

Здравствуйте.

Отправляю вам презентацию по решению тригонометрических уравнений.

Изучаем и пишем конспект на листочках. Ваши тетради у меня. На очных уроках сдадите, вставим в тетради. Всем хорошего дня, не болейте!

5.02.24 Тригонометрические уравнения(продолжение).

Для тригонометрических уравнений применяются общие методы решения:

- равносильные преобразования,
 - разложение на множители,
 - замена переменной,
 - применение свойств функций,
- а так же сочетание нескольких приёмов.

Основная идея решения тригонометрического уравнения – сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, т.е.

уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$,
 $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

$$\cos x = a, \quad |a| \leq 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\cos\pi x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{3}\pi\cos\pi x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{3}\pi\cos\pi x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{3}\cos\pi x = (-1)^k \frac{1}{6} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\pi x = (-1)^k \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Т.к. } |\cos\pi x| \leq 1, \quad \text{то } \left|(-1)^k \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k\right| \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0: \cos\pi x = \frac{1}{10}$$

$$\pi x = \pm \arccos\frac{1}{10} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos\frac{1}{10} + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1: \cos\pi x = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

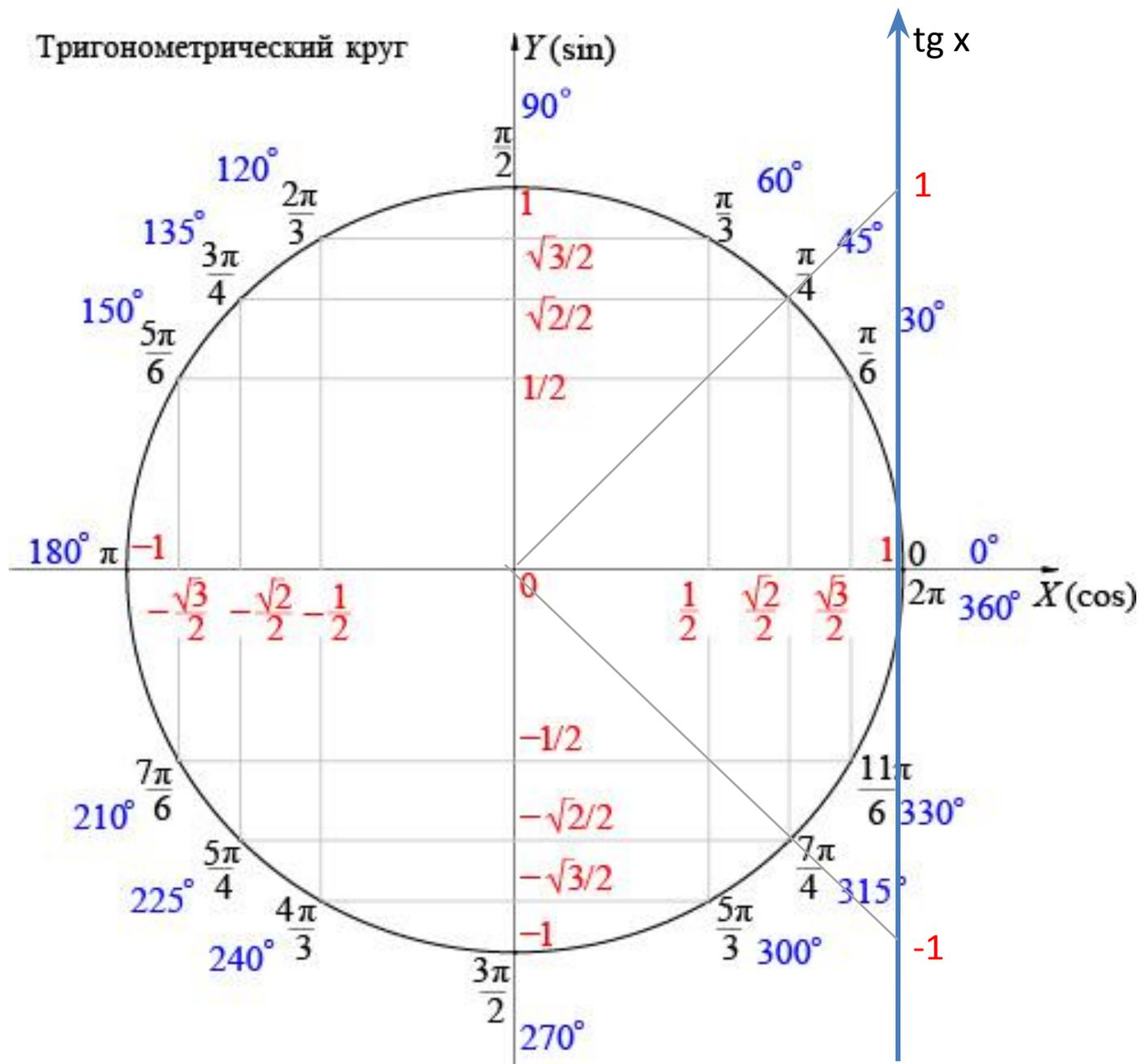
$$x = \pm \frac{1}{3} + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1: \cos\pi x = -\frac{7}{10}$$

$$x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos\frac{1}{10} + 2n, \quad x = \pm \frac{1}{3} + 2n, \quad x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

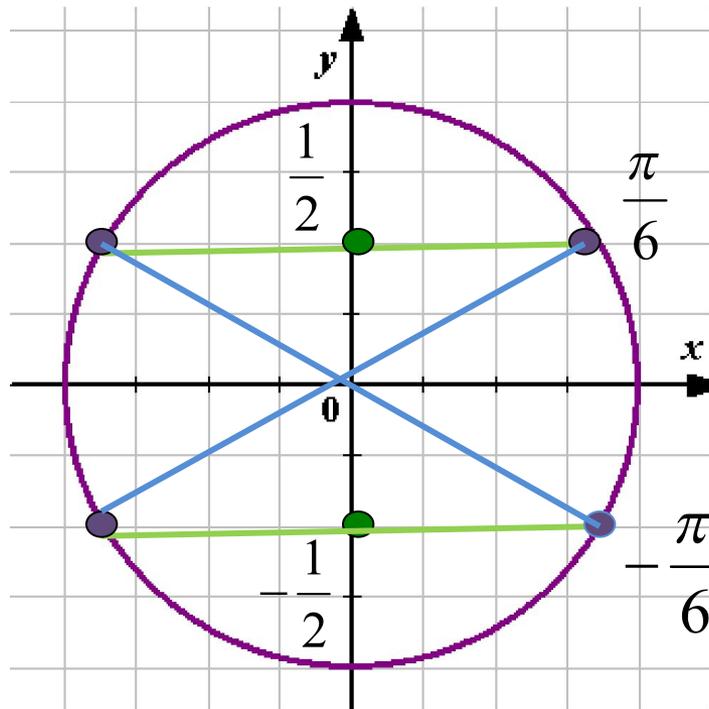
Тригонометрический круг



2

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Алгебраические преобразования

- Применение основного тригонометрического тождества

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- Применение формул удвоенного аргумента

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- Преобразование суммы (разности) в произведение и обратное преобразование

- Понижение степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- Применение формул приведения
и др.

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции изменяется: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции сохраняется;

б) если α – острый угол (т.е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставится тот знак, какой имеет приводимая функция.

$$\frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \sin x$$

$$\frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \cos x$$

$$\frac{2tg \frac{x}{2}}{1 - tg^2 \frac{x}{2}} = tg x$$

1. Замена переменной и сведение к квадратному

3

- Понижение степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- Применение формул приведения

и др.

3. Однородные уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением **первой степени**;
уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением **второй степени**.

Уравнения вида $a \sin mx + b \cos mx = 0$ также называются однородными тригонометрическими уравнениями первой степени.

Для однородных уравнений существует стандартный приём решения – деление обеих его частей на $\cos x \neq 0$ или $\cos^2 x \neq 0$.

Обоснованность деления:

Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда в силу уравнения и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение этого уравнения удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$ и мы можем поделить обе его

- Понижение степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- Применение формул приведения

и др.

$$10\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$$

Решение:

$$\text{Поскольку } 3 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$10\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$7\sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 / : \cos^2 x \neq 0$$

т.к. значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения.

$$7\text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x - 2 = 0$$

$$\text{tg} x = t$$

$$7t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2/7, \text{tg} x = 2/7, x = \text{arctg} 2/7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -1, \text{tg} x = -1, x = \text{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \text{arctg} 2/7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$