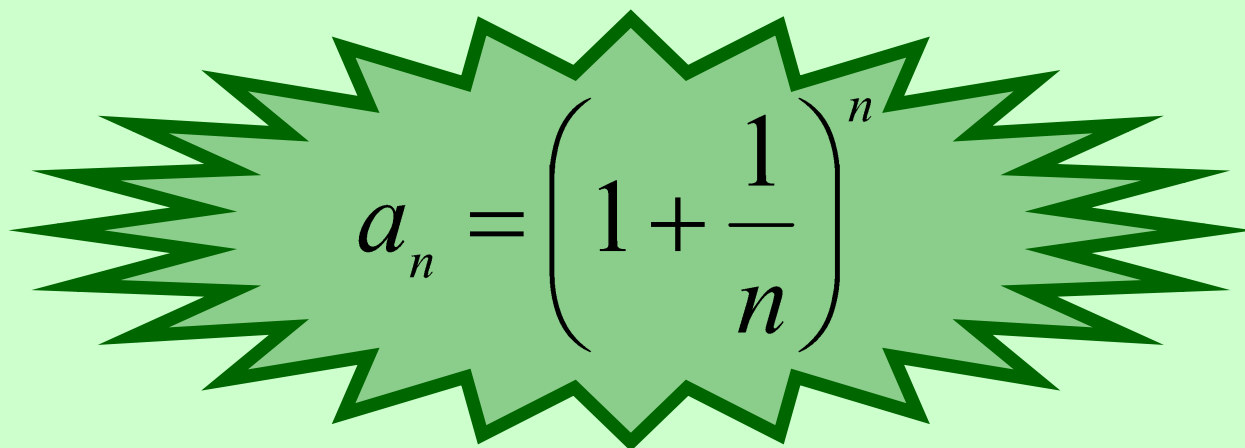


6.9. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Рассмотрим числовую последовательность


$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

где $a_1=2$, $a_2=2.25$, $a_3=2.37 \dots$

Можно предположить, что эта последовательность будет возрастающей.

Воспользуемся формулой

бинома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$$

где m – любое действительное число.

В нашем случае:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Видно, что с ростом n увеличивается число положительных слагаемых, которых всего будет $n+1$, и растет величина каждого слагаемого, т.е.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$$

Это значит, что данная последовательность возрастает.

Теперь покажем, что она является ограниченной.

Поскольку каждая скобка меньше единицы, отбрасываем эти скобки и получаем неравенство:

$$a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

Теперь каждую дробь в правой части
заменяем большей дробью с двойкой в
знаменателе:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} \quad \dots \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Получаем:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

есть сумма $n-1$ членов геометрической прогрессии, где первый член

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

и знаменатель $q = \frac{1}{2}$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Т.к. $S_{n-1} < 1$, то

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 2 + 1 = 3$$

Действительно, данная последовательность является ограниченной.

Согласно признаку существования предела,
монотонная и ограниченная
последовательность имеет предел.

*Числом e или вторым замечательным
пределом называется предел
числовой последовательности*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

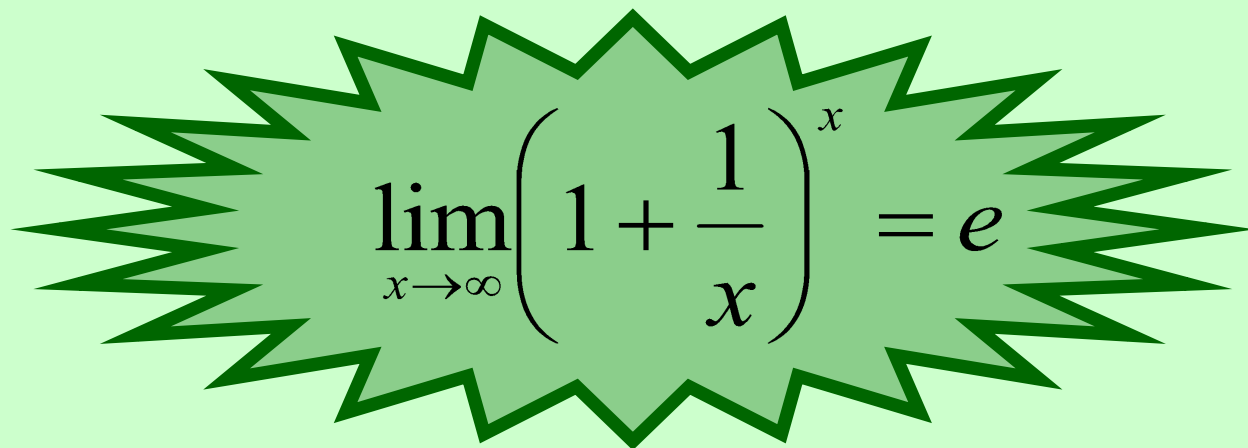
*e – число Эйлера
 $e=2,718281\dots$*

Можно показать, что функция

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

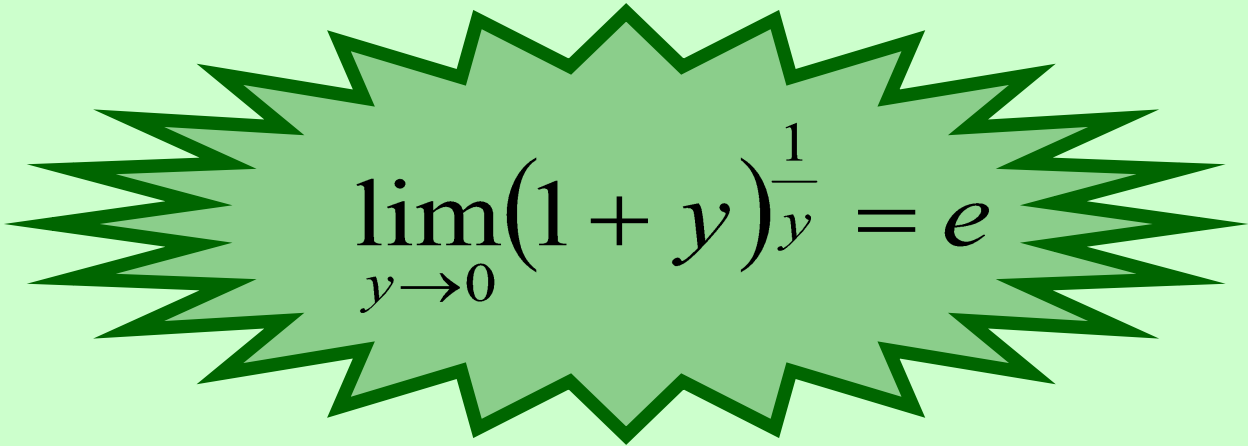
при $x \rightarrow \pm\infty$

**где x пробегает все значения, а не только
целые, тоже имеет предел, равный e :**


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

*Второй замечательный
предел*

Пусть $y = \frac{1}{x}$, тогда


$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

*Второй замечательный
предел*

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5}{x} \cdot 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_e$



Вычислить

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}}$$

Решение:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{\frac{2}{y} \cdot (-3y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{-6} = e^{-6}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_e$

3

*В качестве еще одного примера
рассмотрим задачу о непрерывном
начислении процентов.*

Первоначальный вклад в банк составляет Q_0
денежных единиц. Банк выплачивает
ежегодно P % годовых.

Найти размер вклада через t лет.

При использовании простых процентов
размер вклада ежегодно будет
увеличиваться на одну и ту же величину

$$\frac{P}{100} \cdot Q_0$$

То есть

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100} \right)$$
$$Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{2P}{100} \right) \quad \dots$$
$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{t \cdot P}{100} \right)$$

На практике часто применяются сложные проценты. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число

$$\left(1 + \frac{P}{100} \right)$$

раз, т.е.

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100} \right)$$
$$Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100} \right)^2 \quad \dots$$
$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100} \right)^t$$

Если начислять проценты не один, а n раз в году, то при ежегодном приросте P %, процент начисления за $1/n$ часть года составляет P/n %.

Тогда размер вклада за t лет при nt начислениях составит

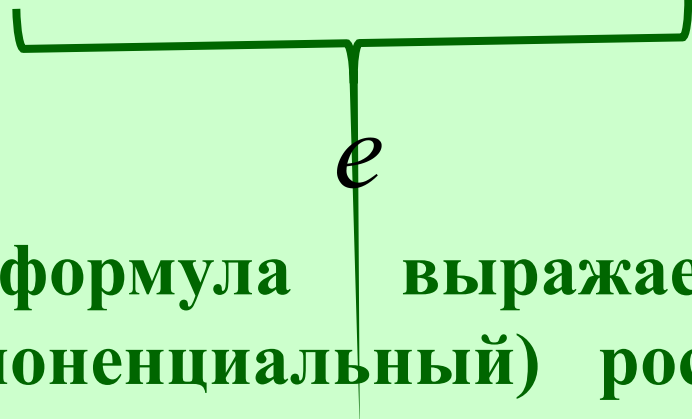
$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt}$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ($n=2$), ежеквартально ($n=4$), ежемесячно ($n=12$), каждый день ($n=365$), каждый час ($n=8760$) и далее непрерывно $x \rightarrow \infty$

Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} = Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} =$$

$$= Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{\frac{100n}{P}} \right]^{\frac{P}{100n} \cdot nt} = Q_0 \cdot e^{\frac{Pt}{100}} = Q_t$$



 e

Эта формула выражает показательный (экспоненциальный) рост (при $P > 0$) или убывание (при $P < 0$). Погрешность вычисленной суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов оказывается незначительной (около 2.5 %).