II) *Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями*

Пусть кривая (ℓ) не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$,

где $\phi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$.

ЗАДАЧА. Найти длину ℓ кривой (ℓ).

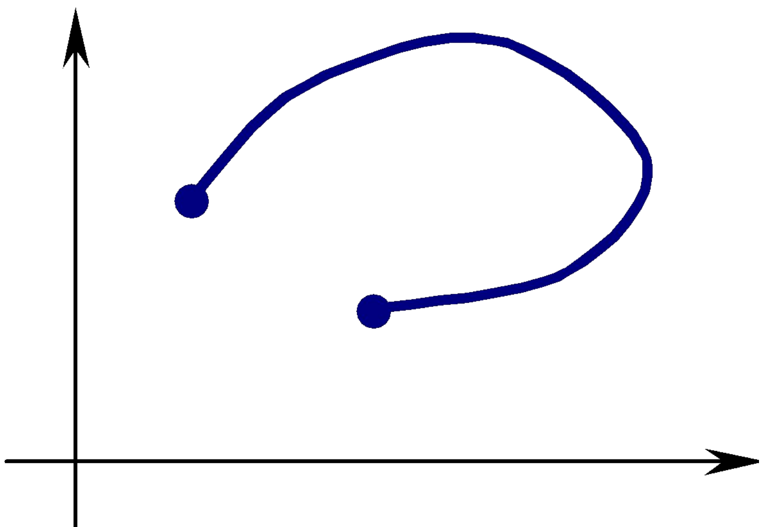
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[\alpha;\beta]$ на n частей точками

$$t_0 = \alpha,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n = \beta \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$$

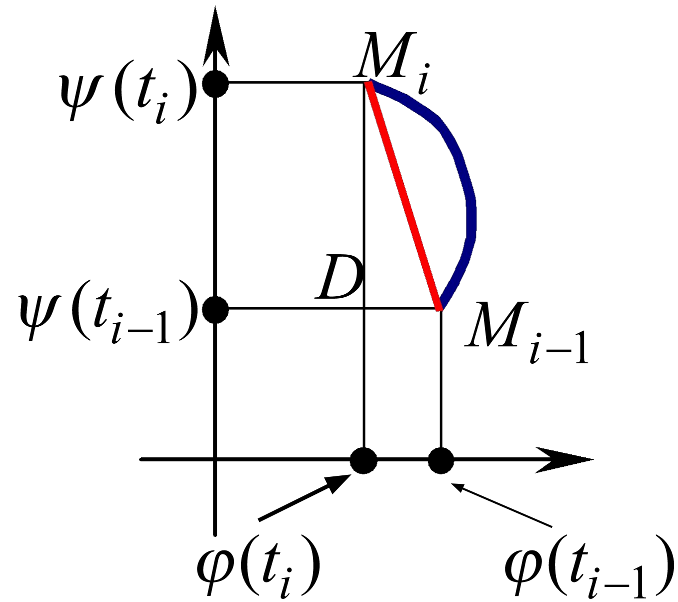
$\Rightarrow$ (ℓ) разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1, \ldots M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то



$$\ell_i \approx \left| M_{i-1} M_i \right| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1})$,

$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$.

По теореме Лагранжа

$$\Delta x_i = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \phi'(\xi_i) \cdot \Delta t_i ,$$
$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\zeta_i) \cdot \Delta t_i$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$, ξ_i, ζ_i – точки между t_{i-1} и t_i.

$$\Rightarrow \quad \ell_i \approx \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Рассмотрим

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

и

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Доказано, что

$$\lim_{\lambda \to 0} (s - \tilde{s}) = 0,$$

где

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i .$$

$$\Rightarrow \quad \square = \lim_{\lambda \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i}_{\text{интегральная сумма для } \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \text{ на } [\alpha;\beta]}$$

(1)

$$\Rightarrow \quad \square = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

III) ***Плоская кривая в полярных координатах***

Пусть $r = r(\phi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$.

ЗАДАЧА: найти длину кривой $r = r(\phi)$, где $\phi \in [\alpha;\beta]$.

РЕШЕНИЕ.

Имеем: $x = r \cdot \cos\phi$, $y = r \cdot \sin\phi$

$\Rightarrow$ параметрические уравнения кривой

$$x = r(\phi) \cdot \cos\phi\,, \quad y = r(\phi) \cdot \sin\phi\,.$$

Тогда $x' = r' \cdot \cos\phi - r \cdot \sin\phi$,

$y' = r' \cdot \sin\phi + r \cdot \cos\phi$

$$\Rightarrow \quad (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2\,.$$

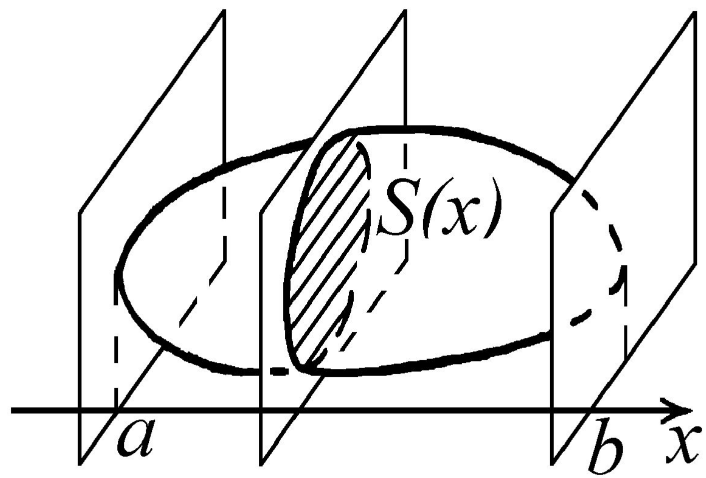
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi\,.$$

3. Вычисление объема тела

I) ***По площадям параллельных сечений***

Пусть (V) – замкнутое и ограниченная область в $Oxyz$ (тело). Пусть $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox.



Тогда объем тела (V) :

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

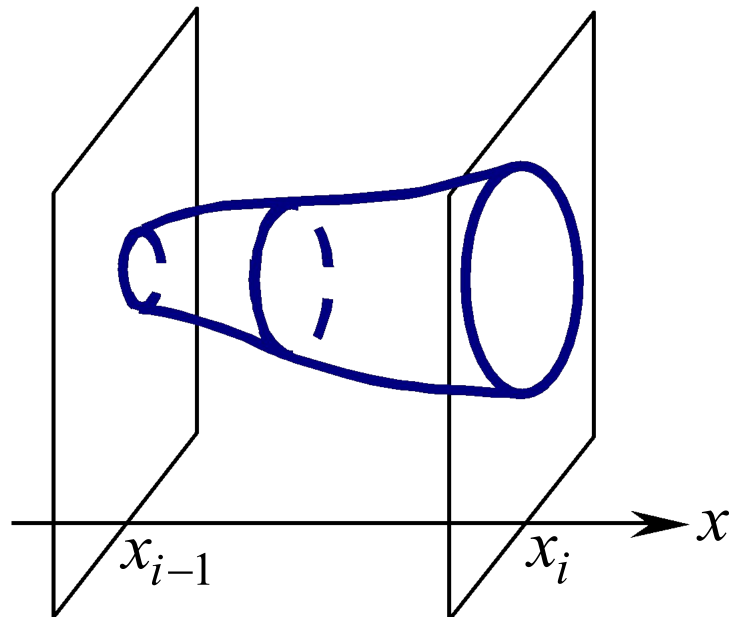
1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b$ (где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$)

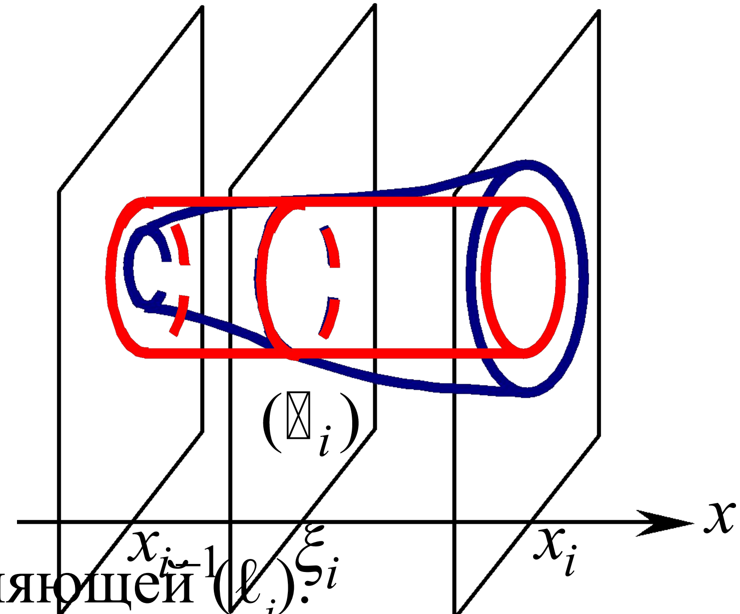
Плоскости $x = x_0\ ,\ x = x_1\ ,\ x = x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x = x_n$ разобьют (V) на части $(V_1)\ ,\ (V_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (V_n)$

$\Rightarrow\ V = \sum V_i$, где V_i – объем (V_i).

2) Рассмотрим (V_i).



Выберем $\forall \xi_i \in [x_{i-1}\,; x_i]$



Построим цилиндр с направляющей (ℓ_i).
Его объем: $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина $[x_{i-1}\,; x_i]$.
Если Δx_i – мала, то

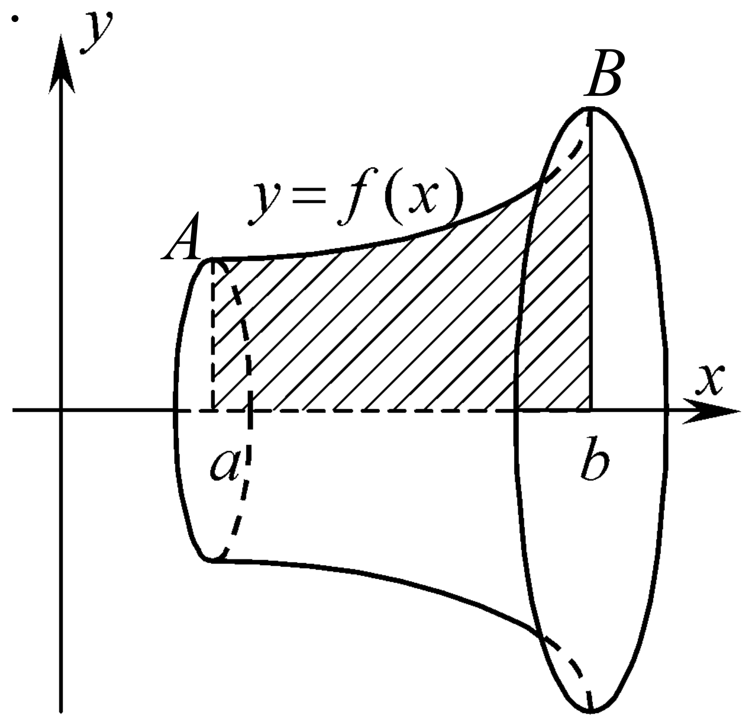
$$V_i \approx S(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Следовательно, $$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i ,$$ где $$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i .$$

$$\Rightarrow \quad V = \int_a^b S(x)\,dx .$$

II) ***Объем тела вращения***

Пусть (V) – тело, которое получается в результате вращения вокруг Ox криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной $y = f(x)$.



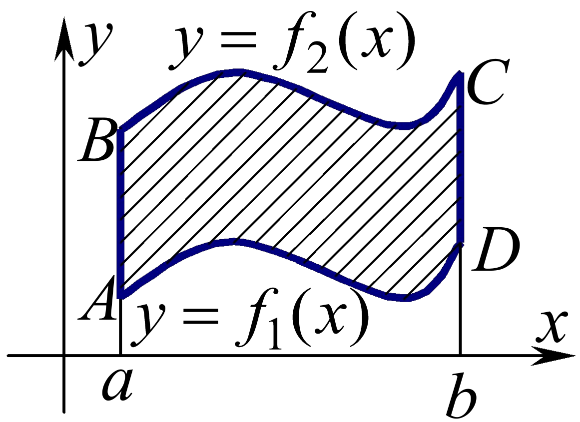
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Пусть (V) – тело, полученное в результате вращения вокруг Ox области (σ), ограниченной линиями

$$x = a\ ,\ \ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

где $0 \le f_1(x) \le f_2(x)\ ,\ \ \forall x \in [a;b]$.



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx .$$