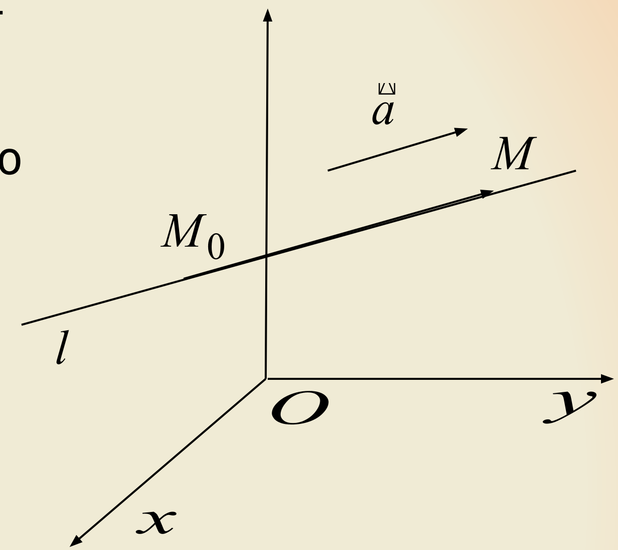
Прямая в пространстве

Взаимное положение прямой и плоскости
Уравнение прямой на плоскости

Прямая в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении

Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит прямой l, а направление совпадает с вектором $\vec{a}(m; n; p)$. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z) \in l$. Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ и по свойствам векторов $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$, где t – параметр. Равенство $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$ – векторное уравнение прямой.



Представим его в координатной форме:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \\ z - z_0 = t \cdot p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \\ z = z_0 + t \cdot p \end{cases}$$

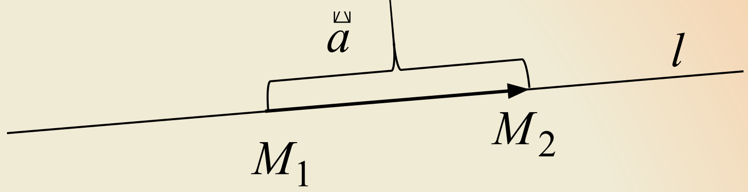
– параметрическое уравнение прямой.

Выразим t. Тогда $t = \dfrac{x - x_0}{m}$; $t = \dfrac{y - y_0}{n}$; $t = \dfrac{z - z_0}{p}$, приравняем эти выражения, получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

<u>Уравнение прямой , проходящей через две точки</u>

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, которые принадлежат прямой l. Примем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ за $\vec{a}$, направляющий вектор, а точку M_1 за точку M_0 и подставим их в каноническое уравнение прямой. Тогда



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{3}.$

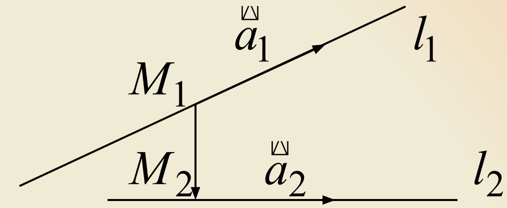
Прямая, проходящая через точку $(1; 2; 0)$ с направляющим вектором $\vec{a}=(2; 0; 3)$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2, заданные точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ с направляющими векторами $\vec{a}_1=(m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{a}_2=(m_2; n_2; p_2)$. Тогда уравнения этих прямых соответственно

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Данные прямые могут быть скрещивающими или лежать на одной плоскости. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.



Составим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=\Delta$$

Тогда, если прямые скрещивающиеся, данные три вектора не могут лежать в одной плоскости, то есть через них нельзя провести плоскость и $\Delta\neq 0$. Если же прямые лежат в одной плоскости, то есть данные векторы компланарны, то $\Delta=0$. Во втором случае может быть три случая:

1. Прямые будут параллельны, тогда их направляющие векторы коллинеарны. $l_1 \,||\, l_2$, по свойствам векторов:

$$\vec{a}_1 \,||\, \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

2. Прямые перпендикулярны, тогда их направляющие векторы перпендикулярны, то по свойствам векторов скалярное произведение равно нулю.

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

3. Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а именно

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

4. Прямые будут совпадать, если все три вектор будут коллинеарными, другими словами все три строки определителя Δ будут пропорциональны.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость α задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, прямая l параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \\ z = z_0 + t \cdot p \end{cases}.$$

Подставим x, y и z из уравнения прямой в уравнение плоскости.

Тогда
$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$
$$t(Am + Bn + Cp) = -(D + Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

1)Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то
$$t = \frac{-(D + Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{Am + Bn + Cp}$$

Подставим полученное значение параметра t в уравнение прямой, получим выраженные единственным образом значения x, y и z, которые определяют координаты единственной точки, являющейся точкой пересечения прямой и плоскости. Таким образом, $Am + Bn + Cp \neq 0$ – условие пересечения прямой и плоскости.

2)Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $D + Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$, то получаем уравнение $t \cdot 0 = 0$, t – любое число, другими словами имеем бесконечное число решений, то есть бесконечное число точек пересечения прямой плоскости, получается ,что прямая лежит на плоскости.

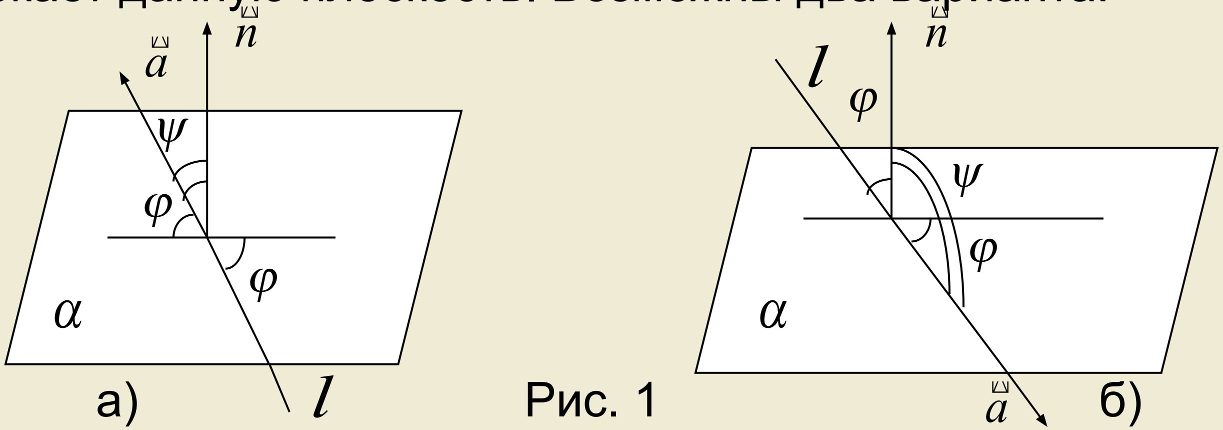
2)Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $D + Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0$, то $t \cdot 0 \neq 0$, получаем противоречие, следовательно, нет решений и нет общих точек, то есть прямая и плоскость параллельны.

Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость α задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ а прямая l каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

и пересекает данную плоскость. Возможны два варианта:



а) Рис. 1 б)

φ – угол между прямой и плоскостью, ψ – угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Видно, что в случае а) $\varphi = 90^0 - \psi \Rightarrow \cos\varphi = \cos(90^0 - \psi) = \sin\psi$ (острый угол), а в случае б) $\varphi = \psi - 90^0 \Rightarrow \cos\varphi = \cos(\psi - 90^0) = -\sin\psi$(тупой угол). Объединив, эти формулы получим: $\sin\varphi = |\cos\psi|$.

Прямая на плоскости

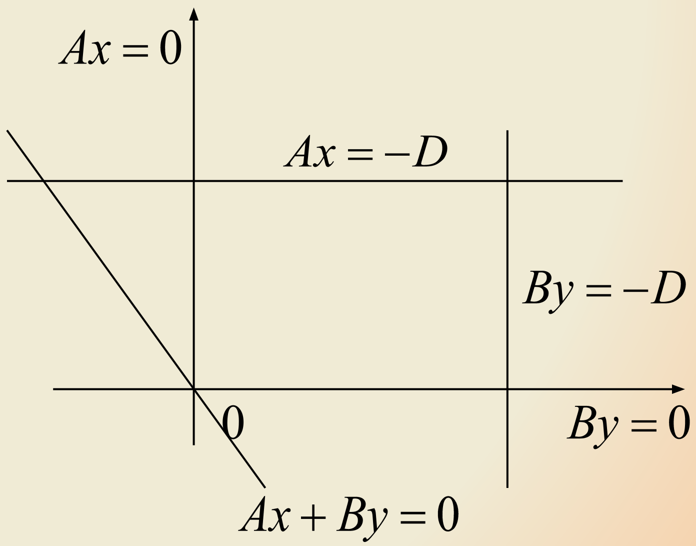
Общее уравнение прямой

Так как мы будем рассматривать прямую на плоскости, то ее можно представить как пересечение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ с координатной плоскостью Oxy с уравнением *z*=0, то общее уравнение прямой примет вид: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

Тогда $Ax + By + D = 0$ – *общее уравнение* прямой на плоскости.

Частные случаи общего уравнения прямой

1. $D = 0 \Rightarrow \quad Ax + By = 0$, то есть прямая проходит через начало координат.
2. $B = 0 \Rightarrow \quad Ax = -D$, то есть прямая параллельна оси Oy.
3. $A = 0 \Rightarrow \quad By = -D$, то есть прямая параллельна оси Ox.
4. $B = D = 0 \Rightarrow \quad Ax = 0$, то есть прямая совпадает с осью Oy.
4. $A = D = 0 \Rightarrow \quad By = 0$, то есть прямая совпадает с осью Ox.



Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ – точки через которые проходит заданная прямая. Вспомним соответствующее уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

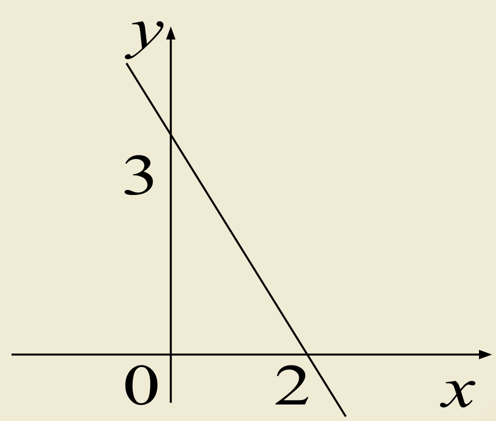
Тогда отбрасывая координаты *z*, получим $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $\vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ – направляющий вектор.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая l проходит через точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Представим, что $x_1 = a,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = b$ и подставим в уравнение прямой, проходящей через две точки. Тогда

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Пример: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.



Уравнение прямой, проходящей через точку в заданном направлении

Пусть направляющий вектор задан, как $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$.

Из уравнения прямой, проходящей через две точки получим

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta},$$

$$y - y_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - x_1) = \frac{\cos(90^0 - \alpha)}{\cos\alpha}(x - x_1) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_1) = tg\alpha(x - x_1).$$

Таким образом, получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ в данном направлении: $y - y_1 = k(x - x_1)$, где $k = tg\alpha$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая проходит через точку $B(0; b)$, то есть $x_1 = 0,\ y_1 = b$. Тогда, подставив в предыдущее уравнение данные значения, получим $y = kx + b$, где b – начальная ордината.

Экономический смысл начальной ординаты: уравнение вида $K = kT + b$ описывает процесс накопления капитала, где T – время. Тогда при $T = 0$, получаем что $K = b$ – начальный капитал.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ заданные общими уравнениями.

1. По аналогии с плоскостью, прямые параллельны, если их нормальные векторы параллельны. Тогда условие параллельности прямых можно записать как

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{или} \quad k_1 = k_2 \text{, так как } k_1 = \frac{A_1}{B_1};\ k_2 = \frac{A_2}{B_2}.$$

2. Прямые перпендикулярны, если их нормальные векторы перпендикулярны. Условие перпендикулярности можно записать как

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

или

$$k_1k_2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{-1}{k_2}.$$

3. Угол между прямыми равен углу между нормальными векторами, а следовательно

$$\cos\left(l_1 \hat{,} l_2\right) = \cos\left(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2\right) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

4. Прямые будут совпадать, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$