

Алгоритмы раскраски графа

Необходимо раскрасить вершины графа таким образом, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета.

Минимальное число красок, в которые можно раскрасить граф называется *хроматическим числом графа*.

Задача раскраски вершин графа относится к NP-полным задачам. Различают точные и приближенные алгоритмы

Раскраски. Примером точных алгоритмов служит алгоритм Вейссмана.

Алгоритм состоит из двух частей:

1. Построение семейства максимальных внутренне устойчивых множеств (МВУМ) (метод Магу);
2. Выбор минимального числа МВУМ, покрывающих все вершины графа (метод Петрика).

Множество вершин X_s графа $G(X, U)$ называется *внутренне устойчивым (независимым)*, если никакие две вершины из этого множества не смежны, $X_s \subset X$ [$\Gamma X_s \cap X_s = \emptyset$]. Внутренне устойчивое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого

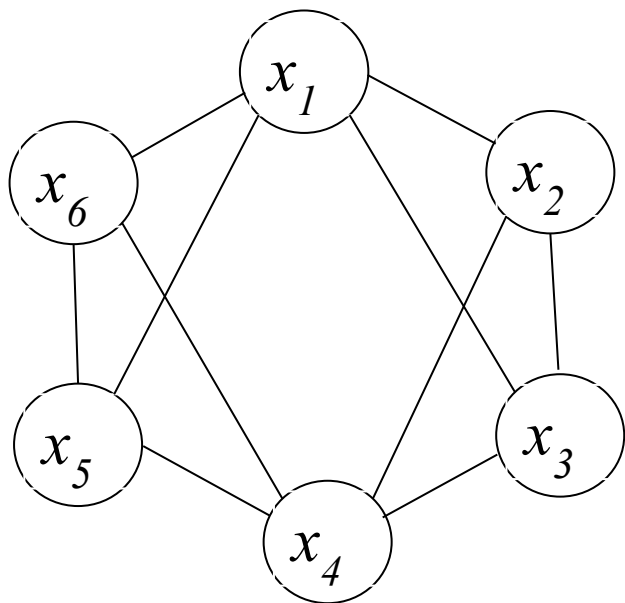
1. В матрице соединений R для каждой вершины подсчитывается число ненулевых элементов r_i ;
2. Находится вершина x_i с $\max r_i$, если таких вершин несколько, то выбирается любая;
3. Для выбранной вершины x_i записывается выражение $C_i = (x_i \vee x_a x_b \dots x_q)$, где $\Gamma x_i = \{x_a, x_b, \dots, x_q\}$;
4. Из матрицы R удаляются строка и столбец, соответствующие вершине x_i ;
5. Если $R \neq \emptyset$, то переход к п. 2, иначе к п. 6;
6. Составляется конъюнкция $\Pi = \bigwedge C_i$. Раскрываются скобки. В полученной дизъюнкции на основе законов булевой алгебры выполняется минимизация.
7. Результат минимизации записывается в виде $\Pi = \bigvee K_j$;
8. Для каждого K_j ищутся вершины графа, не вошедшие в него. Получено ϕ_j и семейство МВУМ $\Psi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l\}$;
9. Для каждой вершины $x_i \in X$ определяются подмножества ϕ_j , в которые входит вершина $x_i \in \phi_j$. Составляется дизъюнкция $t_i = \bigvee \phi$.

10. Составляется конъюнкция $\Pi' = \bigwedge t_j$. Раскрываются скобки. В полученной дизъюнкции на основе законов булевой алгебры выполняется минимизация;

11. Получена дизъюнкция конъюнктивных термов $\Pi' = \bigvee (\bigwedge \phi_j)$. Выбирается конъюнктивный терм $\bigwedge \phi_j$ с минимальным числом сомножителей.

Количество сомножителей в этом терме и есть хроматическое число графа. Число минимальных термов – число вариантов раскраски графа. А каждое ϕ_j – множество вершин, которые можно окрасить в один цвет.

Заметим, что п.п. 1-8 составляют метод Магу, а п.п. 9-11 – метод Петрика.



$$R = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & r_i \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ x_2 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x_3 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x_4 & & & & 0 & 1 & 1 & 4 \\ x_5 & & & & & 0 & 1 & 3 \\ x_6 & & & & & & 0 & 3 \end{array}$$

1. В матрице R подсчитываем число ненулевых элементов r_i ;
2. $\max r_i = r_1 = r_4 = 4$, выбираем x_1 ;
3. $\Gamma x_1 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$, записываем выражение

$$C_1 = (x_1 \vee x_2 x_3 x_5 x_6);$$
4. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_1 ;

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r_i
x_2	0	1	1	0	0	2
x_3		0	1	0	0	2
x_4			0	1	1	4
x_5				0	1	2
x_6					0	2

	x_2	x_3	x_5	x_6	r_i
x_2	0	1	0	0	1
x_3		0	0	0	1
x_5			0	1	1
x_6				0	1

	x_3	x_5	x_6	r_i
x_3	0	0	0	0
x_5		0	1	1
x_6			0	1

	x_3	x_6	r_i
x_3	0	0	0
x_6		0	0

5. $R \neq \emptyset$, $\max r_i = r_4 = 4$;

$\Gamma x_4 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$,

$C_4 = (x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6)$;

6. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_4 ;

7. $R \neq \emptyset$, $\max r_i = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 1$, выбираем x_2 ;

$\Gamma x_2 = \{x_3\}$, $C_2 = (x_2 \vee x_3)$;

8. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_2 ;

9. $R \neq \emptyset$, $\max r_i = r_5 = r_6 = 1$, выбираем x_5 ;

$\Gamma x_5 = \{x_6\}$, $C_5 = (x_5 \vee x_6)$;

10. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_5 ;

11. $R = \emptyset$;

12. Составляем конъюнкцию C_i и выполняем минимизацию

$$\begin{aligned}
 \Pi = \bigwedge C_i = C_1 C_2 C_4 C_5 &= (x_1 \vee x_2 x_3 x_5 x_6)(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6)(x_5 \vee x_6) = \\
 &= x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_6 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 x_6 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 = \bigvee K_j = \\
 &= \bigvee_{j=1}^5 K_j;
 \end{aligned}$$

13. Для каждого K_j ищем ϕ_j :

$$\phi_1 = \{x_3, x_6\}, \phi_2 = \{x_3, x_5\}, \phi_3 = \{x_2, x_6\}, \phi_4 = \{x_2, x_5\}, \phi_5 = \{x_1, x_4\}.$$

Получено семейство МВУМ Ψ ;

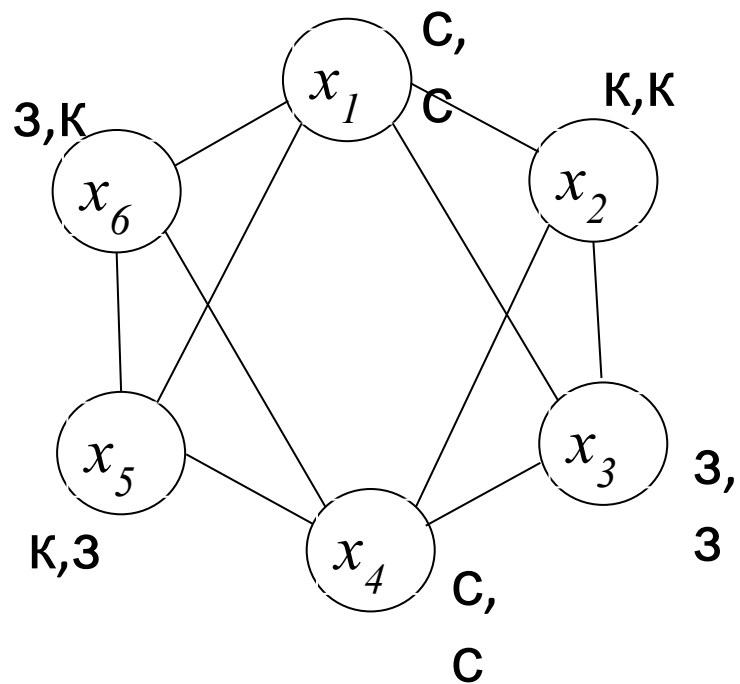
14. Для каждой вершины определим подмножества ϕ_j , в которые она входит. Строим дизъюнкцию $t_i = \bigvee \phi_j$;

$$t_1 = \phi_5; t_2 = \phi_3 \vee \phi_4; t_3 = \phi_1 \vee \phi_2; t_4 = \phi_5; t_5 = \phi_2 \vee \phi_4; t_6 = \phi_1 \vee \phi_3;$$

15. Составляем конъюнкцию и выполняем минимизацию булевой функции

$$\begin{aligned}
 \Pi' = \bigwedge t_i = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 &= \phi_5 (\phi_3 \vee \phi_4) (\phi_1 \vee \phi_2) \phi_5 (\phi_2 \vee \phi_4) (\phi_1 \vee \phi_3) = \\
 &= \phi_1 \phi_4 \phi_5 \vee \phi_2 \phi_3 \phi_5
 \end{aligned}$$

Хроматическое число графа $\chi(G) = 3$. Существует два варианта раскраски графа.



$$\phi_1 = \{x_3, x_6\}, \phi_2 = \{x_3, x_5\}, \phi_3 = \{x_2, x_6\},$$

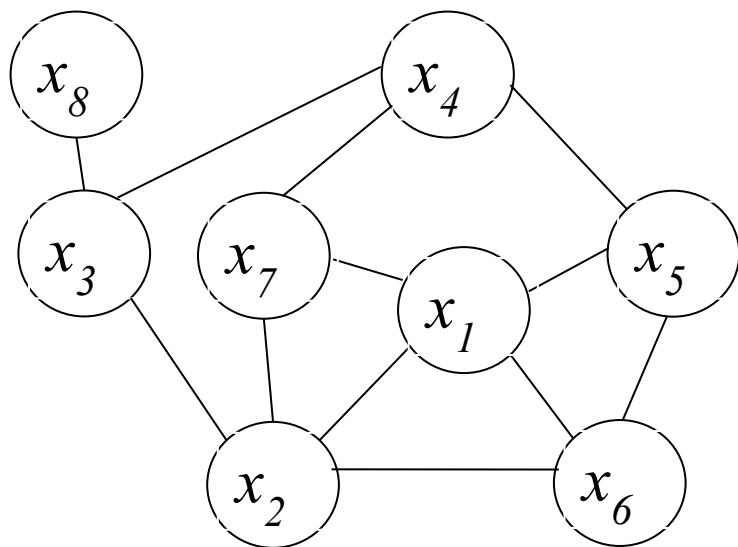
$$\phi_4 = \{x_2, x_5\}, \phi_5 = \{x_1, x_4\}.$$

$$\phi_1 \phi_4 \phi_5 \vee \phi_2 \phi_3 \phi_5$$

Недостатком точных алгоритмов является низкое быстродействие. Поэтому на практике используют приближенные алгоритмы, примером которых может служить

Алгоритм, использующий упорядочивание вершин

1. Положить $j = 1$;
2. В матрице R подсчитываем число ненулевых элементов r_i ;
3. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i ;
4. Просматривая последовательность слева направо, красить в цвет j каждую неокрашенную вершину, не смежную с уже окрашенными в этот цвет;
5. Если остались неокрашенные вершины, то удалить из матрицы R строки и столбцы, соответствующие окрашенным вершинам. Положить $j = j + 1$ и перейти к п. 2, иначе, задача решена.



$R =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	r_i
x_1	0	1	0	0	1	1	1	0	4
x_2		0	1	0	0	1	1	0	4
x_3			0	1	0	0	0	1	3
x_4				0	1	0	1	0	3
x_5					0	1	0	0	3
x_6						0	0	0	3
x_7							0	0	3
x_8								0	1

1. Положим $j = 1$;

2. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i .

$x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}, x_{4'}, x_{5'}, x_{6'}, x_{7'}, x_{8'}$;

3. Красим в первый цвет вершины x_1 и x_3 . Вершины x_4 и x_8 смежны вершине x_3 , остальные – смежны вершине x_1 ;

4. Остались неокрашенные вершины, поэтому удалим из матрицы R строки и столбцы, соответствующие вершинам x_1 и x_3 . Положим $j = j + 1 = 2$.

	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	r_i
x_2	0	0	0	1	1	0	2
x_4		0	1	0	1	0	2
x_5			0	1	0	0	2
x_6				0	0	0	2
x_7					0	0	2
x_8						0	0

5. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i :

$x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$;

6. Красим во второй цвет вершины x_2, x_4 и x_8 . Вершины x_5 и x_7 смежны вершине x_4 , вершина x_6 смежна вершине x_2 ;

	x_5	x_6	x_7	r_i
x_5	0	1	0	1
x_6		0	0	1
x_7			0	0

7. Остались неокрашенные вершины, удалим из матрицы R строки и столбцы, соответствующие вершинам x_2, x_4 и x_8 . Положим $j = j + 1 = 3$.

8. Упорядочим вершины графа в r_i : x_5, x_6, x_7 .

9. Красим в третий цвет вершины x_5 и x_7 . Вершины x_6 и x_5 смежны; осталась неокрашенная вершина, удалим из матрицы R строки и столбцы, соответствующие вершинам x_5 и x_7 .

10. В четвертый цвет окрашиваем вершину x_6 .

Все вершины окрашены.

Достоинство алгоритма – быстродействие. Недостаток – не оптимальность.

Для раскраски вершин графа приближенным алгоритмом потребовалось четыре цвета. А хроматическое число графа χ равно 3. Действительно, если в первый цвет окрасить вершины x_1, x_4 и x_8 , во второй – x_2 и x_5 , то в третий можно окрасить оставшиеся вершины x_3, x_6 и x_7 .

Кратчайшие пути

Пусть дан граф $G(X, \Gamma)$, ребрам которого приписаны веса, заданные матрицей $C = ||c_{ij}||_{m \times m}$. *Задача о кратчайшем пути* состоит в нахождении пути с минимальным суммарным весом от начальной вершины $s \in X$ до конечной $t \in X$ или от начальной вершины $s \in X$ до всех остальных, при условии, что такие пути существуют.

Решением алгоритм Дейкстры. Он основан на приписывании вершинам временных пометок, дающих верхнюю границу длины пути от s к этой вершине. Эти пометки постепенно уточняются, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Это указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Алгоритм работает только для графов без ребер отрицательного веса.

Пусть $l(x_i)$ пометка вершины x_i , а $l(x_i)^+$ - постоянная пометка вершины.

1. Положить $l(s)=0^+$ и считать эту пометку постоянной. Положить $l(x_i)=\infty$ для всех $x_i \neq s$ и считать их временными. Положить $p=s$.

2. Для всех $x_i \in \Gamma p$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением

$$l(x_i) = \min[l(x_i), l(p) + c(p, x_i)].$$

3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$.

4. Считать пометку вершины x_i^* постоянной $l(x_i^*)^+$ и положить $p=x_i^*$. (Если надо найти лишь путь от s до t).

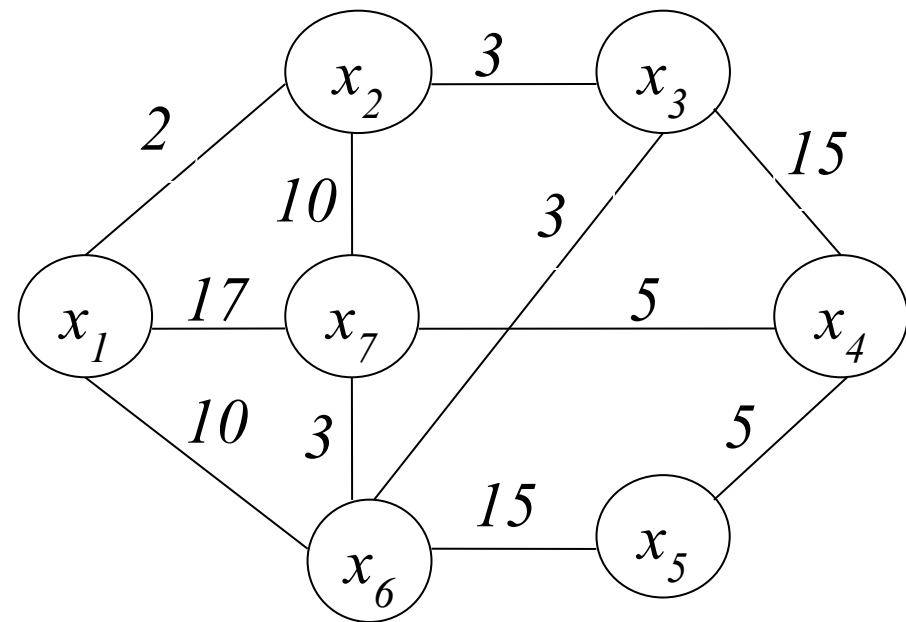
Если $p=t$, то $l(p)$ – длина кратчайшего пути, конец. Если $p \neq t$, перейти к п.2.

6. (Если надо найти путь от s до всех остальных вершин).

Если все вершины имеют постоянные пометки, то конец, если есть временные пометки, то перейти к п.2.

Сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры с использованием соотношения: $l(x_i') + c(x_i', x_i) = l(x_i)$, где x_i' – вершина, непосредственно предшествующая вершине x_i в кратчайшем пути от s к x_i .

Заданы взвешенный граф $G(X, \Gamma)$ и матрица весов $C = \|c_{ij} 7 \times 7\|$.
 Необходимо найти кратчайшие пути от начальной вершины x_1 ко всем остальным вершинам.



$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & & & & 10 & 17 \\ 2 & 0 & 3 & & & & 10 \\ & 3 & 0 & 15 & & 3 & \\ & & 15 & 0 & 5 & & 5 \\ & & & 5 & 0 & 15 & \\ 10 & & 3 & & 15 & 0 & 3 \\ 17 & 10 & & 5 & & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1. $l(x_1) = 0^+$; $l(x_i) = \infty$, для всех $i \neq 1$, $p = x_1$.

Результаты итерации запишем в таблицу.

			1	2			1	2	3
$L=$	x_1	0^+	x_1	0^+		x_1	0^+		
	x_2	∞	x_2	∞	2^+	x_2	∞	2^+	
	x_3	∞	x_3	∞	∞	x_3	∞	∞	5^+
	x_4	∞	x_4	∞	∞	x_4	∞	∞	∞
	x_5	∞	x_5	∞	∞	x_5	∞	∞	∞
	x_6	∞	x_6	∞	10	x_6	∞	10	10
	x_7	∞	x_7	∞	17	x_7	∞	17	12

2. $\Gamma p = \{x_2, x_6, x_7\}$ – все пометки временные, уточним их:

$$l(x_2) = \min[\infty, 0^+ + 2] = 2;$$

$$l(x_6) = \min[\infty, 0^+ + 10] = 10;$$

$$l(x_7) = \min[\infty, 0^+ + 17] = 17.$$

3. $l(x_i^*) = \min[l(x_i)] = l(x_2) = 2.$

4. x_2 получает постоянную пометку $l(x_2) = 2^+,$

5. Не все вершины имеют постоянные пометки, $\Gamma p = \{x_1, x_3, x_7\}$ – временные пометки имеют вершины x_3, x_7 уточняем их:

$$l(x_3) = \min[\infty, 2^+ + 3] = 5; \quad l(x_7) = \min[17, 2^+ + 10] = 12.$$

$$6. l(x_i^*) = \min[l(x_i)] = l(x_3) = 5.$$

$$7. l(x_3) = 5^+, p=x_3.$$

8. Не все вершины имеют постоянные пометки, $\Gamma p = \{x_2, x_4, x_6\}$ – временные пометки имеют вершины x_4, x_6 уточняем их:

$$l(x_4) = \min[\infty, 5^+ + 15] = 20; \quad l(x_6) = \min[10, 5^+ + 3] = 8.$$

$$9. l(x_i^*) = \min[l(x_i)] = l(x_6) = 8.$$

$$10. l(x_6) = 8^+, p=x_6.$$

11. $\Gamma p = \{x_1, x_5, x_7\}$ – временные пометки имеют вершины x_5, x_7 уточняем их: $l(x_5) = \min[\infty, 8^+ + 15] = 23; \quad l(x_7) = \min[12, 8^+ + 3] = 11.$

	1	2	3	4
x_1	0^+			
x_2	∞	2^+		
x_3	∞	∞	5^+	
x_4	∞	∞	∞	20
x_5	∞	∞	∞	∞
x_6	∞	10	10	8^+
x_7	∞	17	12	12

	1	2	3	4	5
x_1	0^+				
x_2	∞	2^+			
x_3	∞	∞	5^+		
x_4	∞	∞	∞	20	20
x_5	∞	∞	∞	∞	23
x_6	∞	10	10	8^+	
x_7	∞	17	12	12	11^+

12. $l(x_i^*) = \min[l(x_i)] = l(x_7) = 11.$

13. $l(x_7) = 11^+, p=x_7.$
14. Не все пометки постоянные, $\Gamma p = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ – временную пометку имеет вершина x_4 уточняем ее: $l(x_4) = \min[20, 11^+ + 5] = 16.$

15. $l(x_i^*) = \min[l(x_i)] = l(x_4) = 16.$

16. $l(x_4) = 16^+, p=x_4.$
17. Не все пометки постоянные, $\Gamma p = \{x_3, x_5, x_7\}$ – временную пометку имеет вершина x_5 уточняем ее: $l(x_5) = \min[23,$

18. ~~$16^+ + 5]$~~ $21. l(x_5) = 21.$

19. $l(x_5) = 21^+, p=x_5.$
20. Все пометки постоянные.

1

2

3

4

5

6

x_1

x_2

x_3

x_4

x_5

x_6

x_7

0^+					
∞	2^+				
∞	∞	5^+			
∞	∞	∞	20	20	16^+
∞	∞	∞	∞	23	23
∞	10	10	8^+		
∞	17	12	12	11^+	

1

2

3

4

5

6

7

x_1

x_2

x_3

x_4

x_5

x_6

x_7

0^+						
∞	2^+					
∞	∞	5^+				
∞	∞	∞	20	20	16^+	
∞	∞	∞	∞	23	23	21^+
∞	10	10	8^+			
∞	17	12	12	11^+		

Кратчайшие расстояния от вершины x_1 до всех вершин найдены.

Как найти кратчайший путь до конкретной вершины, покажем на примере вершины x_5 .

$$21 = l(x_4) + c(x_4, x_5) = 16 + 5, \quad 21 \neq l(x_6) + c(x_6, x_5) = 8 + 15.$$

Это означает, что в вершину x_5 мы попали из вершины x_4 .

$$\text{Далее, } l(x_4) = 16, \Gamma x_4 = \{x_3, x_5, x_7\}, \quad 16 \neq l(x_3) + c(x_3, x_4) = 5 + 15,$$

$$16 \neq l(x_5) + c(x_5, x_4) = 21 + 15, \quad 16 = l(x_7) + c(x_7, x_4) = 11 + 5.$$

Это означает, что в вершину x_4 мы попали из вершины x_7 .

$$\text{Далее, } l(x_7) = 11, \Gamma x_7 = \{x_1, x_4, x_6\}, \quad 11 \neq l(x_1) + c(x_1, x_7) = 0 + 17,$$

$$11 \neq l(x_4) + c(x_4, x_7) = 16 + 5, \quad 11 = l(x_6) + c(x_6, x_7) = 8 + 3.$$

Это означает, что в вершину x_7 мы попали из вершины x_6 .

$$\text{Далее, } l(x_6) = 8, \Gamma x_6 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}, \quad 8 \neq l(x_1) + c(x_1, x_6) = 0 + 10,$$

$$8 = l(x_3) + c(x_3, x_6) = 5 + 3, \quad 8 \neq l(x_5) + c(x_5, x_6) = 21 + 15, \quad 8 \neq l(x_7) + c(x_7, x_6) = 11 + 3.$$

Это означает, что в вершину x_6 мы попали из вершины x_3 .

$$\text{Далее, } l(x_3) = 5, \Gamma x_3 = \{x_2, x_4, x_6\}, \quad 5 = l(x_2) + c(x_2, x_3) = 2 + 3,$$

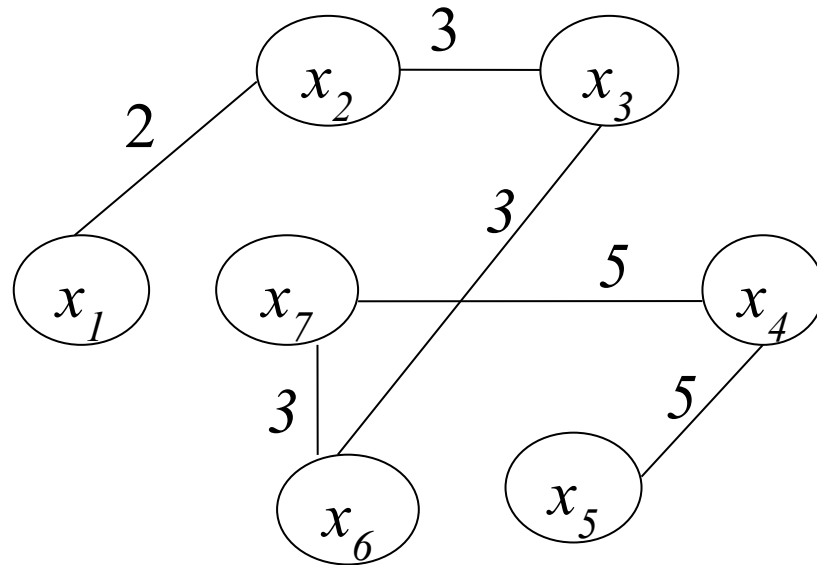
$$5 \neq l(x_4) + c(x_4, x_3) = 16 + 15, \quad 5 \neq l(x_6) + c(x_6, x_3) = 8 + 3.$$

Это означает, что в вершину x_3 мы попали из вершины x_2 .

Далее, $l(x_2) = 2$, $\Gamma x_2 = \{x_1, x_3, x_7\}$, $2 = l(x_1) + c(x_1, x_2) = 0 + 2$,
 $2 \neq l(x_3) + c(x_3, x_2) = 5 + 3$, $2 \neq l(x_7) + c(x_7, x_2) = 11 + 10$.

Это означает, что в вершину x_2 мы попали из вершины x_1 .

Кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_5 найден.



Задачи, близкие к задаче о кратчайшем пути

1. Наиболее надежный путь.

В этом случае вес ребра представляет его надежность.

Надежность пути от s к t , составленного из ребер, взятых из множества P , задается формулой

$$\rho_{st}^{(P)} = \prod_{(x_i, x_j) \in P} \rho_{ij}$$

где ρ_{ij} – надежность ребра (x_i, x_j) .

2. *Самый длинный (критический) путь.*

Задача сетевого планирования, заключающаяся в нахождении самого длинного по временной протяженности пути в сетевом графике, определяющего продолжительность работ по выполнению проекта.

3. *Путь с наибольшей пропускной способностью.*

В этом случае каждое ребро графа имеет пропускную способность q_{ij} и требуется найти путь от s к t с наибольшей пропускной способностью. Пропускная способность пути P определяется ребром из P с наименьшей пропускной способностью, т.е.

$$Q(P) = \min_{(x_i, x_j) \in P} [q_{ij}].$$

Определение. Если множество вершин графа $G(X, U)$ разбить на два подмножества X_1 и X_2 (где $X = X_1 \cup X_2$), то множество ребер графа, одни концевые вершины которых лежат в X_1 , а другие в X_2 , называется *разрезом графа G* .

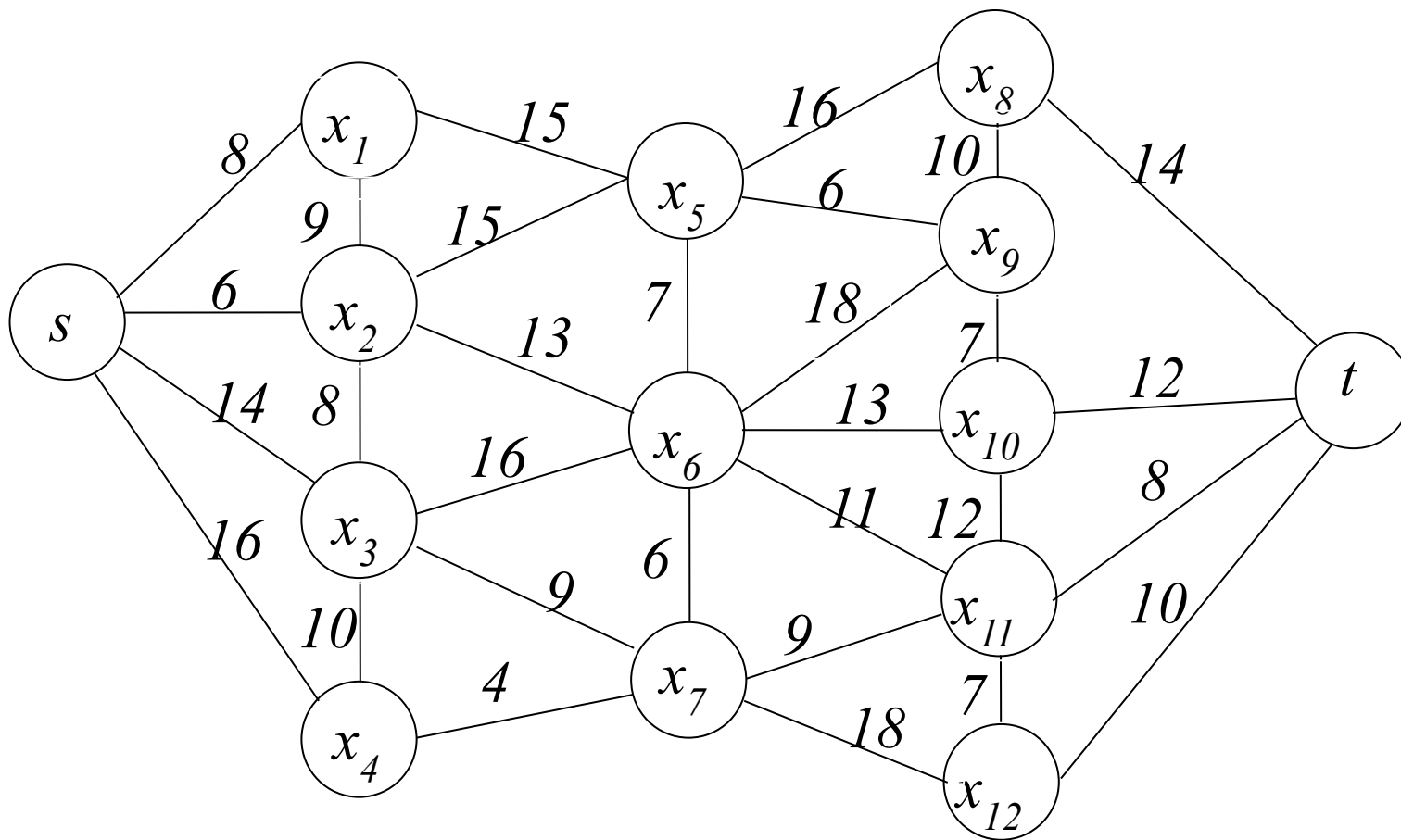
Теорема Форда – Фалкерсона. Пропускная способность пути с наибольшей пропускной способностью от s к t равна

$$Q(P) = \min_K \{ \max_{(x_i, x_j) \in K} [q_{ij}] \}, \quad \text{где } K - \text{любой } (s-t) \text{ разрез.}$$

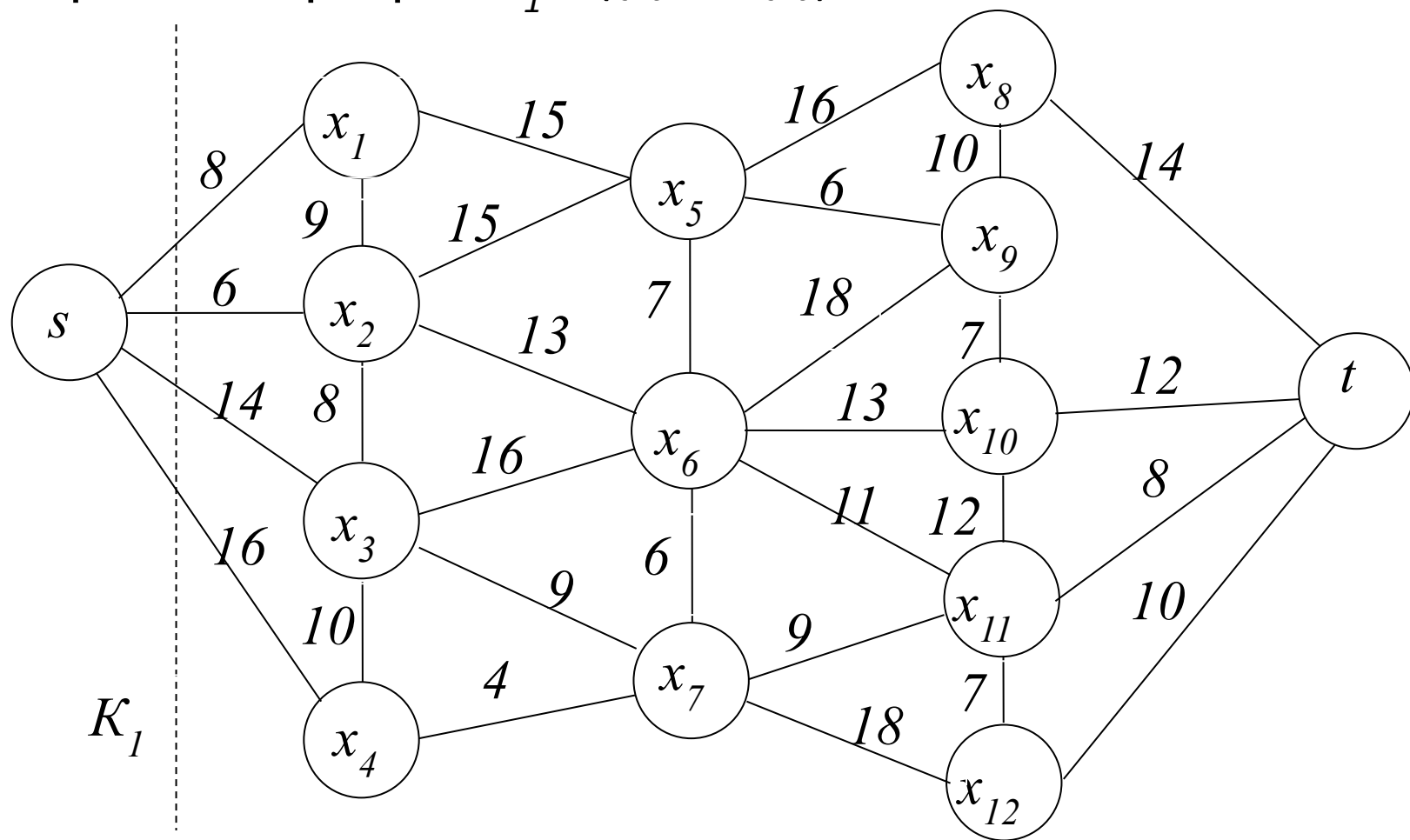
Алгоритм Франка – Фриша

1. Взять $(s-t)$ разрез $K_1 = (\{s\}, X \setminus \{s\})$ и найти $Q_1 = \max_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}]$.
2. Закоротить все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_1$, т.е. заменить вершины x_i и x_j на вершину x , удалив ребро (x_i, x_j) , положить $Q = Q_1$.
3. Для полученного графа G_1 выбрать другой $(s-t)$ разрез K_2 и найти $Q_2 = \max_{(x_i, x_j) \in K_2} [q_{ij}]$.
4. Закоротить все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_2$. Получить граф G_2 ... и т.д., пока не будут объединены вершины $s-t$.
5. Теперь каждый $(s-t)$ путь в графе G' , образованный вершинами из G и теми ребрами, которые оказались закороченными, будет иметь максимальную пропускную способность.

Найти $(s-t)$ путь с наибольшей пропускной способностью в графе $G(X,U)$



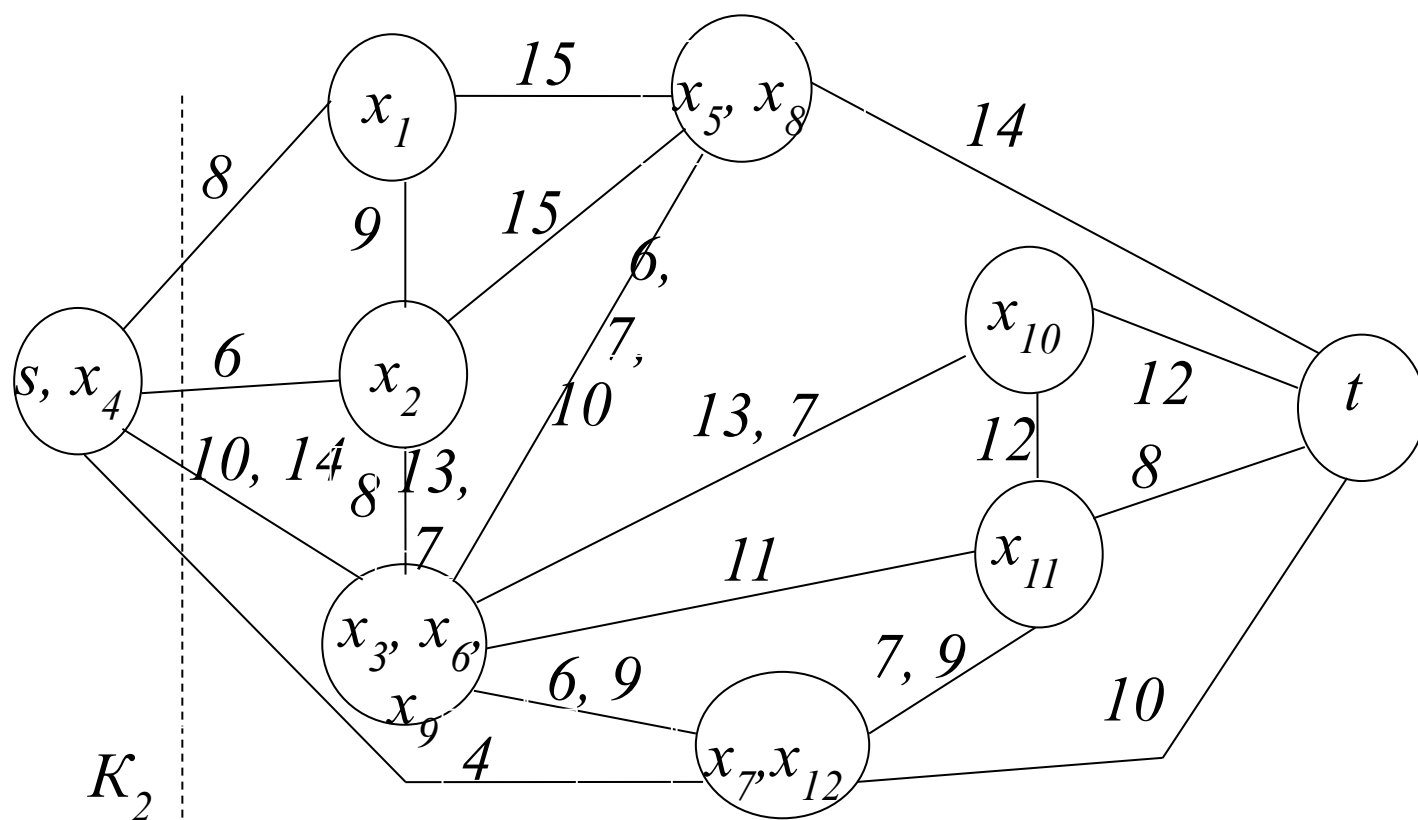
1. Проводим разрез $K_1 = (\{s\}, X \setminus \{s\})$



2. Находим $Q_1 = \max_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}] = 16$.

3. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_1$.

4. Это ребра (s, x_4) , (x_3, x_6) , (x_5, x_8) , (x_6, x_9) и (x_7, x_{12}) . Получаем граф



5. Проводим разрез K_2 ,

$$Q_2 = \max_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}] = 14.$$

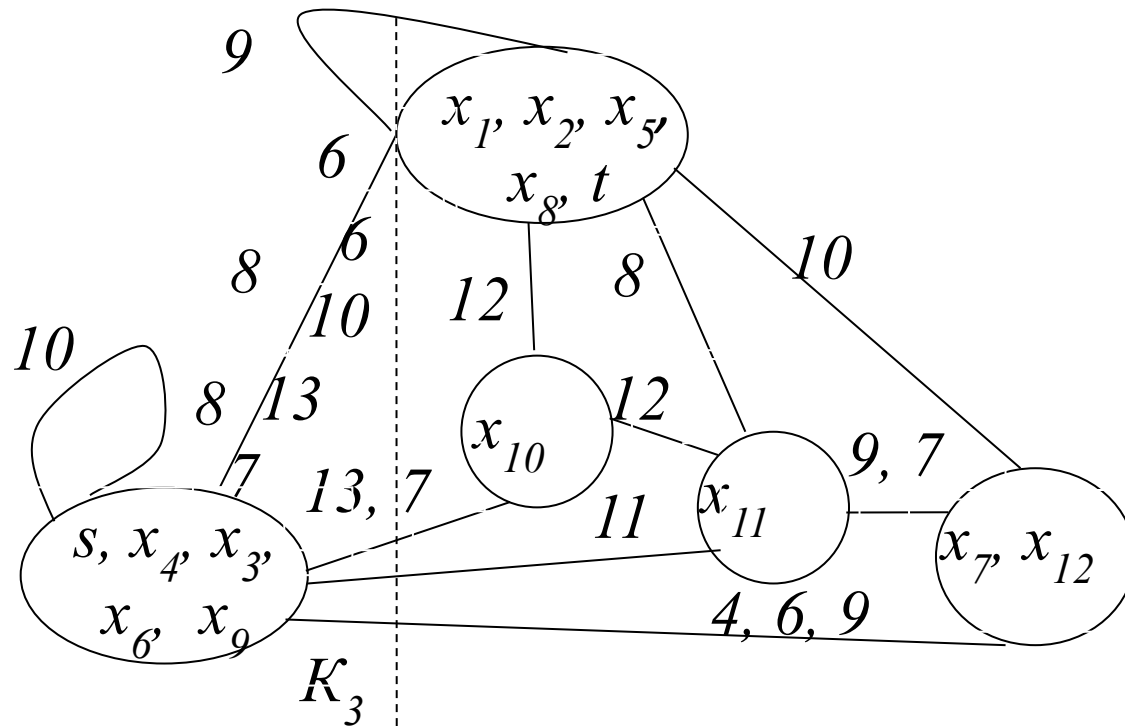
находим

6. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_2$. Это ребра $(s, x_4, x_3, x_6, x_9), (x_1, x_2, x_5, x_8, t)$. Получаем граф G_2 .

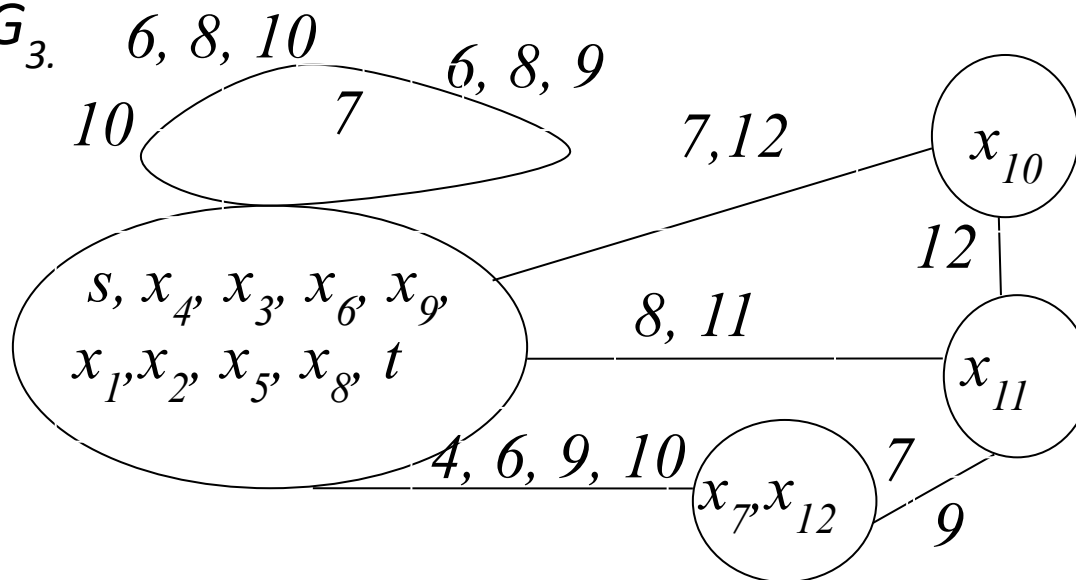
7. Проводим разрез K_3 ,

$$Q_3 = \max_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}] = 13.$$

находим

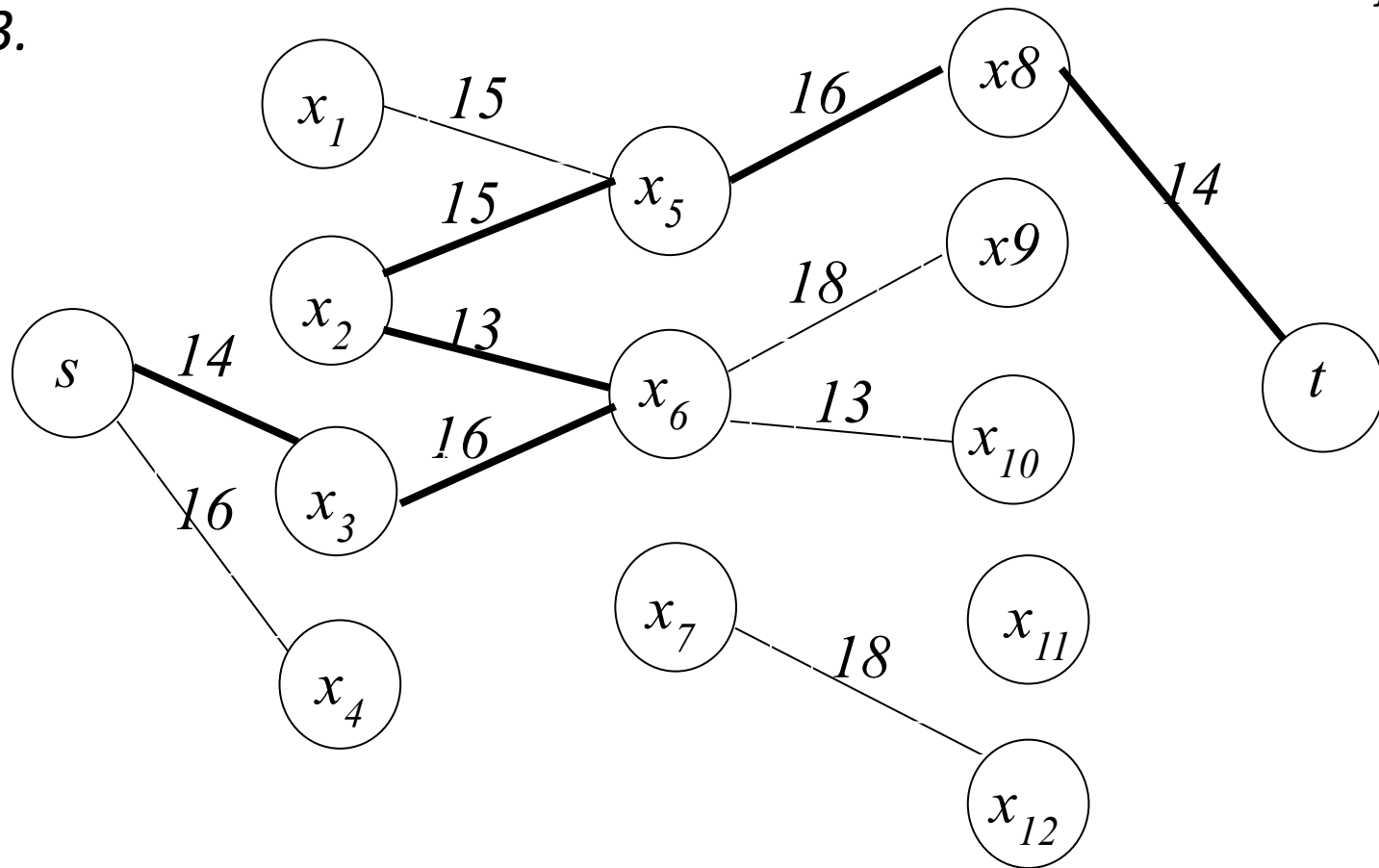


8. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_3$. Получаем граф G_3 .



9. Вершины s - t объединены. Пропускная способность искомого пути $Q(P)=13$.

10. Строим граф, вершины которого – вершины исходного графа G , а ребра – ребра с пропускной способностью $q_{ij} \geq Q(P)=13$.



Путь с наибольшей пропускной способностью.