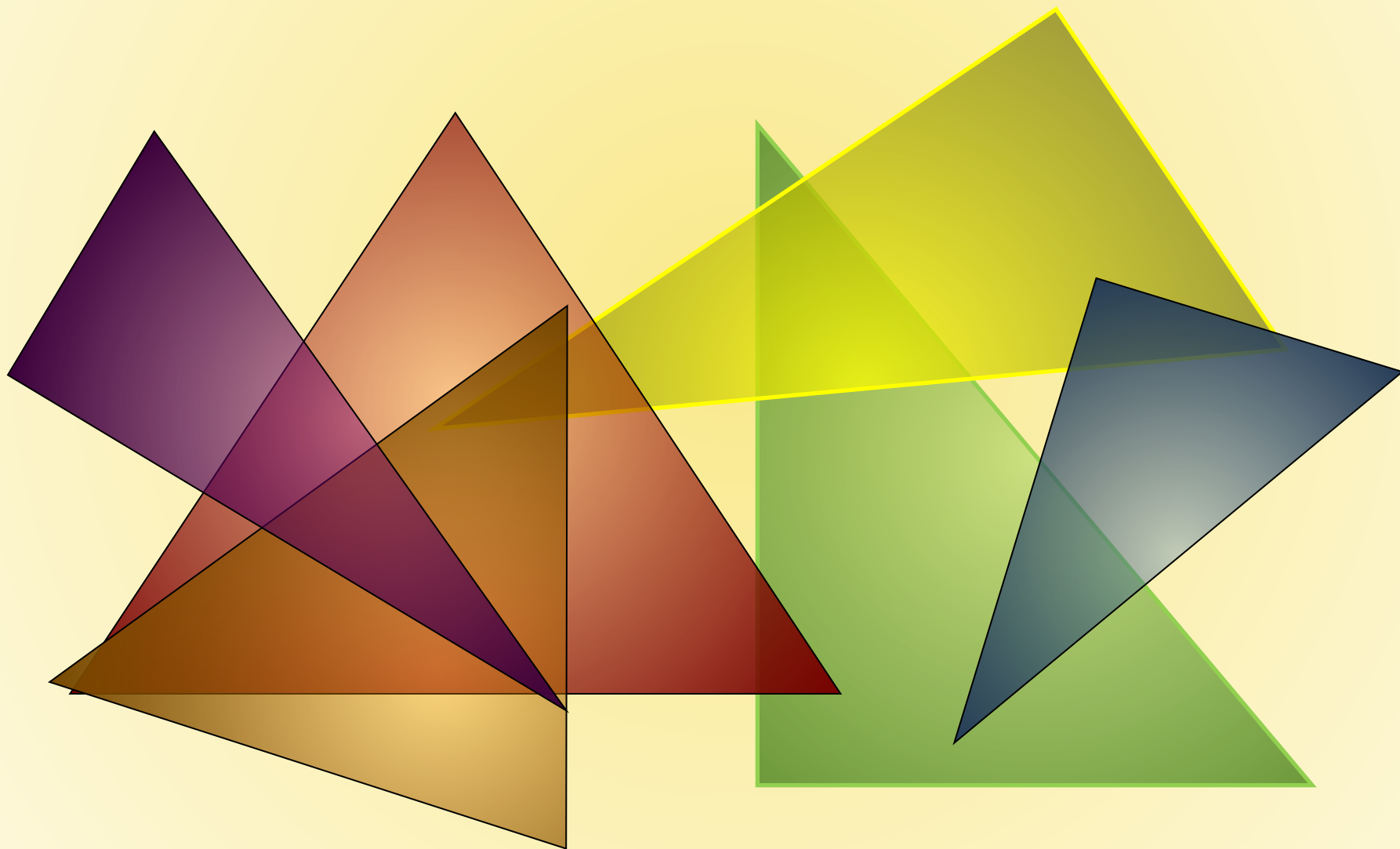
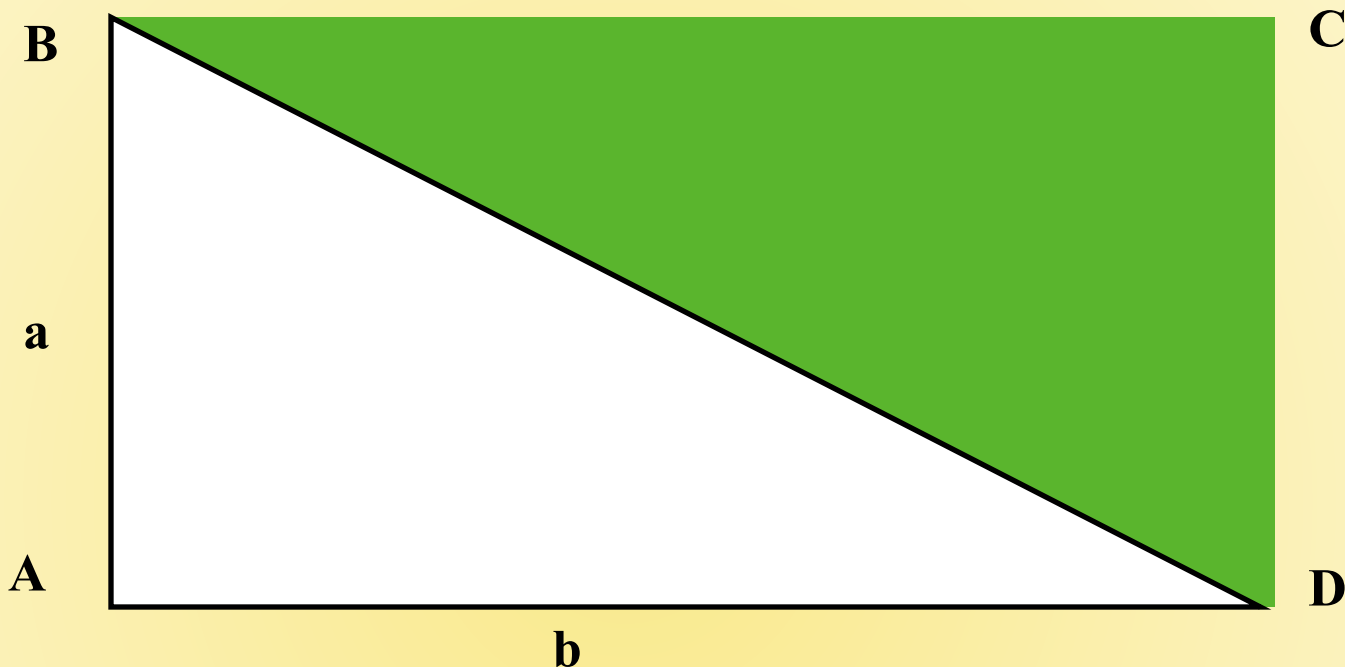


Формулы для вычисления площадей различных треугольников



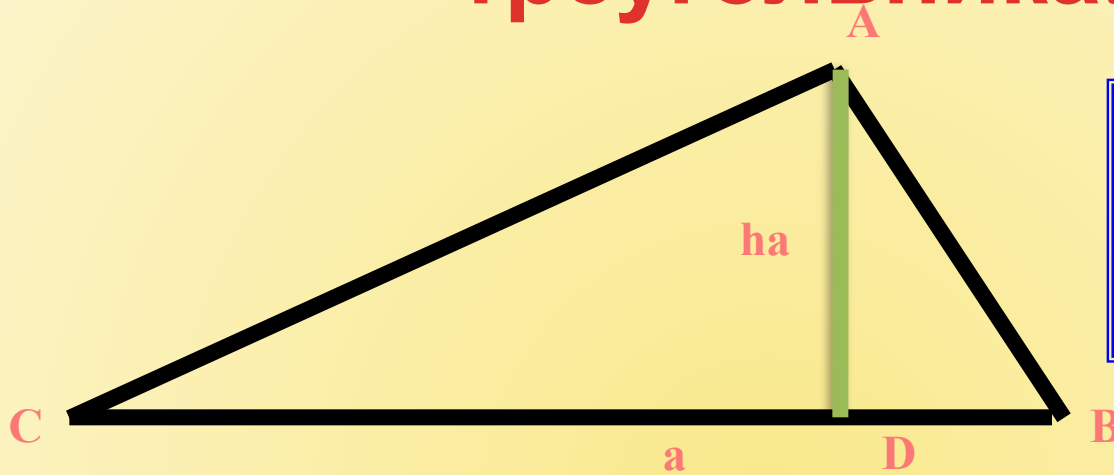
Площадь прямоугольного треугольника.



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА РАВНА
ПОЛОВИНЕ
ПРОИЗВЕДЕНИЯ КАТЕТОВ.

$$S = \frac{1}{2} ab$$

Площадь любого треугольника.

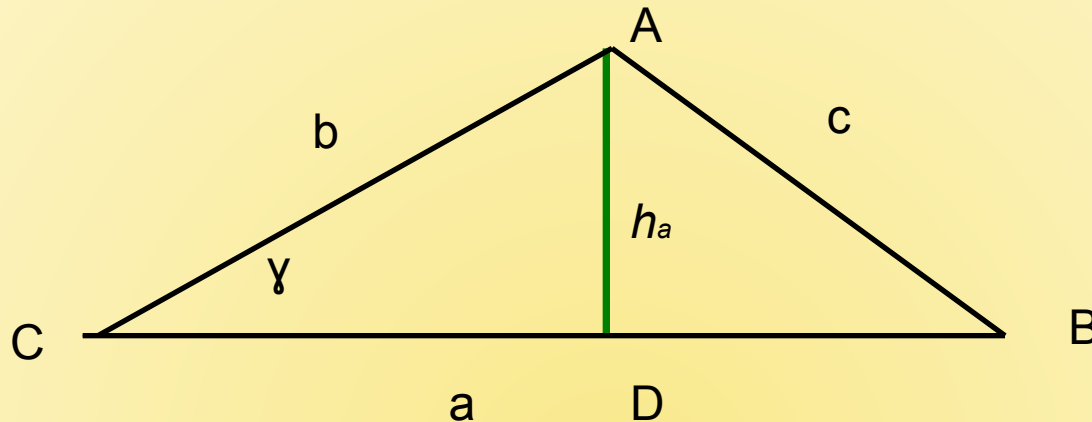


$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Площадь любого треугольника равна
половине произведения основания на высоту.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ADC} + S_{ADB} = \frac{1}{2} CD \cdot h_a + \frac{1}{2} DB \cdot h_a = \\ &= \frac{1}{2} (CD + DB) h_a = \frac{1}{2} CB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot h_a \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

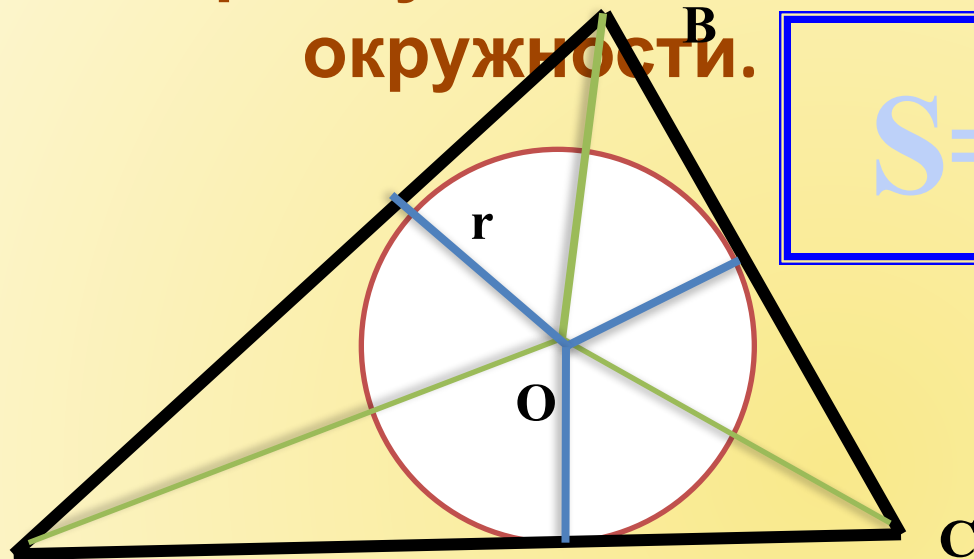


Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, то площадь такого треугольника можно найти, как половина произведения двух сторон на синус угла между ними.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \text{ но из прямоугольного}$$

$$\text{треугольника ADC } h_a = b \cdot \sin \gamma, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

Площадь треугольника
через
r-радиус вписанной
окружности.



$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

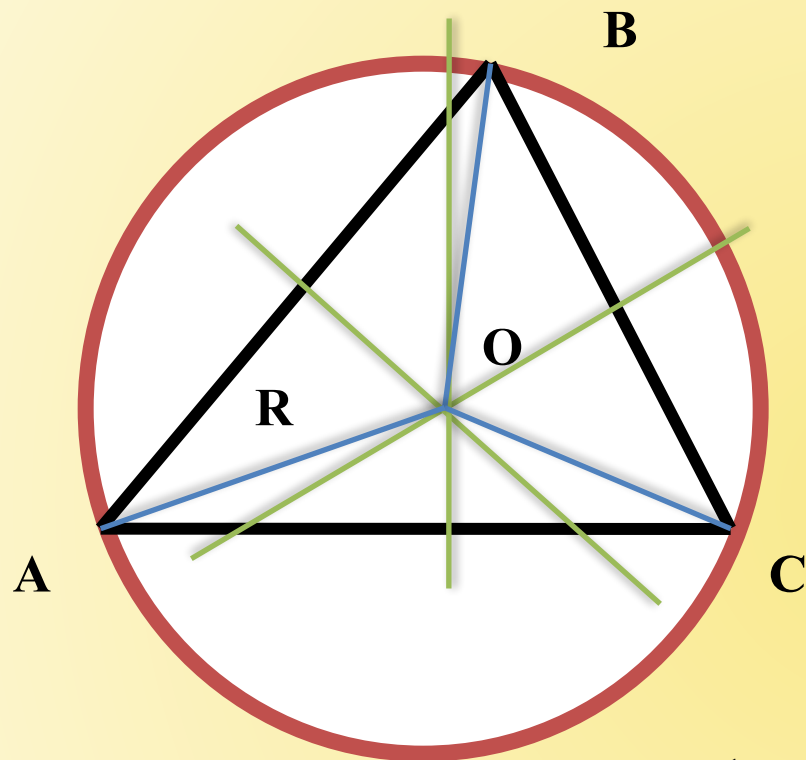
Площадь треугольника равна половине произведения
его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r +$$

$$+ \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

$r =$ радиус вписанной окружности.

Площадь треугольника через R-радиус описанной окружности



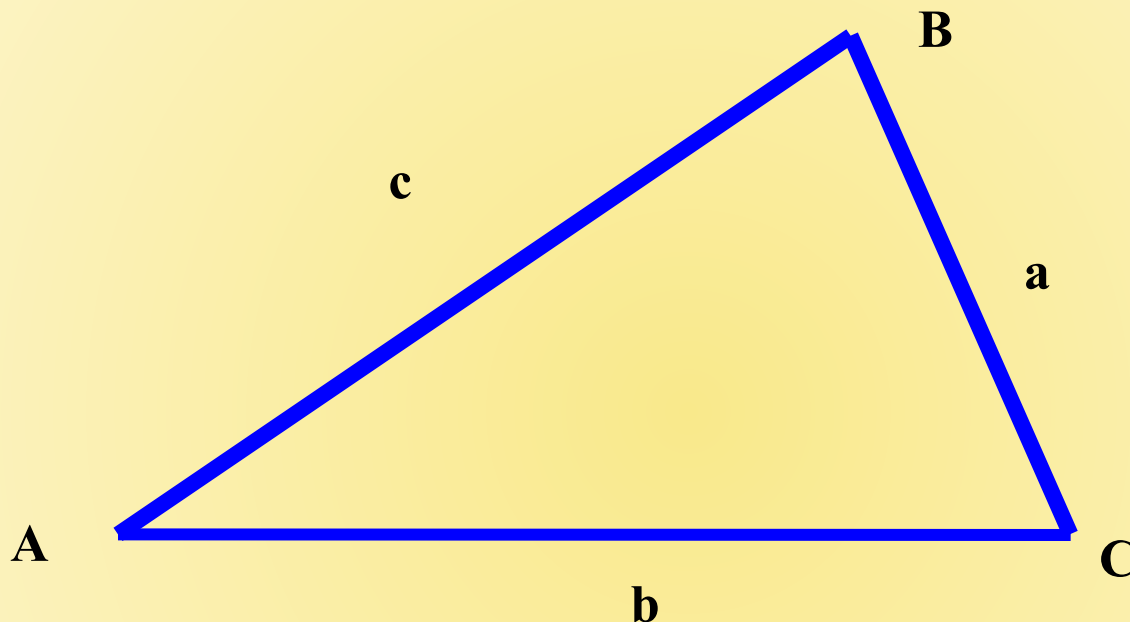
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Мы знаем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $\sin C$ найдем из соотношения

$$\frac{c}{\sin C} = 2R; \sin C = \frac{c}{2R}, S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

I формула Герона



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Доказательство: По теореме косинусов можно записать:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$2ab \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = (1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma) = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2} (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Т.К. $a + b + c = 2p$
 $a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c$
 $c + a - b = c + a + b - 2b = 2p - 2b$
 $c - a + b = c + b + a - 2a = 2p - 2a,$ **то**

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{4a^2b^2} \cdot (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p = \frac{16}{4a^2b^2} (p - a)(p - b)(p - c) \cdot p =$$

$$= \frac{4}{a^2b^2} (p - a)(p - b)(p - c) \cdot p.$$

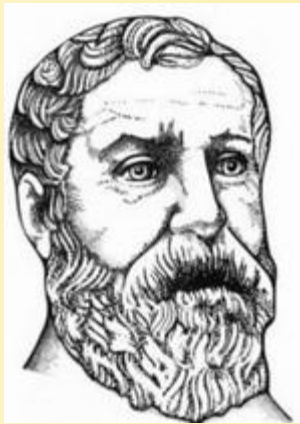
$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}.$$

$$S. = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Ч.Т.Д.

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

(Heronus Alexandrinus)



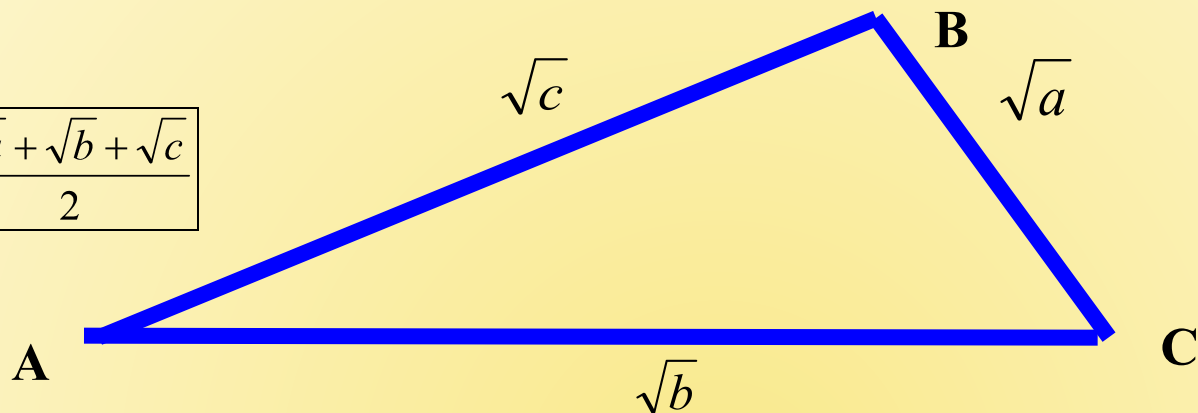
Герон Александрийский – греческий учёный, работавший в Александрии, (даты рождения и смерти неизвестны, вероятно, I – II вв. н. э.).

Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. В "Метрике" даны правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрических фигур, например *формула Герона* для определения площади треугольника по трём сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубических корней. В основном изложение в математических трудах Герона догматично – правила часто не выводятся, а только выясняются на примерах.

Герон занимался [геометрией](#) Герон занимался геометрией, [механикой](#) Герон занимался геометрией, механикой, [гидростатикой](#) Герон занимался

II формула Герона

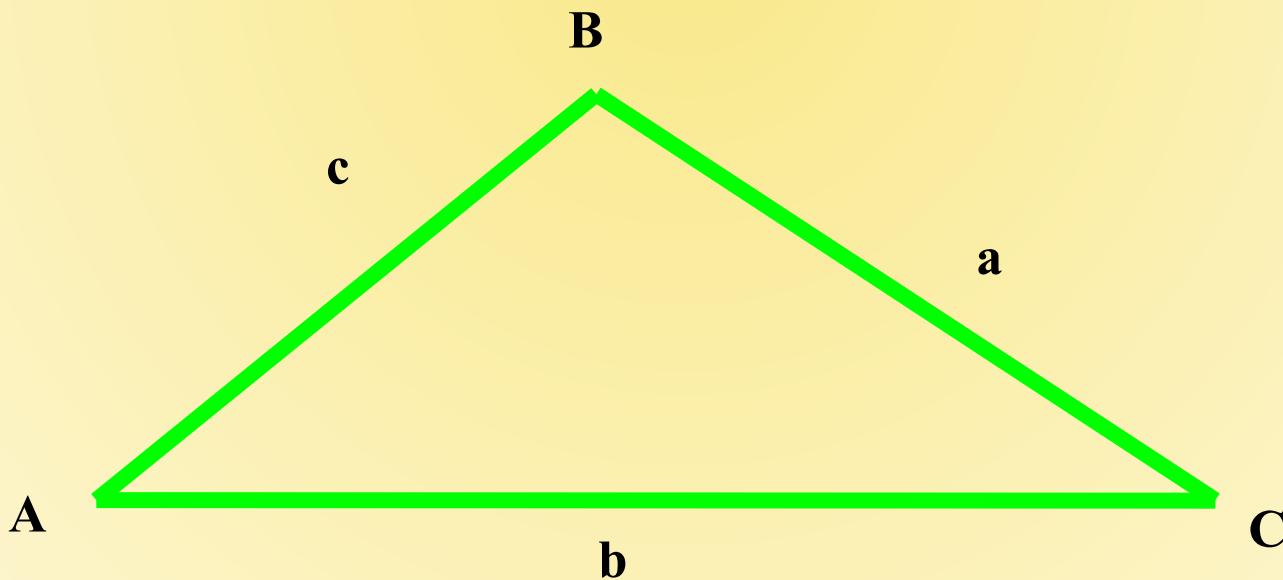
$$p = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}$$



$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4ab - (a + b - c)^2}$$

Итак, мы получили II формулу Герона. И если стороны треугольника a, b, c , то запишем ее в виде:

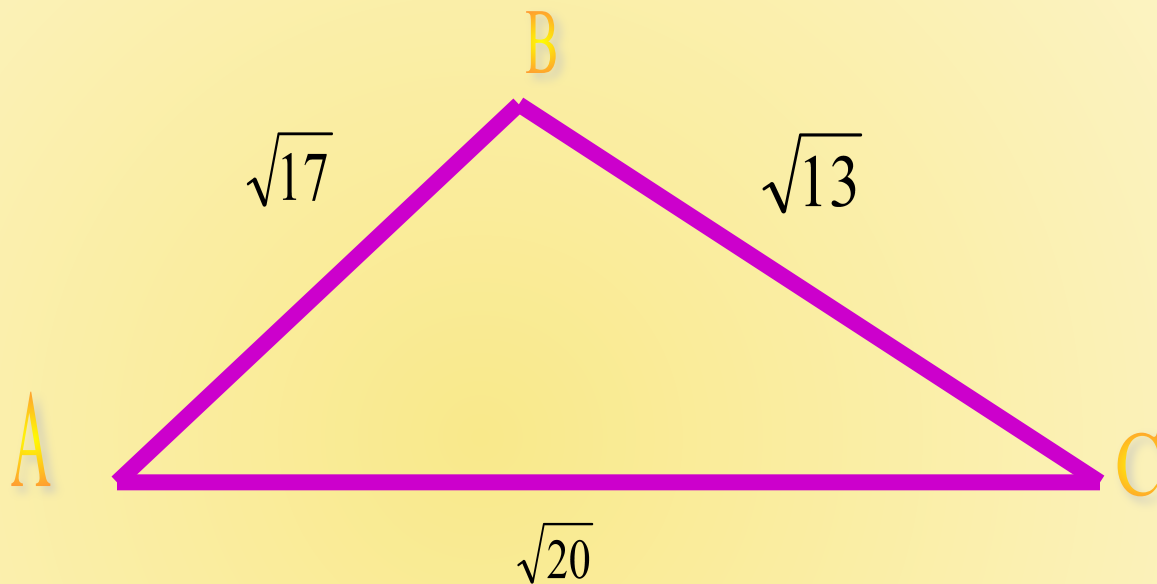
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$



Задача №1

Найти площадь треугольника со сторонами

$$\sqrt{17}, \sqrt{20}, \sqrt{13}$$



Решение:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

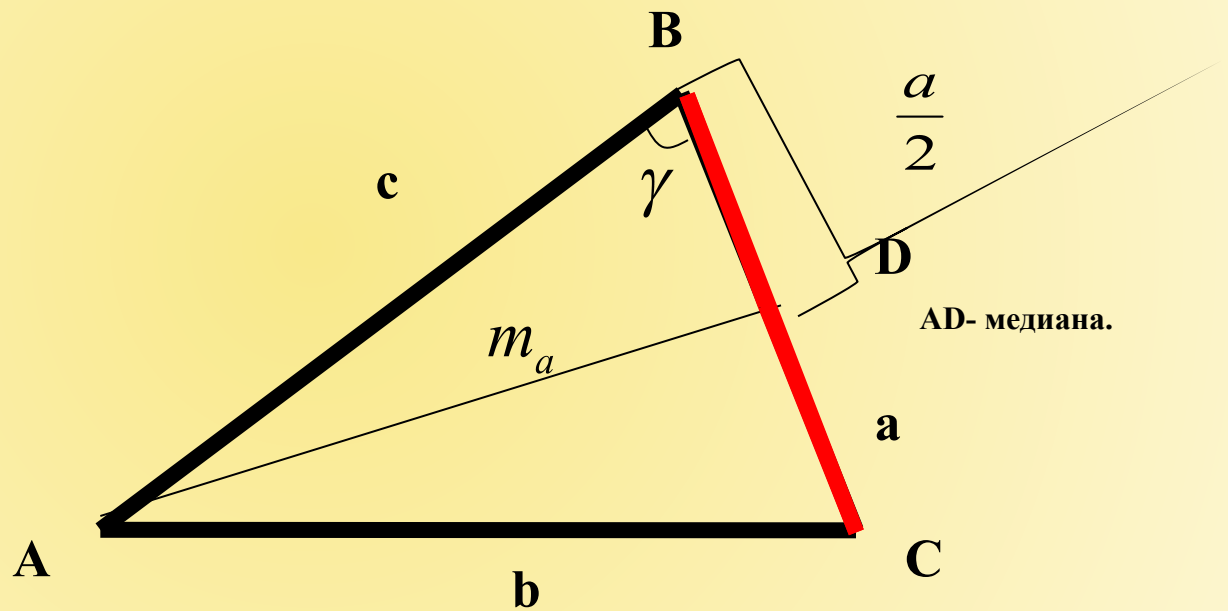
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 13 \cdot 20 - (13 + 20 - 17)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1040 - 256} = \frac{1}{4} \sqrt{784} = 7$$

Формулы медиан треугольника

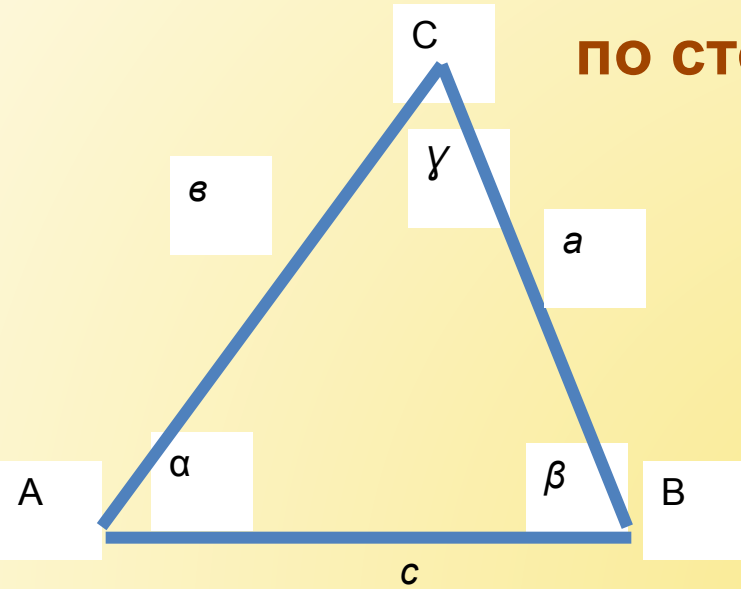
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

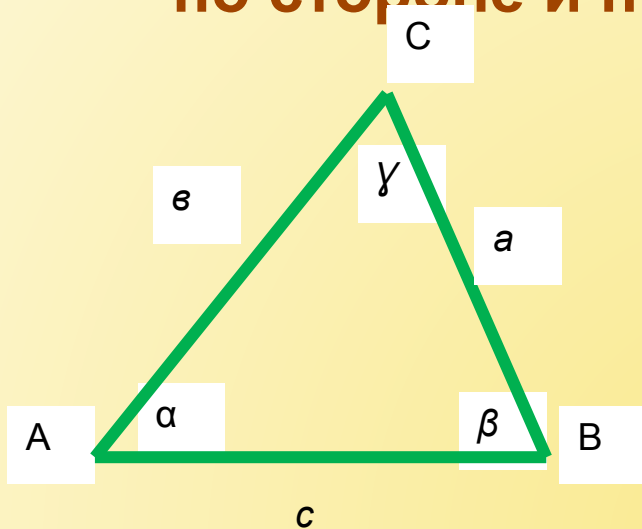


Вычисление площади треугольника
по стороне и прилежащим к ней углам.



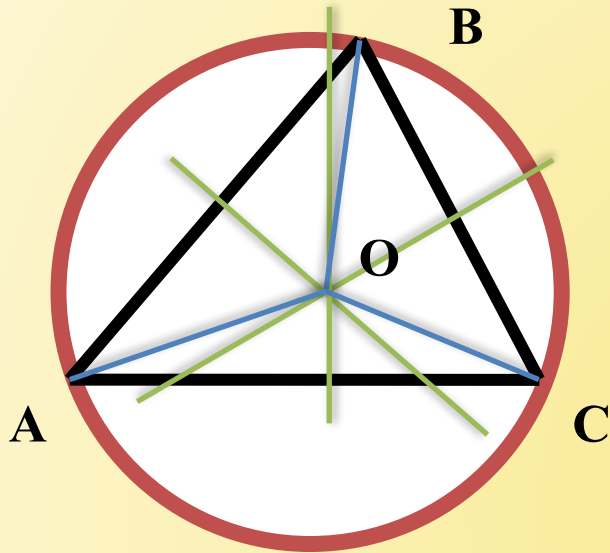
$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



$$S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и радиус описанной окружности.



$$S = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Доказательство :

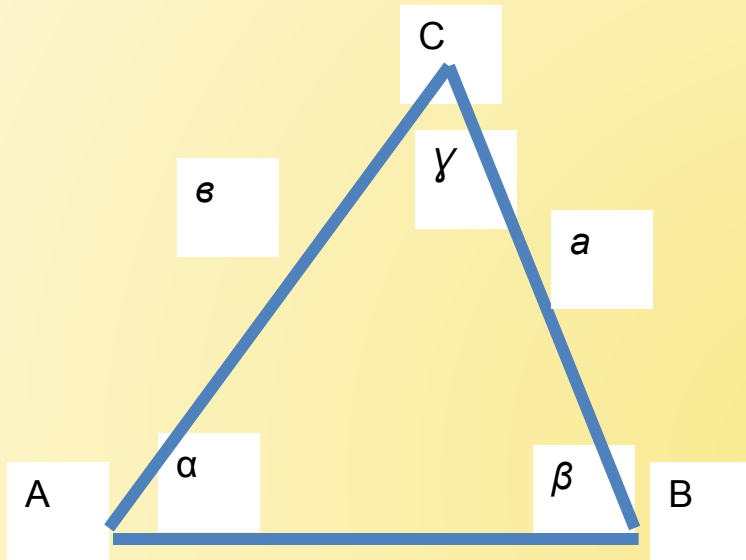
$$\text{Из } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

получим $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$. Подставим в формулу

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и одну из сторон треугольника



$$S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

Доказательство :

Из $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ имеем $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$

Подставим в формулу $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$; $S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$

Вычисление площади треугольника через радиусы внеписанных окружностей.

Внеписанная окружность- это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c)$$

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

r_a, r_b, r_c – радиусы внеписанных окружностей

p – полупериметр

