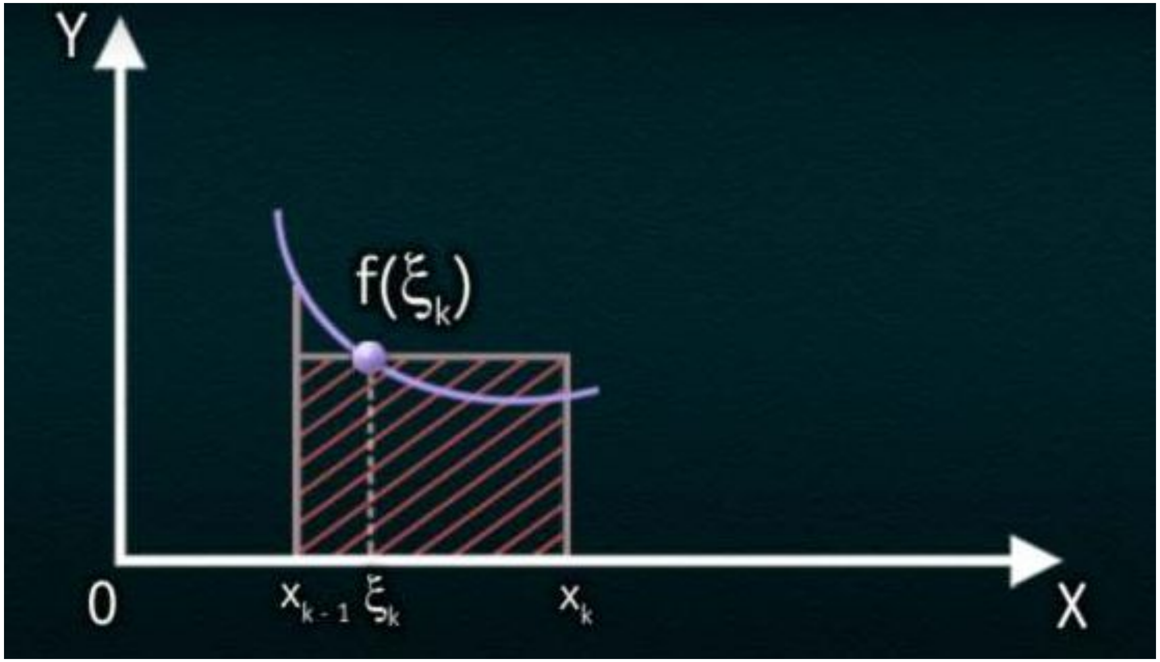
Составим сумму вида:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма S_n называется интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Сумма S_n зависит от способа разбиения отрезка $[a;\, b]$ на отрезки $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ и от выбора точки ξ_i внутри каждого отрезка.

Рассмотрим элемент разбиения: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,
$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, $y = f(\xi_k)$.



Произведение вида $f(\xi_k)\Delta x_k$ равняется площади одного из прямоугольников разбиения.

Таким образом, геометрический смысл интегральной суммы состоит в том, что она выражает площадь некоторой ступенчатой фигуры.

Зададим разбиения таким образом, чтобы $\max \Delta x_i \to 0,$ тогда число отрезков разбиения будет стремиться к бесконечности $\left(n \to \infty\right)$ и составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

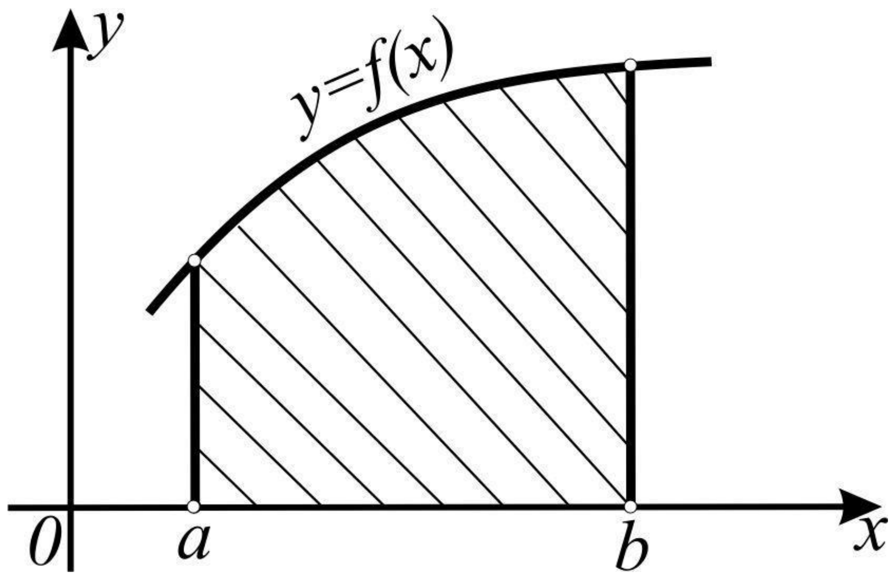
Предположим, что последовательность интегральных сумм S_n стремится к некоторому пределу S.

Определение: Если при любом разбиении отрезка [a; b] таком, что $\max \Delta x_i \to 0$ и при любом выборе точек ξ_i внутри отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ интегральная сумма S_n стремится к одному и тому же пределу S, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $y=f(x)$ на отрезке [a; b] и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Числа a и b называют соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, [a; b] – отрезок интегрирования, x – переменная интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что, если $f(x) \geq 0$ определенный интеграл численно выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Замечания:

1. Определенный интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не зависит от переменной интегрирования, которую можно обозначать любой буквой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz.$$

2. Если в определенном интеграле границы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C\cdot f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx,$$ где С – постоянное число.

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Если $a=b$, то $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

4. Если $f(x)$ – четная функция, то

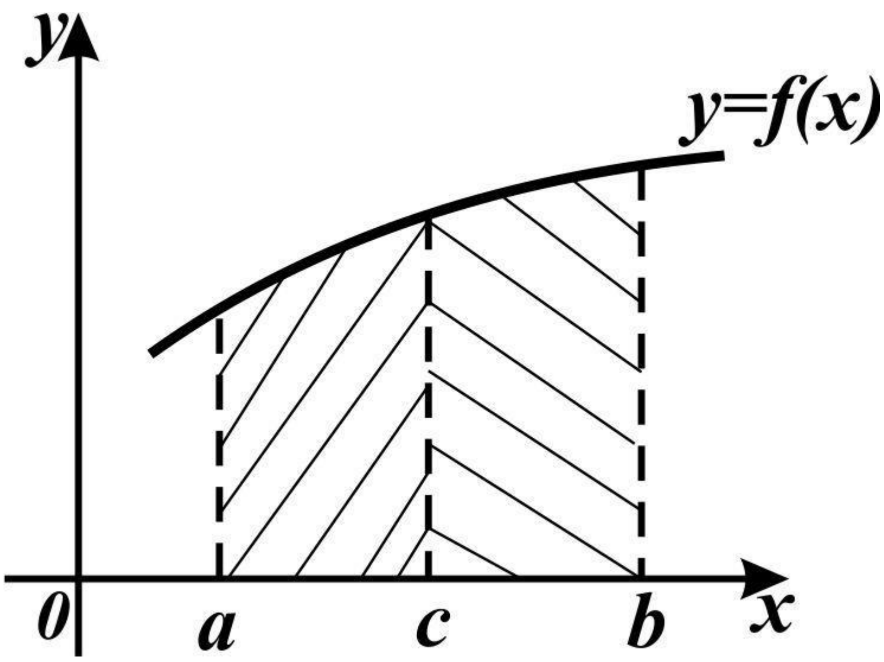
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

5. Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

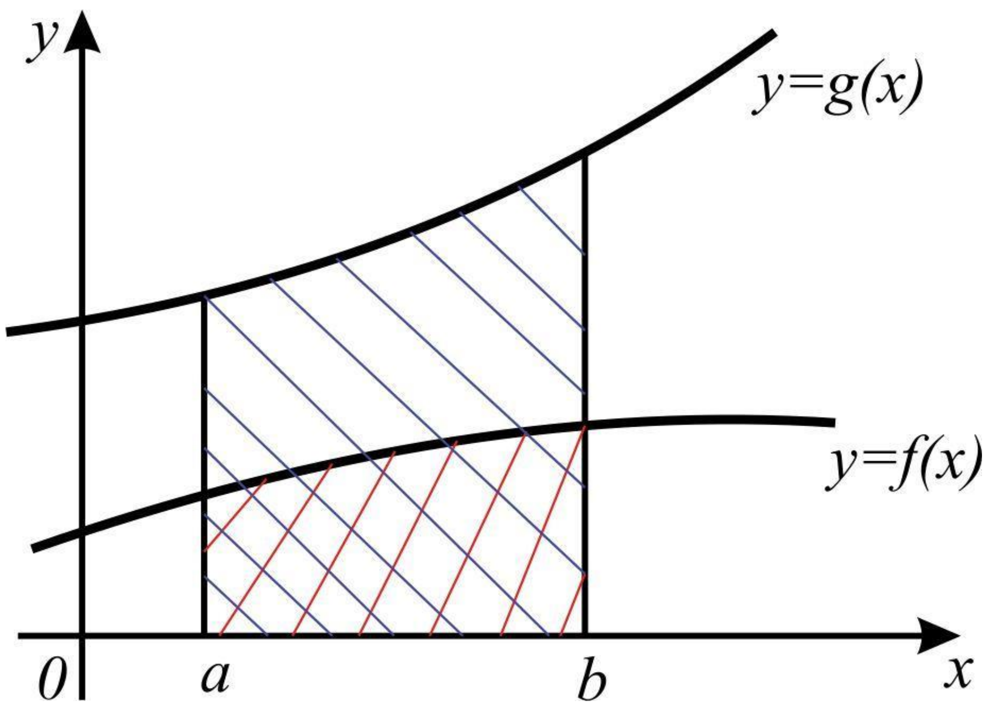
6. Для любых трех чисел a, b и c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



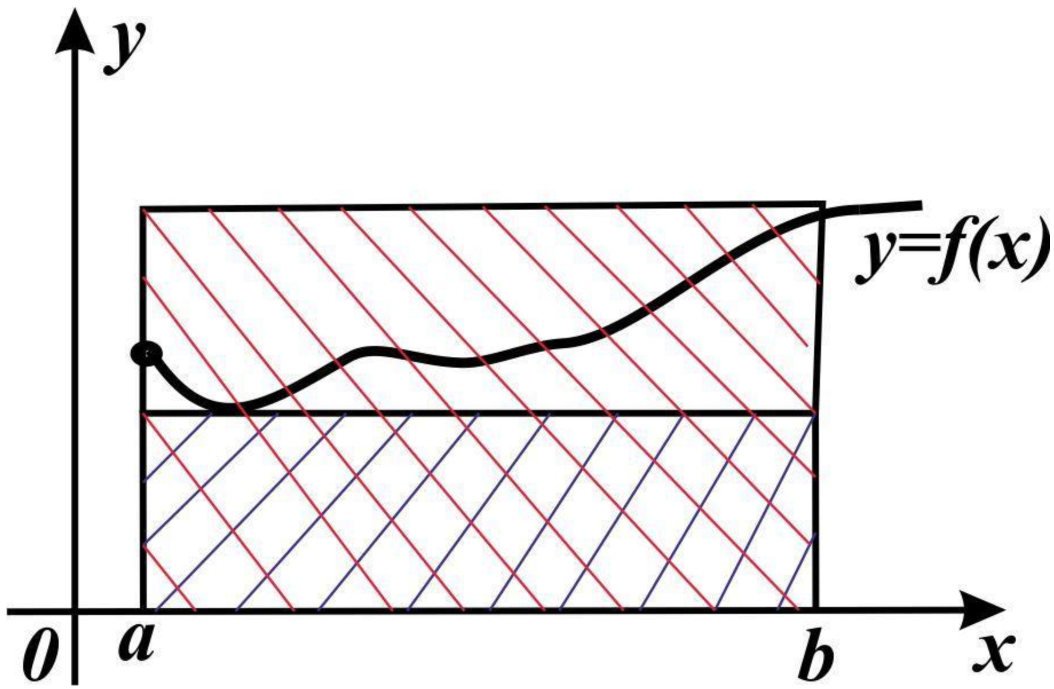
7. Если на отрезке $[a; b]$ выполняется условие $f(x) \leq g(x)$, то справедливо неравенство:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$



8. Если m и M – наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

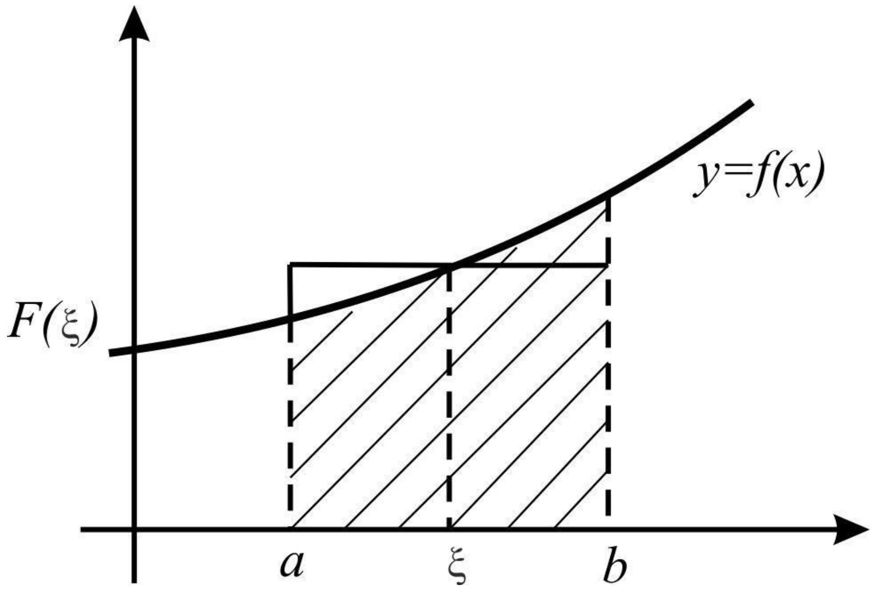
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$



Теорема о среднем: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то этом отрезке найдется такая точка ξ, в которой будет справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$

где $f(\xi)$ среднее значение функции на отрезке $[a;\ b]$.



Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование

Теорема: Если $F(x)$ какая-либо первообразная непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

(1) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Формула Ньютона-Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции.

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^3 x^2 dx.$

Решение:

$$\int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(2x) = \left.\frac{1}{2}\sin 2x\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема: Пусть дан $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Введем новую переменную t по формуле $x=\varphi(t)$. Если

1. $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b;$
2. $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a;\ b]$;
3. $f\left(\varphi(t)\right)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

(2) – формула замены переменной в определенном интеграле.

Замечание: При вычислении определенного интеграла по формуле (2) к старой переменной возвращаться не нужно.

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$.

Решение:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{xdx}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{ll} t = x^2, & \\ dt = 2xdx, & x=0 \Rightarrow t=0 \\ xdx = \frac{1}{2}dt, & x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctg\, t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(arctg\,1 - arctg\,0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

Решение:

$$\int_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{3x+1},\ \ 3x+1=t^2, \\ x=\dfrac{t^2-1}{3}, \quad dx=\dfrac{2}{3}tdt, \\ x=0 \Rightarrow \quad t=1 \\ x=5 \Rightarrow \quad t=4 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{2}{3}tdt}{2+t} =$$

Под знаком интеграла стоит неправильная дробь, выделим целую часть и проинтегрируем полученное выражение:

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{(t+2)-2}{t+2}dt = \frac{2}{3}\int_1^4 dt - \frac{4}{3}\int_1^4 \frac{d(t+2)}{t+2} = \frac{2}{3}t\Big|_1^4 -$$

$$-\frac{4}{3}\ln|2+t|\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4-1) - \frac{4}{3}(\ln 6 - \ln 3) = 2 - \frac{4}{3}\ln 2.$$

Метод интегрирования по частям

Теорема: Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;\, b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (3)$$

(3) – формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Замечание: При интегрировании по частям в определенном интеграле справедливы все рекомендации по применению метода интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Пример: Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 arctg\,x\,dx.$

Решение:

$$\int\limits_0^1 arctg\,x\,dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\,x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\,arctg\,x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} t = x^2+1, & dt = 2xdx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 & \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 & \end{matrix} \right| =$$

$$= arctg1 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$

Решение:

Применим метод интегрирования по частям:

$$\int_0^1 x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & dv = e^{3x} dx, \\ du = 2x dx, & v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2x dx = \frac{1}{3} e^3 - 0 - \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx =$$

Применим еще раз метод интегрирования по частям:

$$=\left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^{3x}dx, \\ du = dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}e^{3} -$$

$$-\frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}dx \right) = \frac{1}{3}e^{3} - \frac{2}{9}x\cdot e^{3x}\Big|_0^1 + \frac{2}{9}\int_0^1 e^{3x}dx =$$

$$=\frac{1}{3}e^{3} - \frac{2}{9}e^{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}e^{3} + \frac{2}{27}\left(e^{3} - e^{0}\right) = \frac{5}{27}e^{3} - \frac{2}{27}.$$