



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Военный учебный центр



ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В АСУ

Тема № 1. Автоматизация первичной обработки РЛИ

Занятие № 7. Критерии обнаружения радиолокационного сигнала

**Руководитель занятия:
преподаватель кафедры АСУ ВКС
майор запаса Бейльман С.В.**

Учебные вопросы:

1. Критерий минимума среднего риска.
2. Весовой критерий.
3. Критерий максимального правдоподобия.
4. Критерий Неймана-Пирсона.

Литература

1. В.Н. Ратушняк, С.В. Бейльман, И.В. Тяпкин. **Основы обработки и передачи информации в автоматизированных системах управления. Часть I Первичная обработка радиолокационной информации.** – Красноярск: СФУ ВУЦ, 2020 – С. 51 - 73.
2. Черенок Н.Г. **Системы цифровой обработки сигналов. Основы цифровой обработки сигналов. Ч.1.** - СПб: тип. ФВУ ПВО, 2002.
3. **Справочник офицера воздушно-космической обороны /** под. ред. С.К. Бурмистрова. – Тверь: ВА ВКО, 2008. – С.523–527.

Критерии оптимальности обнаружения

Критерий оптимальности – это некоторое практически важное требование, в соответствии с которым в результате наблюдения того или иного процесса должно быть принято конкретное решение. При решении задач статистического выбора гипотез наиболее часто используют:

- критерий минимума среднего риска;
- весовой критерий;
- критерий отношения правдоподобия;
- критерий максимального правдоподобия;
- критерий Неймана –Пирсона.

Вопрос №1

**Критерий минимума среднего
риска**

В качестве практически важного требования, которое должно быть выполнено, критерий минимума среднего риска использует стоимости ошибочных решений, суммарное значение которых на достаточно большом интервале времени должно быть минимальным.

При обнаружении возможны два вида ошибочных решений ложная тревога и пропуск цели. Каждому ошибочному решению, т. е. ситуациям $H_1 H_0$ и $H_0 H_1$, поставим в соответствие некоторую стоимость (штраф): $r_{\text{лт}}$ — стоимость ложной тревоги; $r_{\text{пц}}$ — стоимость пропуска цели. Для правильных решений их стоимости считаем равными нулю.

Пусть в течение достаточно большого интервала T принимается N решений, т. е. N также достаточно велико. Общее число решений N будет содержать N_1 ложных тревог, N_2 пропусков цели, N_3 правильных обнаружений и N_4 правильных не обнаружений. Тогда суммарная стоимость решений на интервале времени T составит

$$r = r_{\text{лт}} N_1 + r_{\text{пц}} N_2 \quad (1)$$

Поделив левую и правую части (1) на общее количество решений N , получим

$$\frac{r}{N} = r_{\text{лт}} \frac{N_1}{N} + r_{\text{пц}} \frac{N_2}{N} \quad (2)$$

При достаточно большом значении N левая часть данного выражения (r/N) характеризует **среднюю стоимость ошибочного решения (средний риск)**, или **математическое ожидание** этой стоимости ($\bar{r}$). В правой части выражения (2) отношения N_1/N и N_2/N представляют частоту событий ложной тревоги и пропуска цели соответственно. При больших N пределами этих отношений являются вероятность ложной тревоги $P(H_1^*H_0)$ и вероятность пропуска цели $P(H_0^*H_1)$.

После замены отношений N_1/N и N_2/N их предельными значениями выражение (2) принимает вид:

$$\bar{r} = r_{\text{лт}} P(H_1^*H_0) + r_{\text{пц}} P(H_0^*H_1).$$

Полученное соотношение характеризует обнаружитель радиолокационного сигнала. Наилучшим (оптимальным) считается такой обнаружитель, который обеспечивает минимум средней стоимости ошибочных решений, т.е.

$$\bar{r} = r_{\text{лт}} P(M_1^* | H_0) + r_{\text{пц}} P(H_0^* | H_1) = \quad (3)$$

С учетом ранее приведенных формул выражение (3), соответствующее критерию минимума среднего риска, приводится к виду

$$\bar{r} = r_{\text{лт}} P(M_1 | H_0) F + r_{\text{пц}} P(H_1)(i - D) = \quad (4)$$

Выполнение условия (4) при заданных вероятностях $P(H_0), P(H_1)$ и стоимостях $r_{\text{лт}}, r_{\text{пц}}$ обеспечивается за счет выбора порога обнаружения X_0 . Определим порог обнаружения графическим методом.

Считаем, что помеха и смесь сигнала с помехой имеют распределение Релея и Райса соответственно. Умножим функцию Релея $W(x/0)$ на коэффициент $K_1 = r_{\text{лт}} P(H_0)$, а функцию Райса $W(x/a)$ – на $K_2 = r_{\text{пц}} P(H_1)$. В результате получим функции:

$$W_{\text{лт}} = r_{\text{лт}} P(H_0) W(x/0);$$

$$W_{\text{пц}} = r_{\text{пц}} P(H_1) W(x/a),$$

которые отличаются от распределений $W(x/0)$, $W(x/a)$ масштабными коэффициентами K_1, K_2 .

Зададим произвольный порог X_0 и оценим площади областей S_1 и S_2 . Величина площади S_1 определяется интегралом

$$S_{\text{пц}} = \int_0^{x_0} W_{\text{пц}} dx = \int_0^{x_0} r_{\text{пц}} P(H_1) W(x/a) dx$$

Учитывая, что $r_{\text{пц}} = \text{const}$, $P(H_1) = \text{const}$, $\int_0^{x_0} W(x/a) dx = 1 - D$.

$$S_{\text{пц}} = r_{\text{пц}} P(H_1) \int_0^{x_0} W(x/a) dx = r_{\text{пц}} P(H_1) (1 - D)$$

Аналогичным образом нетрудно определить площадь $S_{\text{ят}} = r P_0(H) F$

Сравнивая полученные соотношения для S_1 и S_2 с выражением (4), приходим к выводу:

$$\bar{r} = S_1 + S_2$$

Отсюда следует, что порогу обнаружения, оптимальному согласно критерию минимума среднего риска ($x_0 = x_{0\text{ОПТ}}$), соответствует такое значение x , при котором суммарная площадь ($S_1 + S_2$) минимизируется. Нетрудно проверить, что данное условие выполняется для значения x , при котором графики w_1 и w_2 пересекаются.

Вопрос №2

Весовой критерий

Весовой критерий

Выражение (4) соответствующее критерию минимума среднего риска, нетрудно представить в следующем виде:

$$\bar{r} = r_{\text{пц}} P(H_1) \left[\frac{r_{\text{лт}} P(H_0)}{r_{\text{пц}} P(H_1)} F + (1 - D) \right] = \quad (5)$$

Введем весовой множитель

$$\Lambda_0 = \frac{r_{\text{лт}} P(H_0)}{r_{\text{пц}} P(H_1)},$$

с учетом которого соотношение (5) принимает вид

$$(6)$$

$$\bar{r} = r_{\text{пц}} P(H_1) [\Lambda_0 F + (1 - D)] = r_{\text{пц}} P(H_1) [1 - (D - \Lambda_0 F)] =$$

В полученном соотношении $\bar{r}, r_{\text{пц}}, P(H_1)$ неотрицательные. Поэтому

$$[1 - (D - \Lambda_0 F)] \geq 0. \quad (7)$$

Выражение (7) достигает своего минимума, минимизируя соотношение (5) при выполнении условия

$$D - \Lambda_0 F = \max. \quad (8)$$

Выражение (8) представляет весовой критерий, согласно которому оптимизация обнаружения достигается за счет обеспечения максимума разности $D - \Lambda_0 F$.

Выполнение условия (8) при заданных распределениях и весовом множителе обеспечивается выбором порога обнаружения. Возможность такого выбора поясним графическим способом. Для определения порога обнаружения оптимального по весовому критерию, достаточно по распределениям $W(x/0)$, $W(x/a)$ оценить D и $\Lambda_0 F(x)$. Разность этих функций $D(x) - \Lambda_0 F(x)$ при некотором значении $x = x_{\text{ОПТ}}$ достигает своего максимума, удовлетворяя весовому критерию.

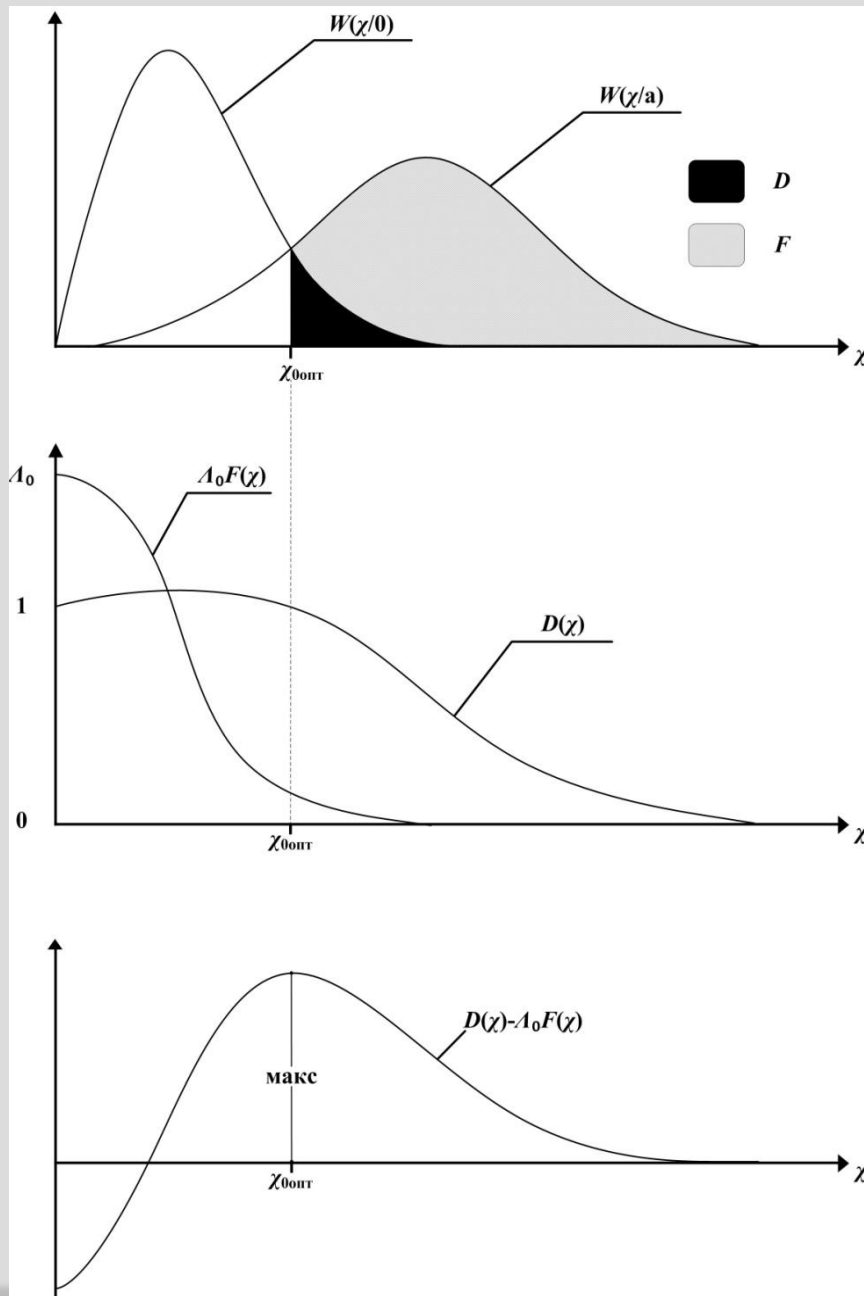


Рис. 1 К выбору порога
по весовому критерию

Вопрос №3

Критерий максимального правдоподобия

Рассмотренные критерии выбора гипотез H_0^* и H_1^* , минимизирующие средний риск, требуют наличия априорных данных $P(H_0), P(H_1)$, а также задания стоимости ошибочных решений $r_{\text{лж}}$, $r_{\text{лт}}$. При отсутствии перечисленных сведений выбор гипотез основан на оценке функции правдоподобия, которая вводится следующим образом.

Пусть на интервале наблюдения T получена реализация видеосигнала $x(t) = U(t)/\sigma_{\text{П}}$. Перейдем согласно теореме Котельникова от аналогового процесса к совокупности его отсчетов, т. е. к матрице

$$X = \|x(t_i)\| = \|x(t_1)x(t_2)...x(t_m)\|.$$

Каждому отсчету соответствуют два значения плотности вероятности:

$W[x(t_i)/0]$ – в предположении, что $x(t)$ – помеха;

$W[x(t_i)/a]$ – в предположении, что $x(t)$ – смесь сигнала с помехой.

Объединяя обе записи выражением $W[x(t_i)/a]$, получим значение многомерной послеопытной плотности вероятности наблюдаемой реализации:

$W[x(t_1), \dots, x(t_m)] = \prod_{i=1}^m W(x(t_i)/a) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x(t_i)^2}{2\sigma^2 a^2}\right) \right)$,
где a , как и ранее - неизвестный параметр, характеризующий наличие (при $a=1$) либо отсутствие (при $a=0$) сигнала реализации $x(t)$.

Введенная таким образом послеопытная плотность вероятности $W(x/a)$, рассматриваемая как функция параметра a , называется функцией правдоподобия. Данная функция показывает, насколько одно возможное значение параметра a более «правдоподобно», чем другое.

Согласно критерию максимального правдоподобия, из двух гипотез (H_0^*) и H_1^* выбирается та, которой соответствует большее значение функции правдоподобия для наблюдаемой реализации X , т. е.

$$H_1^* = \begin{cases} 1 & \text{если } W(X/a) > W(X/0); \\ 0 & \text{если } W(X/a) \leq W(X/0). \end{cases} \quad (9)$$

Как следует из соотношения (9), порог обнаружения, удовлетворяющий критерию максимального правдоподобия, определяется из условия

$$W(x_{\text{пт}} / 0) = W(x_{\text{пт}} / a), \quad \frac{W(x_{\text{пт}} / a)}{W(x_{\text{пт}} / 0)} = 1 \quad (10)$$

Отсюда следует, что критерий максимального правдоподобия является частным случаем критерия отношения правдоподобия, когда $r_{\text{лт}} = r_{\text{пт}}$ и $P(H_0), P(H_1)$. Однако и в других случаях решающее правило (9) является достаточно хорошим в смысле близости к оптимальному и особенно тем, что не апеллирует к точному знанию стоимости ошибочных решений и заданию априорных данных.

Вопрос №4

Критерий Неймана - Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона является следствием весового критерия и вытекает из следующих логических рассуждений. Если при одинаковом весовом множителе

$$\Lambda_0 = \frac{r_{\text{лт}} P(H_0)}{r_{\text{пт}} P(H_1)}. \quad (11)$$

сравнить два обнаружителя, один из которых является оптимальным, то, согласно весовому критерию, справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \text{или} \quad D_{\text{опт}} - \Lambda_0 F_{\text{опт}} &\geq D - \Lambda_0 F, \\ D_{\text{опт}} &\geq D + \Lambda_{00} (F_{\text{опт}} - F). \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно **критерию Неймана-Пирсона** (12), оптимальный обнаружитель обеспечит наибольшую условную вероятность правильного обнаружения из всех обнаружителей, у которых условная вероятность ложной тревоги не больше, чем у оптимального.

Порог обнаружения, оптимальный по критерию Неймана – Пирсона, выбирается с учетом допустимой условной вероятности ложной тревоги $F_{\text{доп}}$. Поскольку значение последней определяется выражением

$$F_{\text{доп}} = \int_{x_{\text{гпт}}}^{\infty} W(x/0) dx, \quad (13)$$

то пороговое значение $x_{\text{гпт}}$ однозначно связано с функцией распределения помехи $W(x/0)$ и допустимой условной вероятности ложной тревоги $F_{\text{доп}}$. Характер данной зависимости иллюстрирует рис. 2. Как следует из приведенного рисунка, можно подобрать такое значение $x = x_{\text{гпт}}$, при котором площадь под кривой распределения $W(x/0)$ правее выбранного порога и равна вероятности $F_{\text{доп}}$.

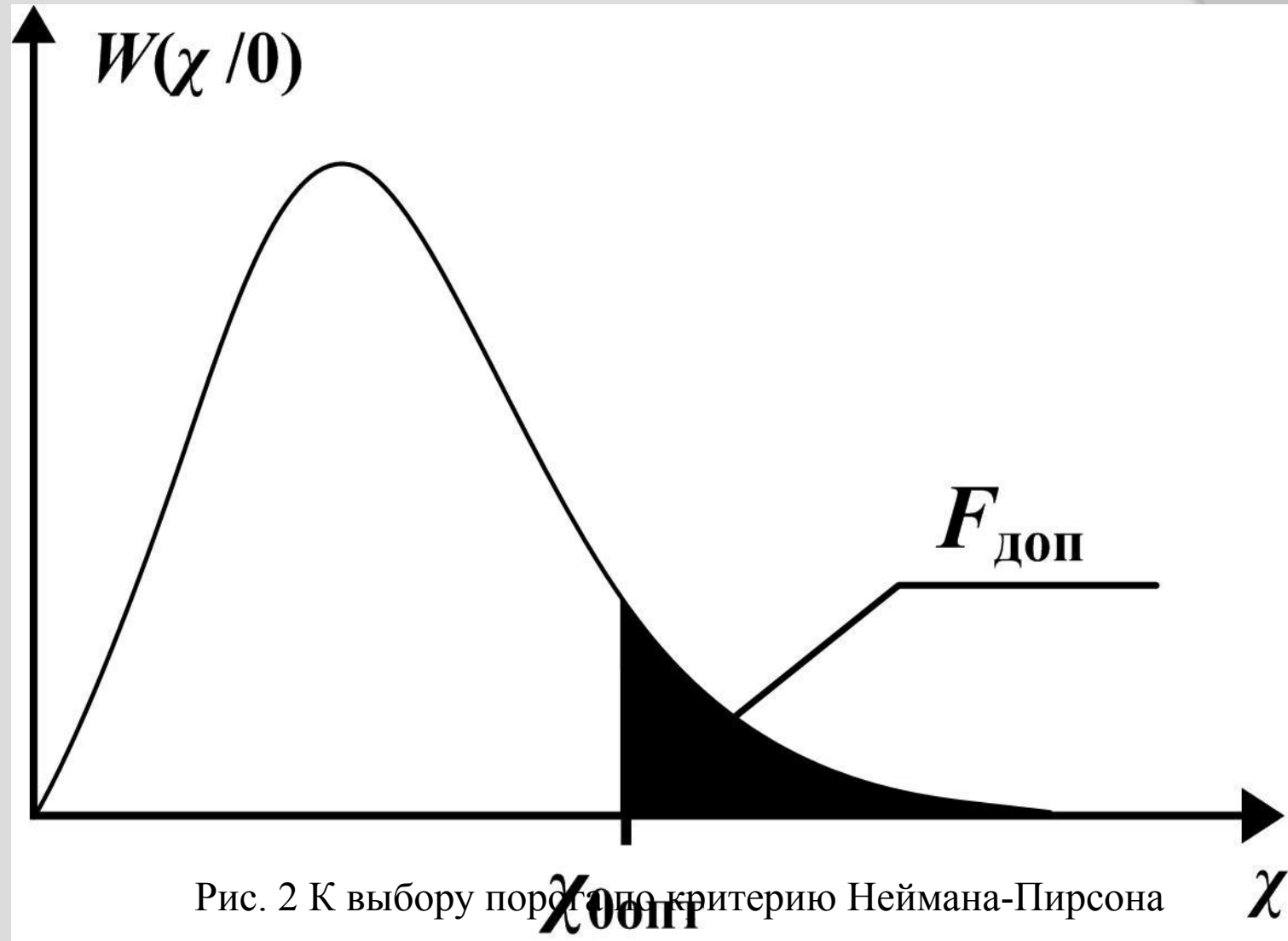


Рис. 2 К выбору порога по критерию Неймана-Пирсона

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается критерий минимума среднего риска?
2. В чем заключается весовой критерий?
3. В чем заключается критерий максимального правдоподобия?
4. В чем заключается Критерий Неймана-Пирсона?

**СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ**