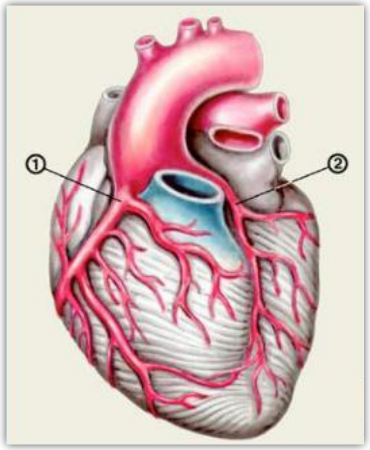
Колебания и волны

Колебаниями называются движения или процессы, которые обладают определенной повторяемостью во времени.



Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Колебания

Свободные

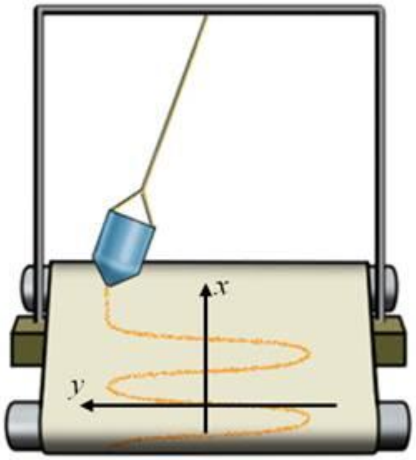
совершаются за счет первоначально сообщенной энергии, без дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему

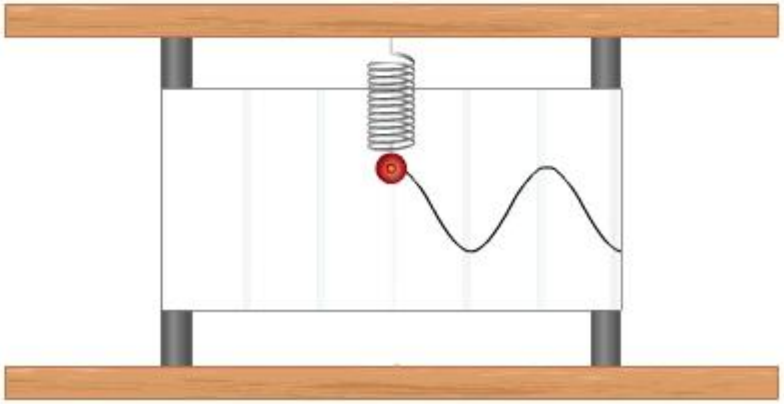
Вынужденные

происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы

Гармонические колебания

- колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса)





Уравнение гармонических колебаний

$$\boxed{s = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

- A – амплитуда колебания – максимальное значение колеблющейся величины;
- ω – круговая (циклическая) частота;
- φ_0 – начальная фаза колебания;
- $\omega t + \varphi_0$ – фаза колебания в данный момент времени

Период колебаний

T – наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание)

$$\boxed{T = \frac{t}{N}}$$

$$[T] = 1\,c$$

$$\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Частота колебаний

ν – величина обратная периоду колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени

$$\boxed{\nu = \frac{N}{t}}$$

$$[\nu] = 1\,\text{с}^{-1} = 1\,\text{Гц}$$

1 Герц – частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается один цикл колебаний

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$s = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

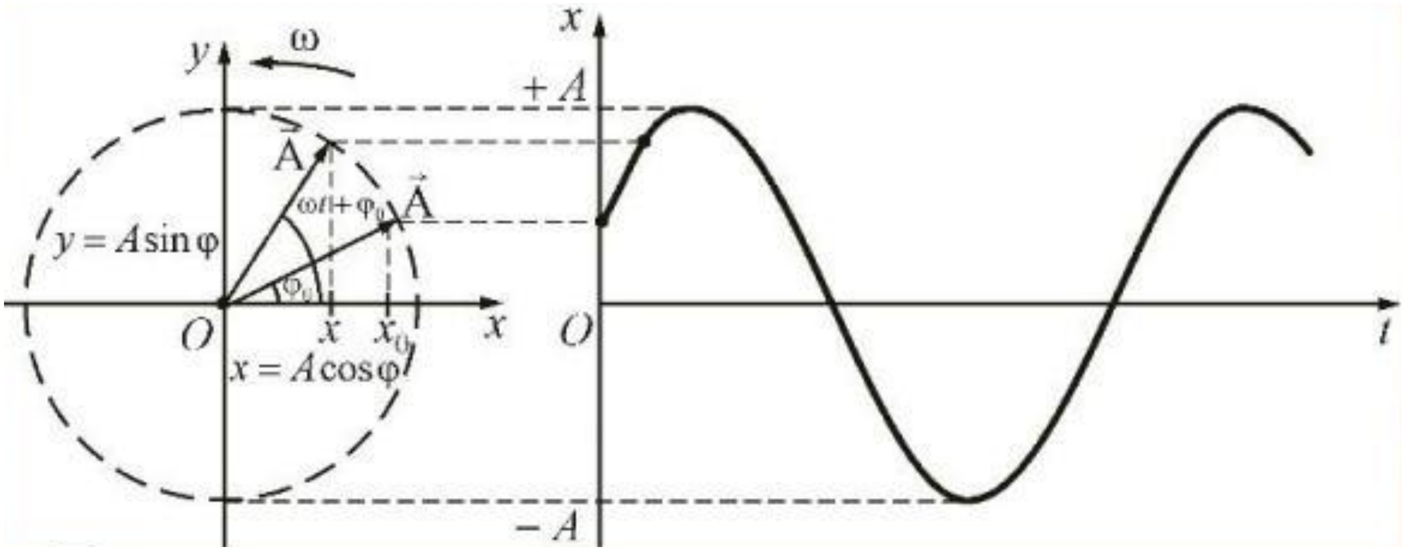
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \qquad \ddot{s} + \omega^2 s = 0$$

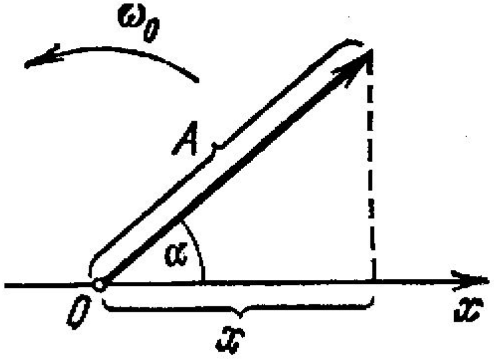
Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

$$s = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

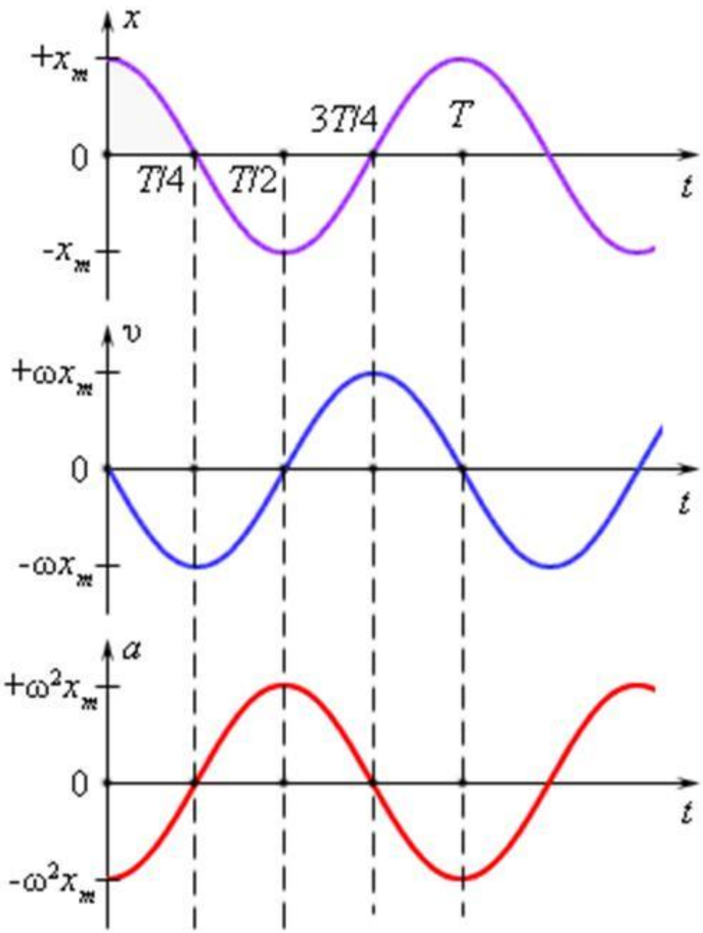
Метод векторных диаграмм





$$s = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Механические гармонические колебания

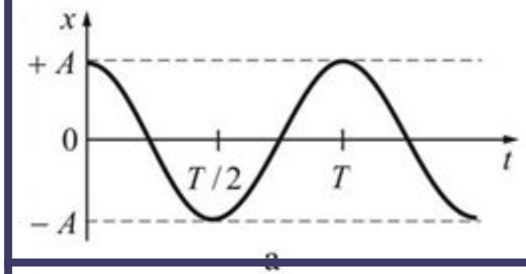


$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

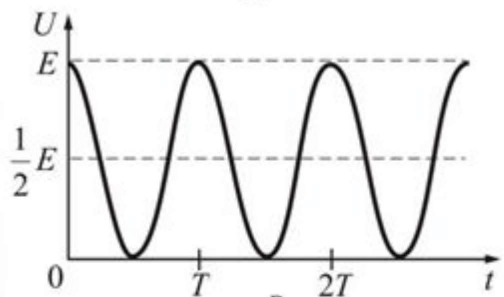
$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \ddot{x} = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Механические гармонические колебания

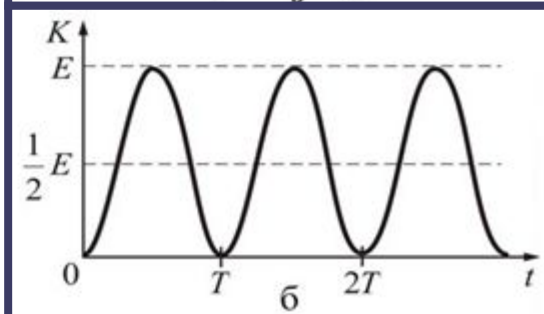


$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$F = ma = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi) = -m\omega^2 x$$

$$U = -\int_0^x F\,dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$



$$E = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mA^2\omega^2}{2}\left[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right] =$$

$$= \frac{mA^2\omega^2}{2} - \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos 2(\omega t + \varphi_0)$$

Полная энергия

$$E_{полн} = E + U = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

Полная энергия остается постоянной, с течением времени происходит только превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Гармонический осциллятор

система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0$$

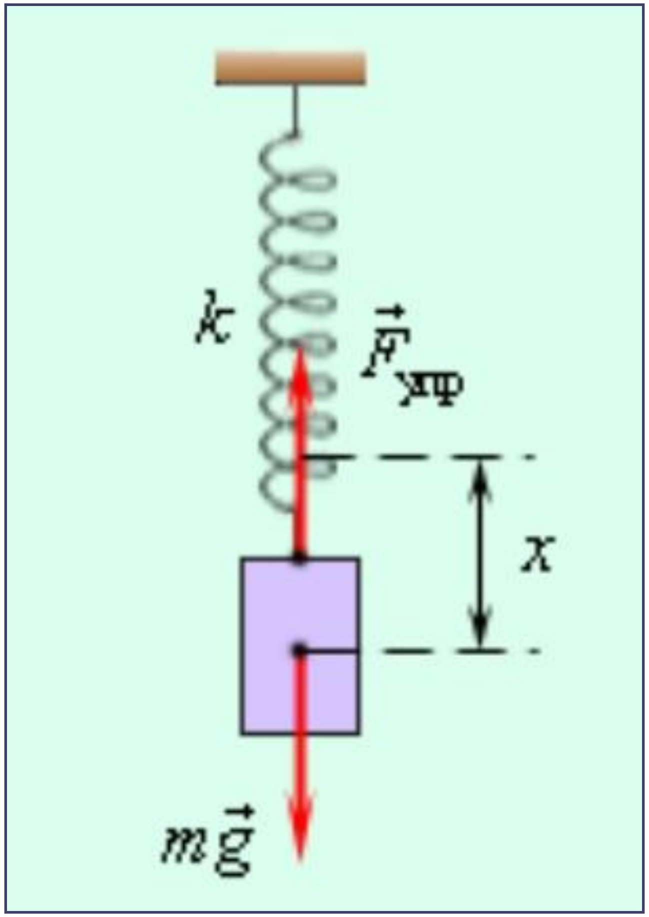
Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники, электрический колебательный контур.

Пружинный маятник

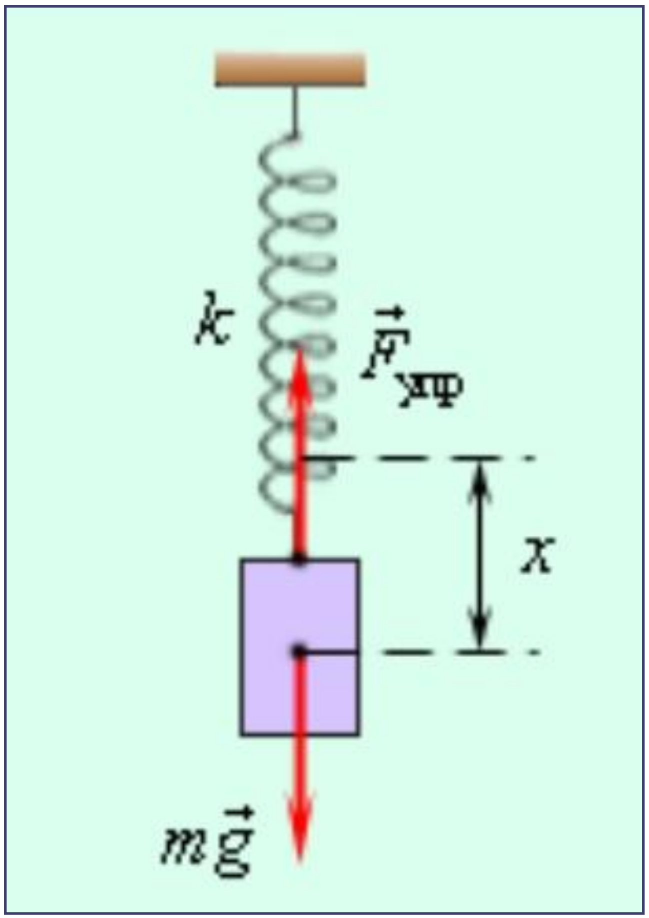
- это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы

$$F = -kx$$

где k – жесткость пружины



Уравнение движения пружинного маятника



$$m\ddot{x} = -kx \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

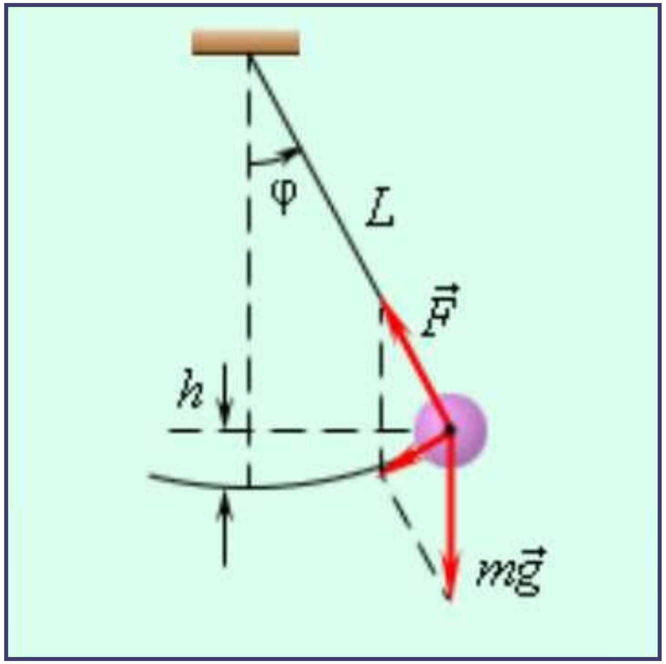
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

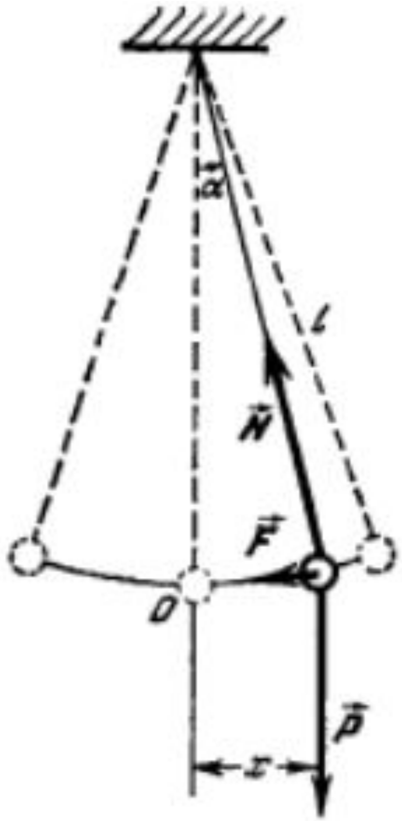
$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

Математический маятник

– идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l , и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.



Уравнение движения математического маятника



При малых углах отклонения α можно считать:

$$x \approx l\alpha$$

Возвращающая сила: $F = P\sin\alpha \approx mg\alpha = mg\dfrac{x}{l}$

Уравнение движения:

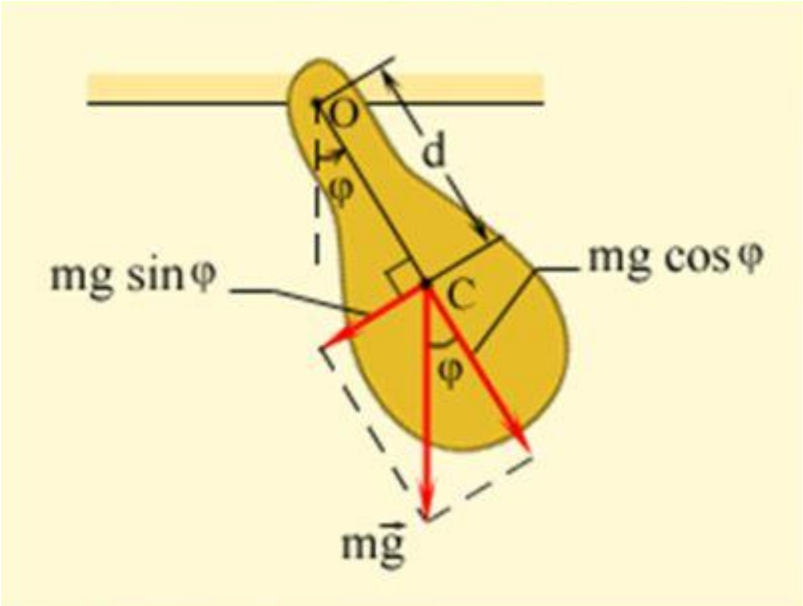
$$m\ddot{x} = -F = -mg\frac{x}{l} \qquad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

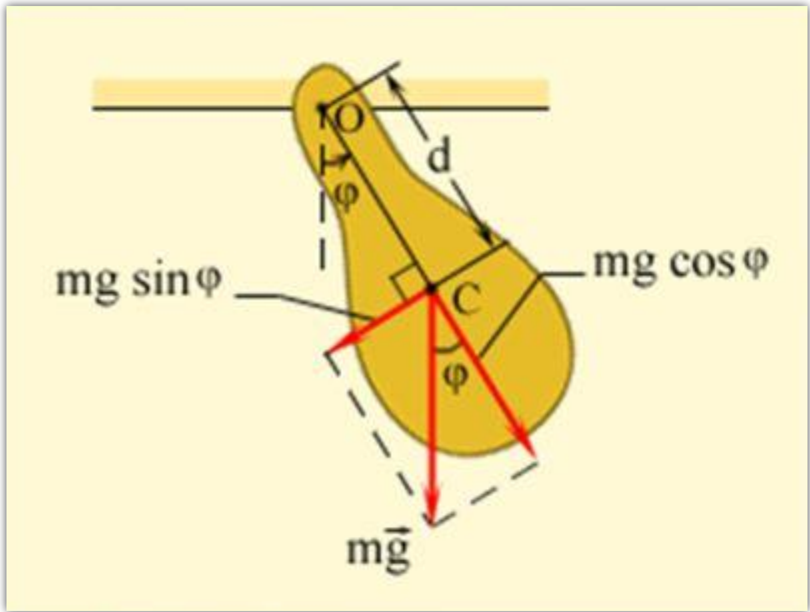
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Физический маятник

– твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела.



Уравнение движения физического маятника



$$J\ddot{\alpha} + mgd\alpha = 0$$

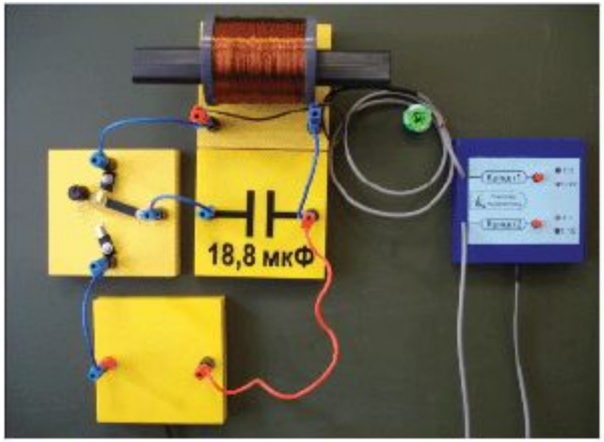
$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{J}\alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

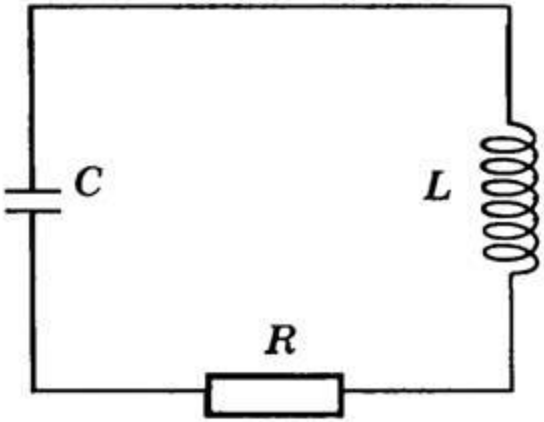
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}}$$

Электрический колебательный контур



- электрическая цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R.



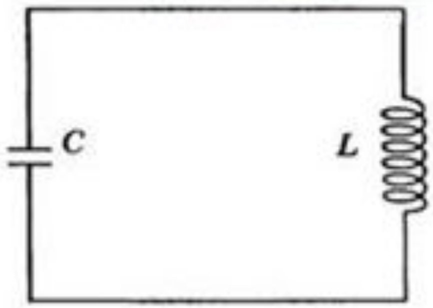
Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в колебательном контуре

$$\frac{d^2q}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$q = q_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Свободные колебания



колебательный контур

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

- период колебаний

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$i = -I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

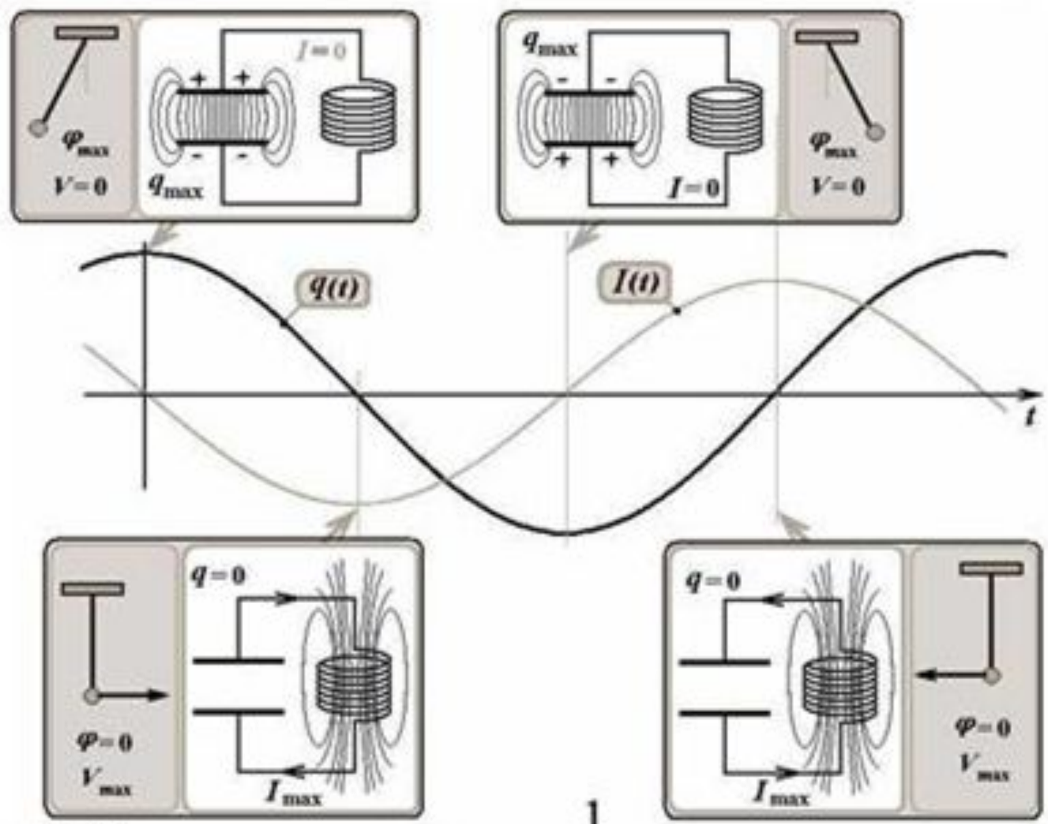


Рис. 265

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Затухающие колебания

- колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются.

Идеализированные реальные системы, в которых параметры определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются называются линейными.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы

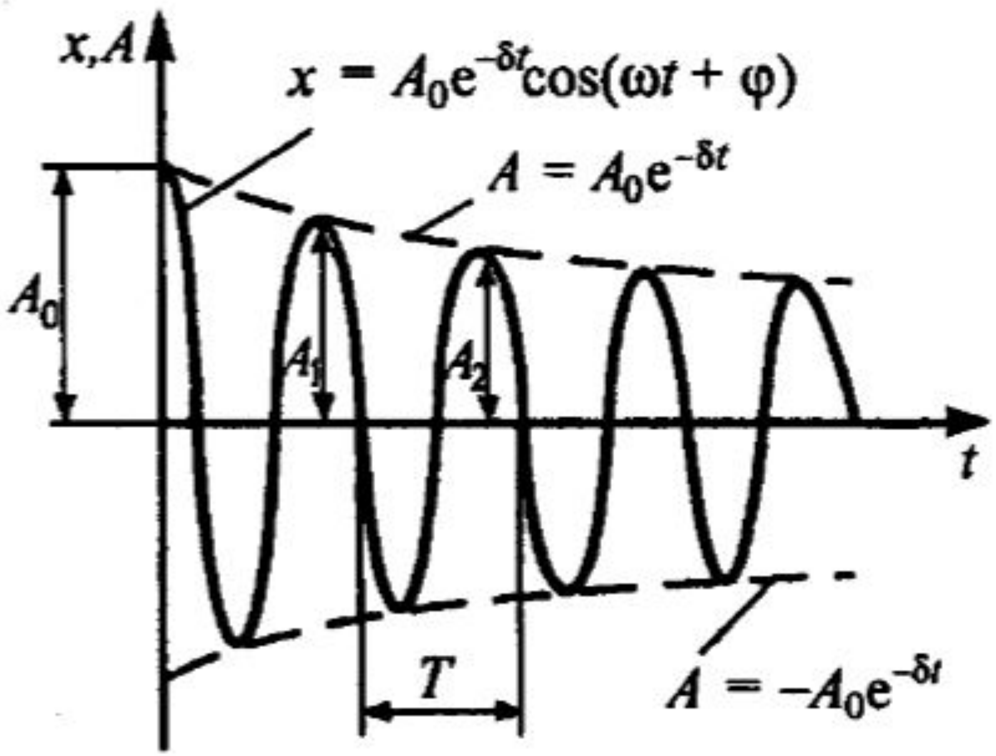
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega^2 s = 0$$

s – колеблющаяся величина,

δ= *const* – коэффициент затухания

ω – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы (при δ=0)

Затухающие колебания



Период затухающих колебаний

- промежуток времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

A(t) и *A(t+T)* – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз

Добротность колебательной системы

- безразмерная величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии W(t) колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до t+T (за один условный период затухающих колебаний)

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

Резонанс

- явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (или, в случае электрических колебаний, частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте равной или близкой собственной частоте колебательной системы.

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$$

$$A_{рез} = \frac{X_m}{2\delta\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

Волны

Волновой процесс или **волна** – процесс распространения колебаний в сплошной среде.

Основное свойство волн – перенос энергии без переноса вещества (независимо от природы волн).

Сплошная среда – непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Упругие (механические) волны – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде

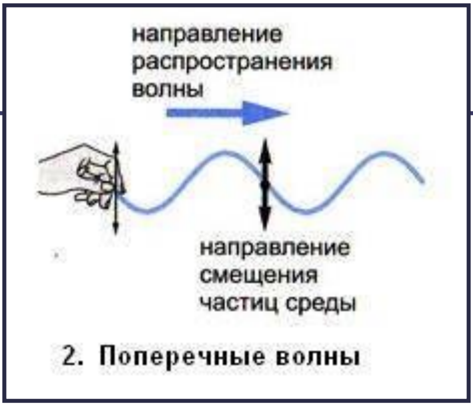
Волны

Продольные

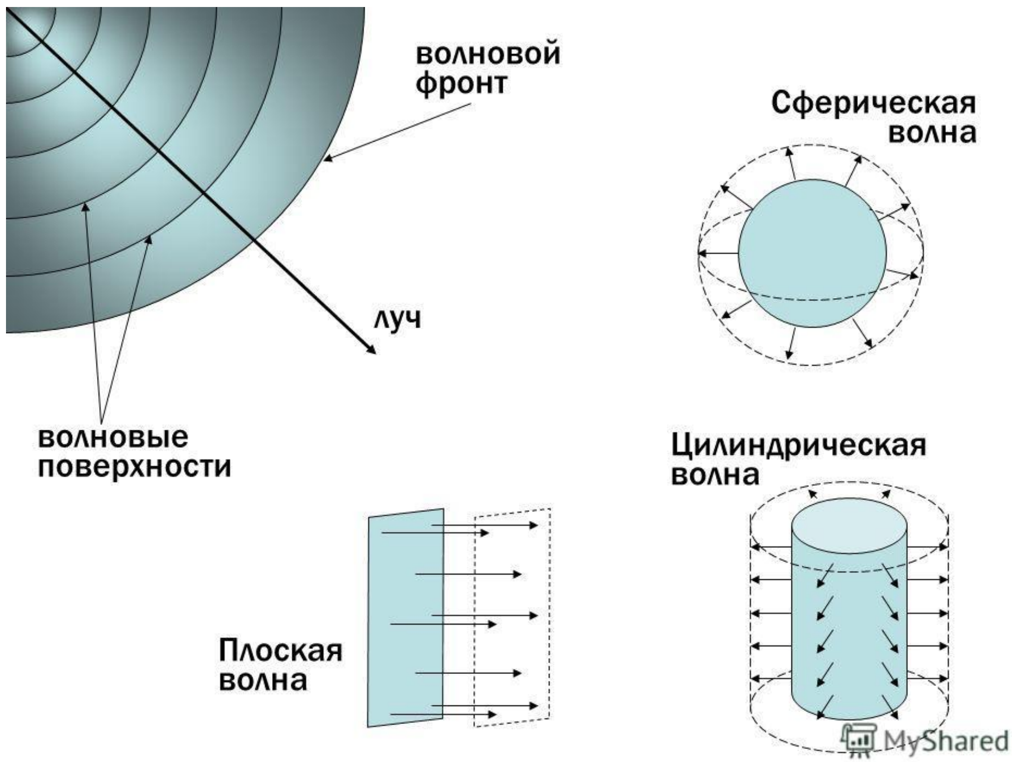
Волны, в которых частицы среды совершают колебания в направлении распространения волны.
Распространяются в газах жидкостях и твердых телах.

Поперечные

Волны, в которых частицы среды совершают колебания в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.
Распространяются в твердых телах.



Волновая поверхность (фронт) – геометрическое место точек до которых доходят колебания к моменту времени t.



Скорость распространения волны (фазовая скорость) – физическая величина, определяемая расстоянием, проходимым за единицу времени любой точкой волновой поверхности.

График гармонической поперечной волны, распространяющейся со скоростью $\boldsymbol{v}$ вдоль оси *X*

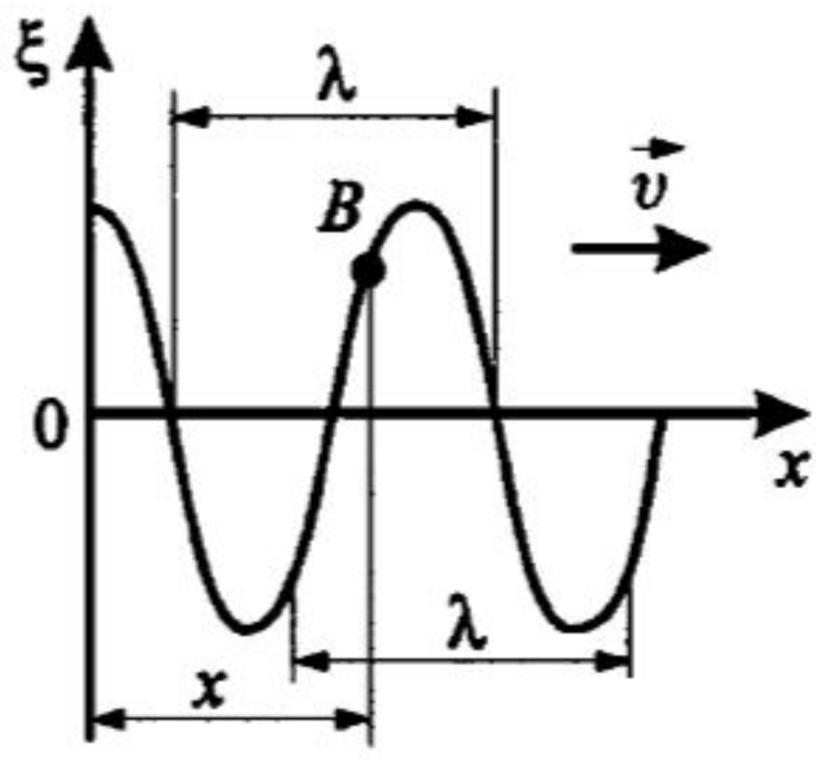


График волны представляет зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени

$$\xi = \xi(x, t)$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$$

$A = const$ – амплитуда волны

ω – циклическая частота

φ_0 – начальная фаза

v – скорость распространения волны (фазовая скорость)

x – расстояние от источника колебаний до какой-либо точки волны

$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0$ – фаза плоской волны

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

Уравнение бегущей гармонической волны

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Уравнение сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Δ – оператор Лапласа

Решением волнового уравнения является уравнение любой волны (в том числе плоская и сферическая)

Принцип суперпозиции

При распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов.

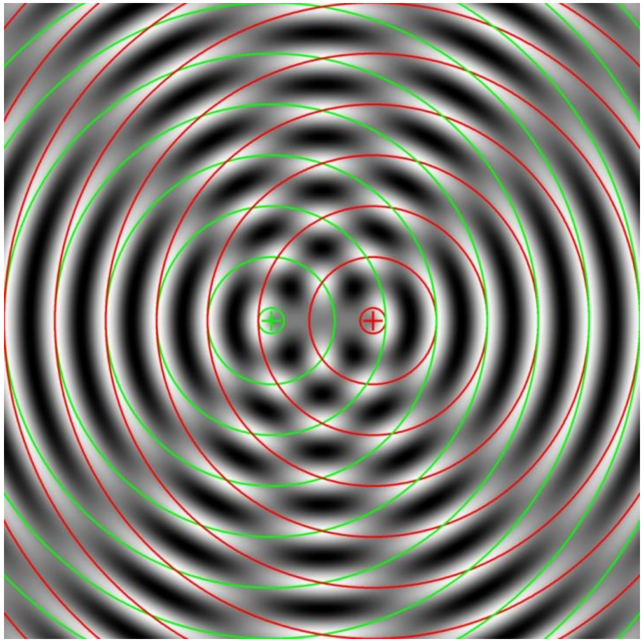
Когерентные волны

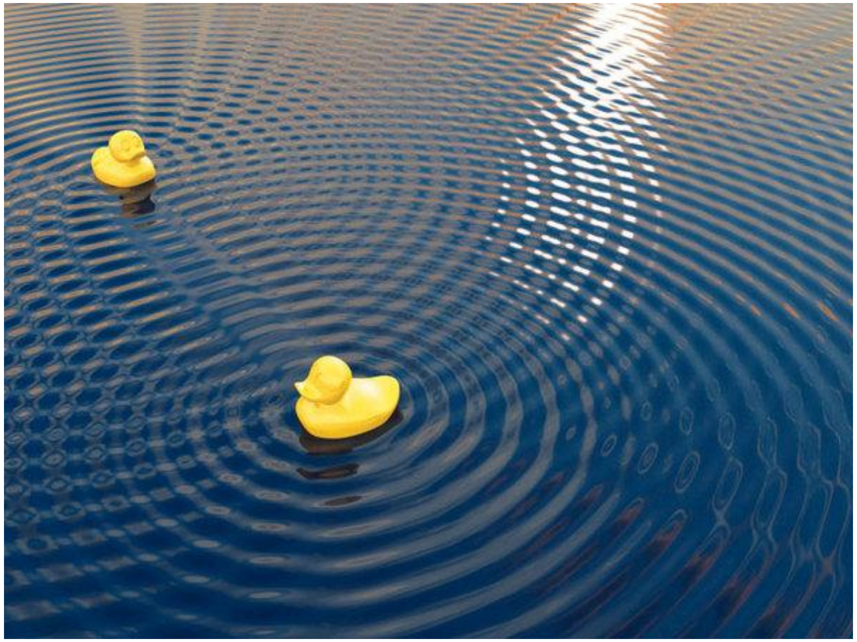
Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Две волны называются когерентными, если их разность фаз не зависит от времени.

Интерференция волн

Интерференцией волн называется явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.





$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1}\cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$

$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2}\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от источников до рассматриваемой точки, k — волновое число, φ_1 и φ_2 — начальные фазы волн.

Амплитуда результирующей волны

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi) = A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1r_2}\cos\left[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)\right]\right\}$$

Интерференционный максимум и

***Интерференционный* <u>максимум</u>** $\left(A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2}\right)$ наблюдается в точках,

где $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Числа $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ называются ***порядком интерференционного максимума.***

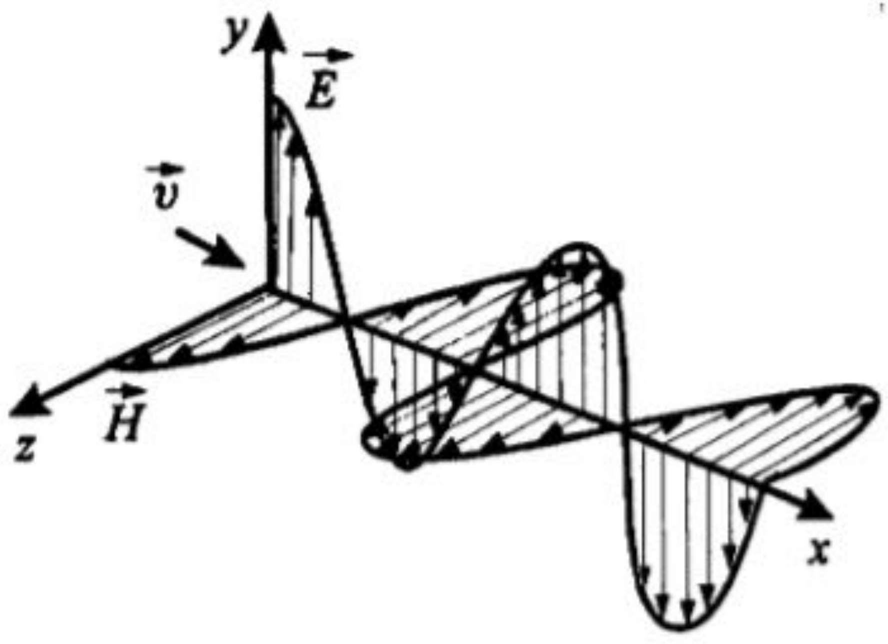
***Интерференционный* <u>минимум</u>** $\left(A = \left|\frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2}\right|\right)$ наблюдается в точках,

где $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Числа $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ называются ***порядком интерференционного минимума***.

Электромагнитная волна

- это переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.



Свойства электромагнитных волн

- электромагнитная волна – поперечная
- электромагнитные волны распространяются в вакууме с конечной скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с
- в электромагнитной волне векторы E и H пропорциональны друг другу

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$$

Электромагнитная волна

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \qquad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

E_0 и H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны,

ω – циклическая частота волны,

$k = \omega/v$ – волновое число,

φ – начальная фаза колебаний.

Энергия электромагнитной волны

Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей энергий электрического и магнитного полей

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E = \sqrt{\mu_0 \mu}\, H \qquad w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{\varepsilon \mu}\, EH$$

Плотность потока энергии $\quad S = w\mathrm{v} = EH$

Вектор Умова-Пойтинга

– вектор плотности потока энергии электромагнитной волны

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Вектор $\vec{S}$ плотности потока энергии электромагнитной волны направлен в сторону распространения эмв, а его модуль равен энергии, переносимой эмв за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Скалярная величина I, модулю среднего значения вектора Умова – Пойтинга, называется **интенсивностью волны**

$$I = \left| \left\langle \vec{S} \right\rangle \right|$$