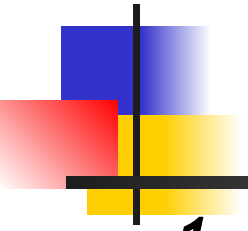
Лекция 1

Линейная парная регрессия



1. *Эконометрика как научная дисциплина.*
2. *Спецификация уравнения парной регрессии.*
3. *Параметризация уравнения парной регрессии.*
4. *Экономическая интерпретация параметров модели.*

1. Эконометрика как научная дисциплина.

Эконометрика – это дисциплина, изучающая методы построению на основе статистических данных аналитических математических моделей экономических процессов с целью их анализа и прогнозирования.

Основными целями эконометрики являются:

- объяснение поведения экономических и социальных показателей;
- прогнозирование показателей;
- управление показателями.

Основными задачами эконометрики считаются:

- выбор типа эконометрических моделей (регрессионные модели с одним уравнением, системы взаимозависимых уравнений, модели временных рядов);
- оценка параметров выбранных моделей;
- проверка качества модели и ее полученных параметров;
- практическое использование построенных адекватных моделей для анализа, прогноза и осмысленного управления экономической политикой.

Для решения поставленных задач широко используется инструментарий, основу которого составляют основные положения теории вероятностей и математической статистики.

2. Спецификация уравнения парной регрессии.

Изучение зависимостей экономических переменных начнём со случая двух переменных. Обозначим их символами x и y.

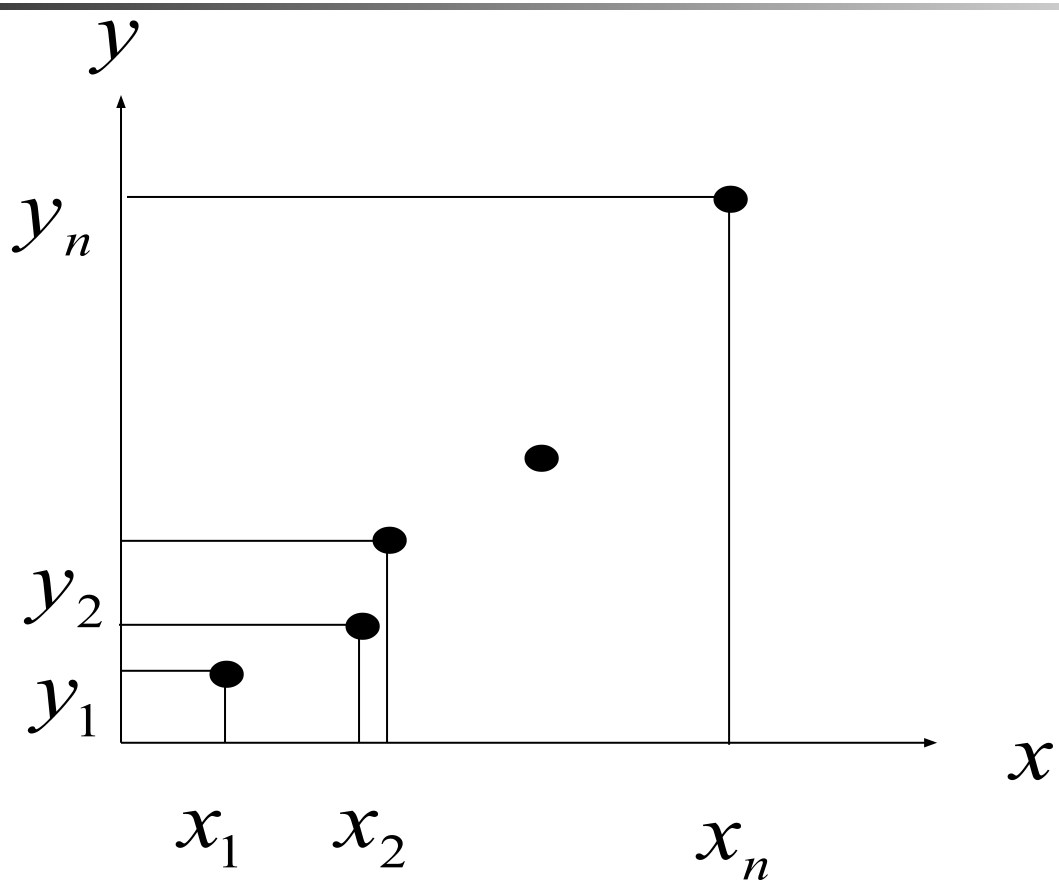
Первую из них ( ) будем называть привычным термином *независимая переменная*, или, как принято в эконометрике, - *объясняющая* переменная или *фактор*. Вторую (y) –*зависимой* или *объясняемой* переменной.

Предположим, что имеются статистические данные в виде рядов значений указанных переменных, которые сведены в следующую таблицу (двумерная выборка объема n, n>7)

y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n
x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n

Если нанести соответствующие точки (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ на координатную плоскость, то получим график, который называют *полем корреляции* или *диаграммой рассеивания*.

Рис. 1. Поле корреляции



Построенные точки на практике никогда не будут располагаться на некоторой *гладкой* линии типа прямой, параболы, экспоненты и т.д.

Происходит это потому, что на зависимую переменную помимо фактора влияют другие, либо неучтенные, либо случайные факторы.

Связь переменных, на которую накладывается воздействие случайных факторов, называется *статистической* связью.

Формула статистической связи между переменными

$$y = f(x, \varepsilon) \ ,$$

где ε — случайный фактор, называется *уравнением регрессии*.

Для двух переменных она называется уравнением *парной* регрессии.

Выбор конкретной формулы связи для двух переменных называется *спецификацией* уравнения регрессии.

Класс математических функций для описания связи двух переменных очень широк:

линейная функция

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad ;$$

парабола второго порядка

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon \quad ;$$

степенная функция

$$y = \beta_0 x^{\beta_1} + \varepsilon$$

и т. д.

Построенное поле корреляции иногда помогает выполнить спецификацию уравнения регрессии (рис.2, рис. 3).

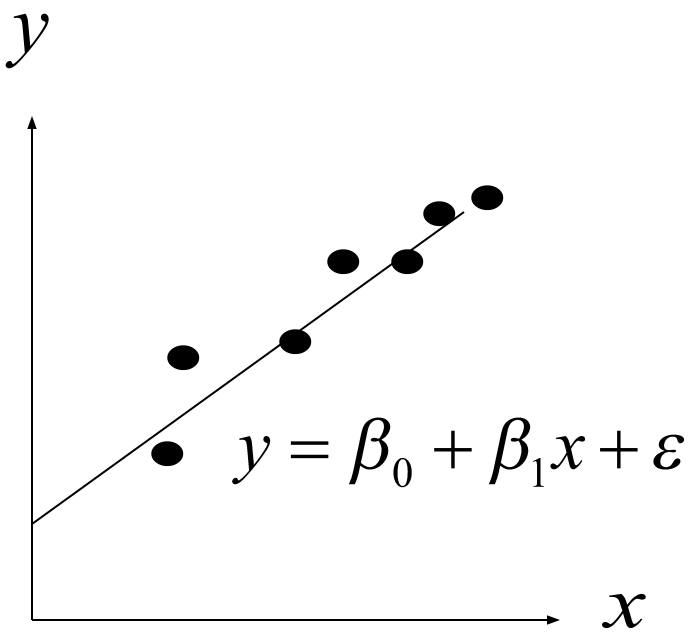


Рис. 2

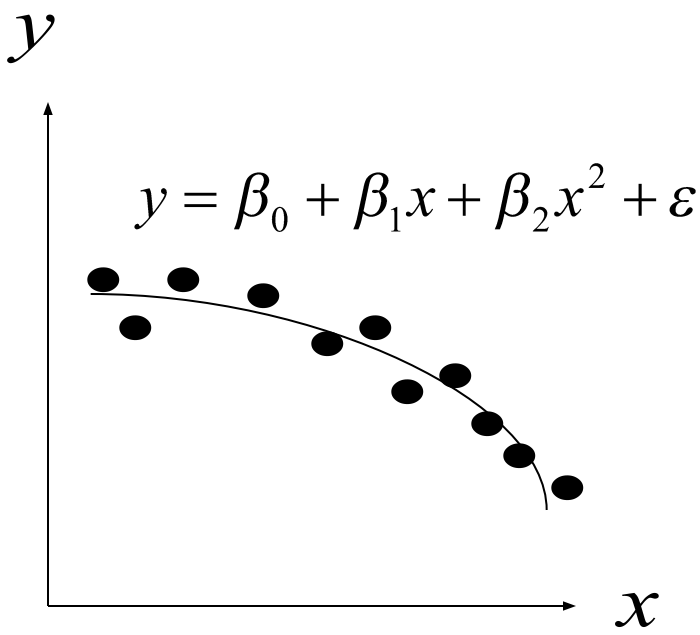


Рис. 3

В других случаях поле корреляции не позволяет сказать что-то определенное о виде зависимости между x и y (рис. 4).

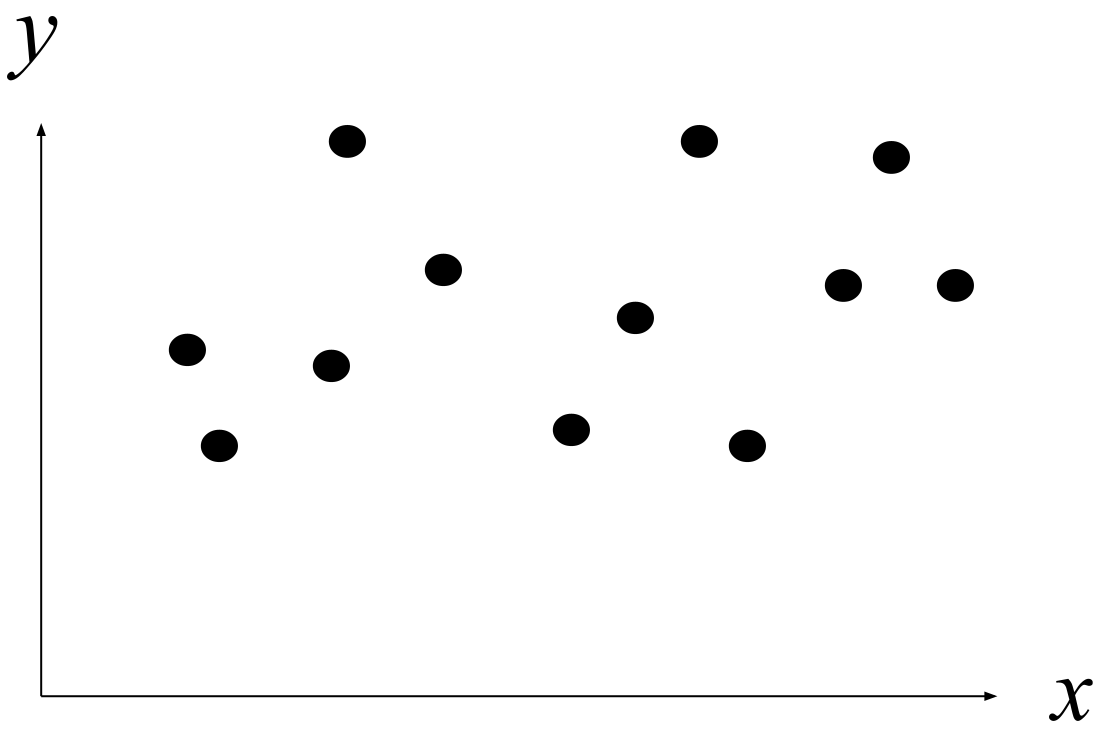


Рис. 4

В последнем случае начинают с выбора наиболее простой связи – *линейной* :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Если в последующем она не устраивает по точности, то ищут какую-либо нелинейную связь между переменными x и y .

3. Параметризация уравнения парной регрессии.

После выбора формы связи между переменными выполняется оценка значений коэффициентов выбранной модели с использованием имеющихся статистических данных.

Этот процесс называется *параметризацией* уравнения регрессии.

Пусть поле корреляции имеет вид как на рис. 2.

Иначе между переменными x и y в природе существует некоторая линейная зависимость и статистические данные должны удовлетворять уравнению:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n} \ . \qquad (1)$$

Здесь $\beta_0, \beta_1 -$ коэффициенты, которые подлежат определению, $\varepsilon_i -$ случайная составляющая в i –м наблюдении, которую называют *возмущением.*

Уравнение (1) называют *модельным* уравнением регрессии.

Возникает задача:

по выборке x_i, y_i , $i = \overline{1,n}$ оценить уравнение (1) и такой оценкой является *выборочное* уравнение регрессии:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 x \qquad (2)$$

Построение уравнения (2) сводится к получению точечных оценок b_0, b_1 неизвестных коэффициентов β_0, β_1 модельного уравнения (1). Классический подход к оцениванию неизвестных коэффициентов основан на методе наименьших квадратов (МНК).

Чтобы при этом точечные оценки b_0, b_1 были "хорошими" (несмещенными, эффективными и состоятельными) требуется сделать следующие предположения относительно уравнения (1).

1°. Возмущения ε_i являются случайными величинами, а переменные x_i таковыми не являются.

2°. Математическое ожидание случайных величин ε_i во всех наблюдениях равно нулю, т. е.

$$M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

3°. Дисперсия случайных величин ε_i постоянна для любого наблюдения:

$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2 = const < \infty \quad .$$

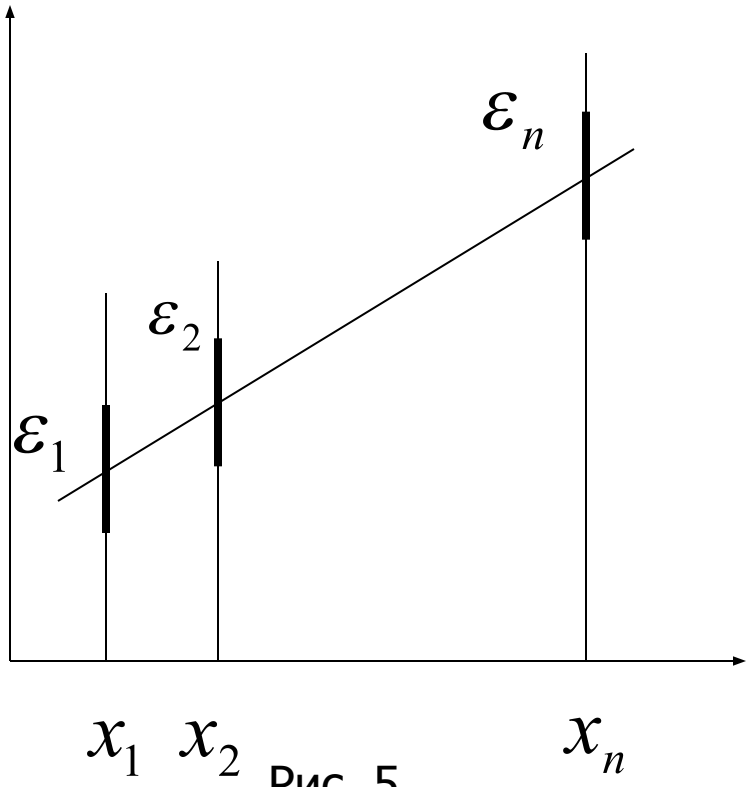


Рис. 5

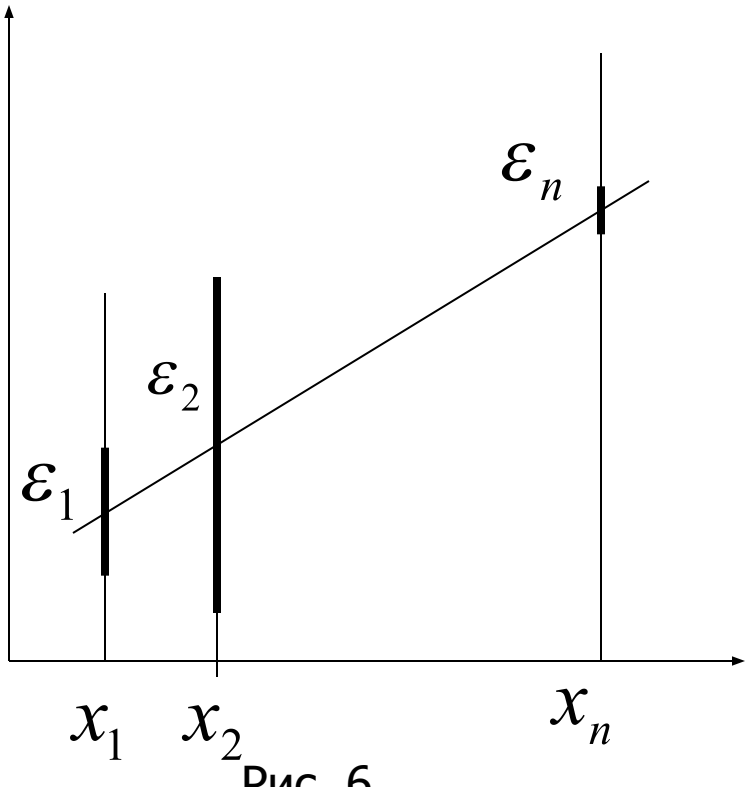


Рис. 6

Это свойство называют *гомоскедастичностью* возмущений (одинаковый разброс, рис.5).

Если оно не выполняется, то говорят о *гетероскедастичности* (различный разброс, рис. 6).

4°. Возмущения ε_i и ε_j в различных наблюдениях являются некоррелированными величинами

$$M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0.$$

5°. Случайные величины ε_i имеют нормальный закон распределения

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad .$$

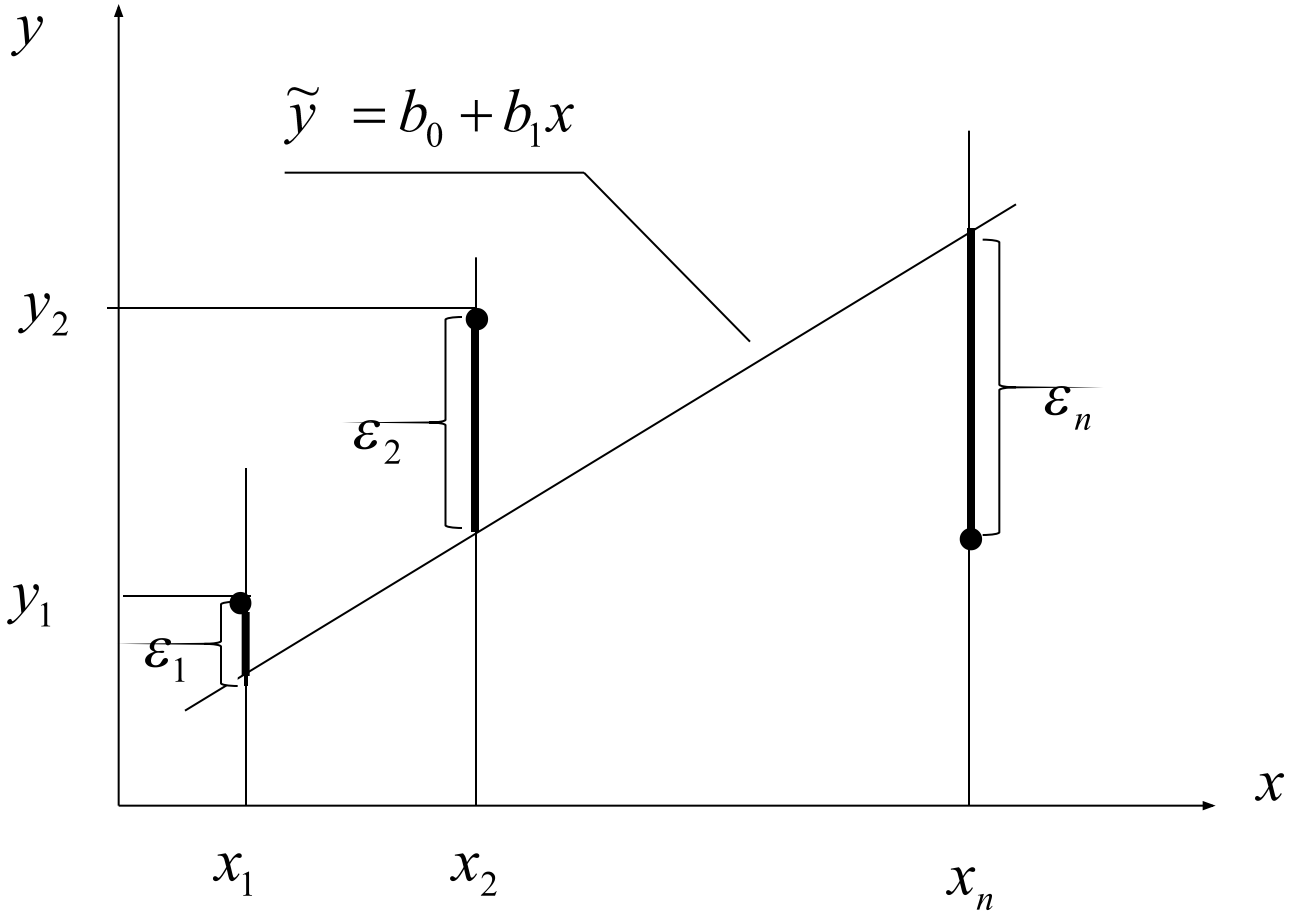
При выполнении указанных требований, которые называют *предпосылками МНК*, модель (1) называют *нормальной классической линейной регрессионной моделью.*

Согласно МНК параметры b_0, b_1 определяются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений выборочных значений y_i от значений $\tilde{y}_i$, полученных по уравнению регрессии

$$\tilde{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

по всем $i = \overline{1, n}$ наблюдениям была минимальной.

Рис. 7


y
$\tilde{y} = b_0 + b_1 x$
y_2
y_1
ε_1
ε_2
ε_n
x
x_1
x_2
x_n

Если ввести в рассмотрение величины $e_i = y_i - \tilde{y}_i$, называемые *остатками*, то параметры b_0, b_1 находят из условия минимума функции двух переменных

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \ . \qquad (3)$$

Применяя необходимые условия экстремума функции двух переменных

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0 \ , \qquad \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0 \ ,$$

после несложных преобразований можно получить так называемую *систему нормальных уравнений*

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (4)$$

для определения двух неизвестных b_0 и b_1 .

Разделив обе части уравнений на n, получим систему в виде

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y}, \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$,

$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Решая последнюю систему, получим

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \qquad (5)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Оценки (5) называют *МНК-оценками*.

Теорема Гаусса-Маркова.

Если регрессионная модель (1) удовлетворяет предпосылкам 1-4, то оценки (5) имеют наименьшую дисперсию в классе всех несмещенных оценок.

Другими словами они являются *эффективными* и *несмещенными*.

4. Экономическая интерпретация параметров модели.

Параметр b_1 в уравнении регрессии (2) называют *выборочным коэффициентом регрессии* y по x. Он показывает, на сколько единиц в среднем изменится переменная y при увеличении переменной x на одну единицу своего измерения. В этом экономический смысл параметра b_1 .

Параметр b_0 в общем случае не имеет экономического смысла. Формально - это значение переменной y при x =0, если такое возможно.

Из экономического смысла b_1 следует, что он является измерителем *тесноты связи* переменных y и x. Однако его значение существенно зависит от единиц измерения данных переменных.
Например, если y измеряется не в тоннах, а в кг, то x уменьшается в 1000 раз.

Характеристикой тесноты связи, не зависящей от единиц измерения, является величина

$$r_{xy} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \qquad (6)$$

где выборочные средние квадратические отклонения переменных y и x соответственно.

Величину r_{xy} называют *выборочным коэффициентом парной корреляции* и он показывает, на сколько средних квадратических отклонений σ_y изменяется в среднем переменная y, когда x увеличится на одно σ_x.

Коэффициент r_{xy} обладает следующими свойствами.

1. Значения принадлежат отрезку: $[-1,1]$. Чем ближе $|r_{xy}|$ к 1, тем теснее связь переменных y и x.

Если $r_{xy} > 0$, то эта связь *прямая*, в противном случае, когда $r_{xy} < 0$ - *обратная*.

2. При $r_{xy} = \pm 1$ связь представляет линейную функциональную зависимость между переменными y и x (рис. 8).

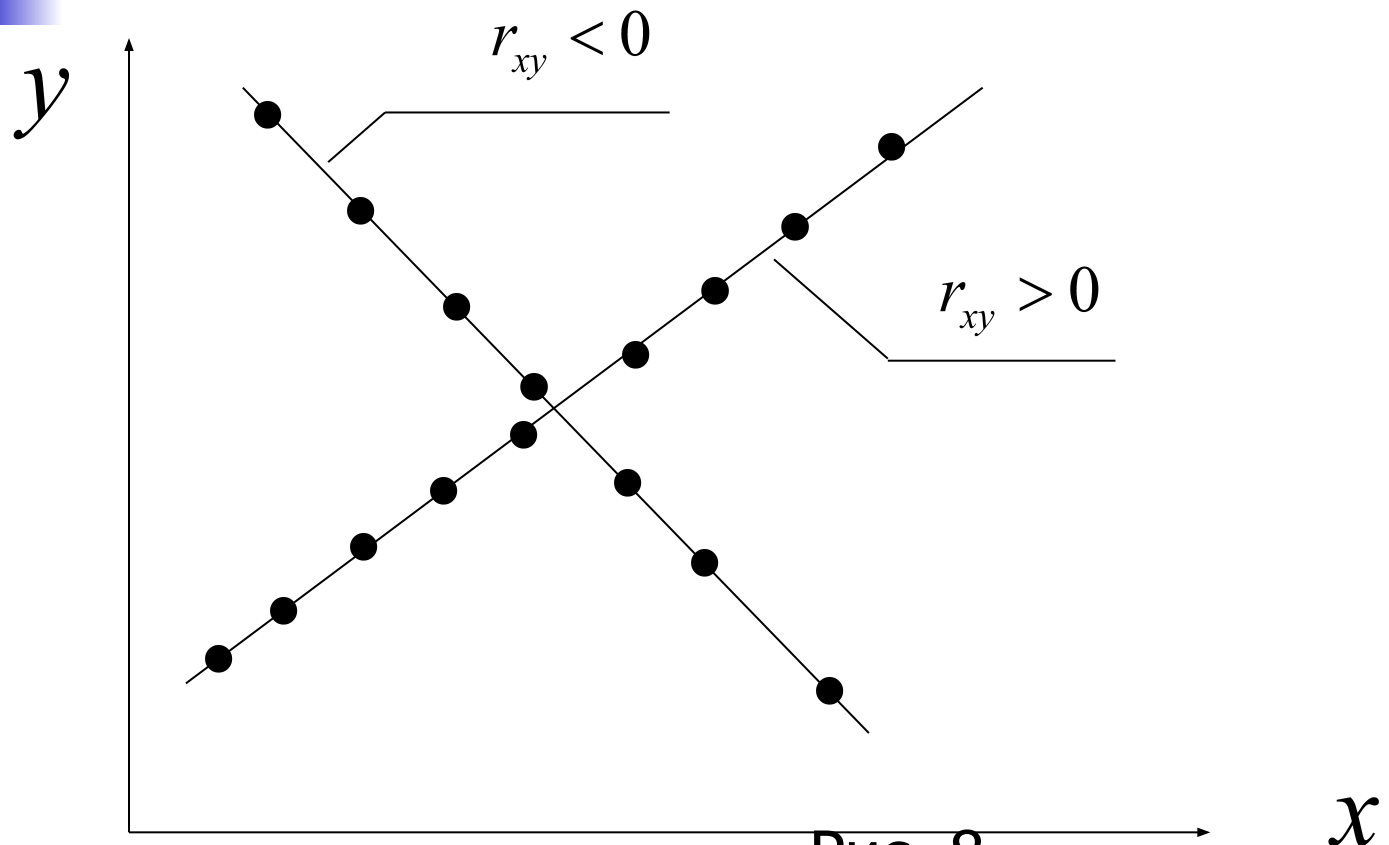


Рис. 8

3. Если $r_{xy} = 0$, то корреляционная связь между переменными y и x отсутствует и $\tilde{y} = \bar{y}$ (рис. 9).

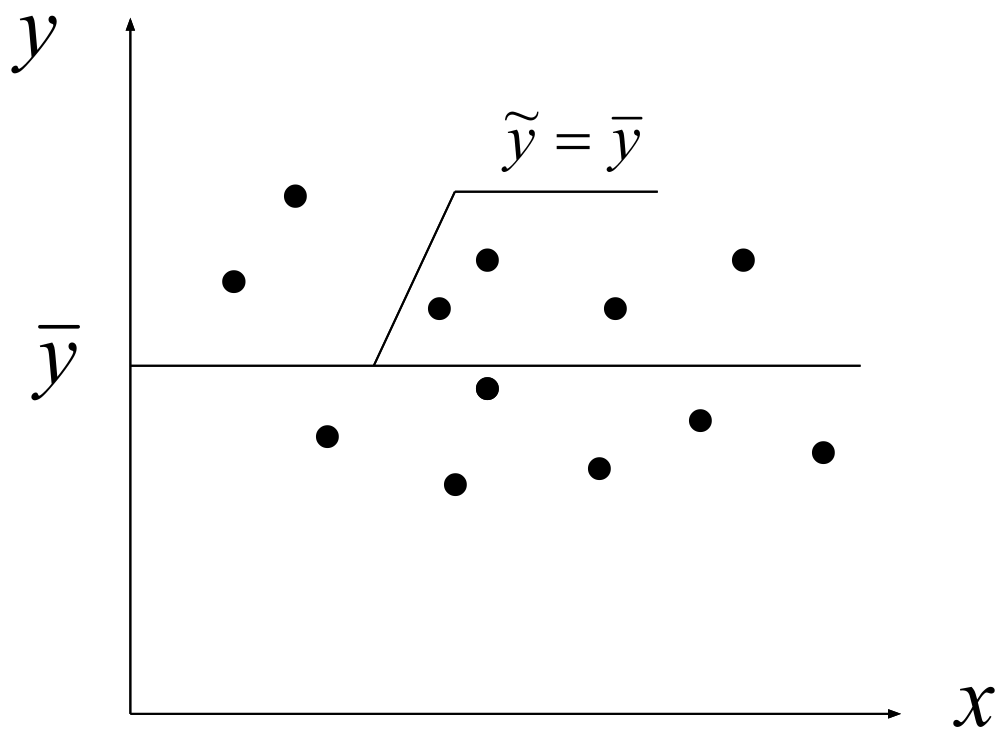


Рис. 9

При других значениях $|r_{xy}|$ характеристику тесноты связи даёт *шкала Чеддока*:

$\|r_{xy}\|$	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99
Характеристика связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	весьма высокая

Другим важным показателем силы связи фактора с результатом является *коэффициент эластичности*.

Различают *средние* и *точечные* коэффициенты эластичности.

Пусть уравнение регрессии имеет вид $\tilde{y} = f(x)$.

Тогда средний коэффициент эластичности находится из выражения

$$\overline{Э} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\bar{x}}{f(\bar{x})}. \qquad (7)$$

В частности, для линейной зависимости верна формула

$$\overline{Э} = b_1 \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \qquad (8)$$

Коэффициент $\overline{Э}$ является *безразмерным*, и он показывает, на сколько процентов изменится переменная y относительно своего среднего уровня при росте фактора x на 1% от среднего значения.

Точечный коэффициент эластичности рассчитывается для конкретного значения переменной $x = x_0$ по формуле

$$Э_0 = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \quad ,$$

в частности, для линейной модели $\tilde{y} = b_0 + b_1 x$ она запишется

$$Э_0 = b_1 \cdot \frac{x_0}{b_0 + b_1 x_0} \quad .$$