

**Тема: Обчислення границь функцій.
Перша та друга важливі границі.**

1. Обчислення границь функцій.

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 . Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають **розкриттям невизначеності**.

1. Невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, що
задана відношенням двох многочленів.

Щоб знайти границю при $x \rightarrow \infty$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

треба чисельник і знаменник дробу
розділити на x^k , де k – найвищий степінь
цих многочленів, і використати що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{2 + 3x - 4x^3}$$

Розв'язання. Маємо невизначеність
вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Для знаходження границі поділимо
чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{2 + 3x - 4x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 4} =$$

$$= \frac{3 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - 4} = -\frac{3}{4}$$

2. Невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$, що задана відношенням двох многочленів.

Щоб знайти границю при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right),$$

треба в чисельнику і знаменнику виділити критичний множник $x - x_0$ і скоротити на нього дріб.

Приклад. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8}$$

Розв'язання. Підставляючи значення $x_0 = -2$ у вирази, які стоять у чисельнику і знаменнику дробу, переконуємося, що

маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0} \right)$

Виділяємо у чисельнику і в знаменнику критичний множник $x - x_0$, тобто $x + 2$:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4);$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4).$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} = -2 .$$

3. Невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$, що задана ірраціональними виразами

При знаходженні границі виразів з ірраціональностями використовують такий прийом: переведення ірраціональності із знаменника в чисельник або, навпаки, з чисельника в знаменник (домноження чисельника і знаменника на вираз, спряжений ірраціональності).

4. Розкриття невизначеностей вигляду

$$(\infty - \infty); (0 \cdot \infty)$$

При розкритті цих невизначеностей їх попередньо зводять до невизначеностей

вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $(\infty - \infty)$. Домножимо і поділимо вираз $\sqrt{x(x+1)} - x$ на

спряжений, тобто на $\sqrt{x(x+1)} + x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x(x+1)} - x)(\sqrt{x(x+1)} + x)}{\sqrt{x(x+1)} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1) - x^2}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{1}{2}$$

2. Перша та друга важливі границі.

Невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкривають за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідки.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \quad (k = \text{const})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \frac{k}{m} \quad (k, m - \text{сталі}, m \neq 0)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

використовується при розкритті
невизначеності (1^∞)

Трансцендентне число e наближено
дорівнює $e \approx 2,71184\dots$ і його називають
числом Ейлера.

Наслідки.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$$

3. Порівняння нескінченно малих.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ ($C = \text{const}$),

то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються
нескінченно малими одного порядку
при $x \rightarrow x_0$

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,

то функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку** ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,

то функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою нижчого порядку**, ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$

4. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C$,

де $k > 0$ і $C \neq 0$ – сталі, то функцію $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою k -го порядку** відносно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$

5. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **непорівнянними** при $x \rightarrow x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

6. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,

то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються **еквівалентними нескінченно малими** при $x \rightarrow x_0$. Позначається це так:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні при $x \rightarrow x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

Теорема. Нехай $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$
при $x \rightarrow x_0$. Якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \text{ то існує і границя } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

і ці границі рівні:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Еквівалентні нескінченно малі величини.

Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, тобто $\alpha(x) \in$

нескінченно малою функцією при $x \rightarrow x_0$

Тоді мають місце наступні

еквівалентності в околі точки $x = x_0$

$$\sin \alpha \sim \alpha$$

$$\arcsin \alpha \sim \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$$

$$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$$

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$$

$$\log_a(1 + \alpha) \sim \alpha \log_a e$$