

# Логические основы компьютеров

- § 18. Логика и компьютер
- § 19. Логические операции
- § 20. Диаграммы
- § 21. Упрощение логических выражений
- § 22. Синтез логических выражений
- § 23. Предикаты и кванторы
- § 24. Логические элементы компьютера
- § 25. Логические задачи  
Задачи ЕГЭ

# Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

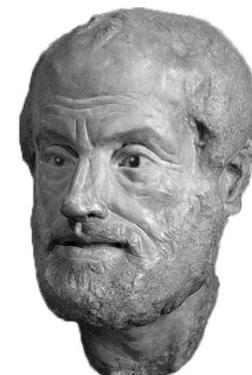
## § 18. Логика и компьютер

# Логика, высказывания

---

**Логика** (др.греч. *λογικος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

**Формальная логика** отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель  
(384-322 до н.э.)

**Логическое высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

## Высказывание или нет?

---

✓ Сейчас идет дождь.

✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

# Логика и компьютер

---

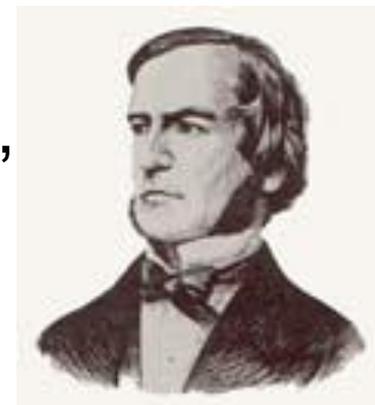
**Двоичное кодирование** – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

**Задача** – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

## Почему «логика»?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

**Джордж Буль** разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



# Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

## § 19. Логические операции

# Обозначение высказываний

**A** – Сейчас идет дождь. }  
**B** – Форточка открыта. }

простые высказывания  
(элементарные)



**Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

**Составные высказывания** строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если ... то**», «**тогда и только тогда**» и др.

**A и B** Сейчас идет дождь и открыта форточка.

**A или не B** Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

**если A, то B** Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

**A тогда и только тогда, когда B** Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

## Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

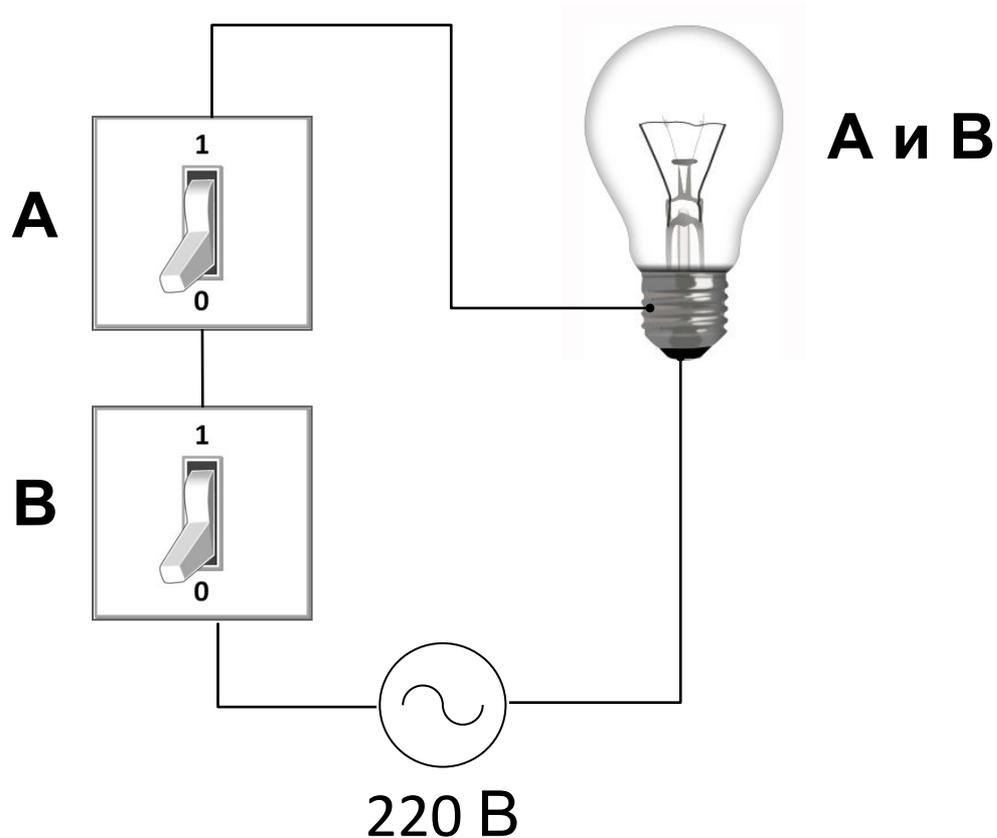
также  $\bar{A}$ ,  $\neg A$ ,  
**not A** (Паскаль),  
**! A** (Си)

таблица  
истинности  
операции НЕ

**Таблица истинности логического выражения X** – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

# Операция И

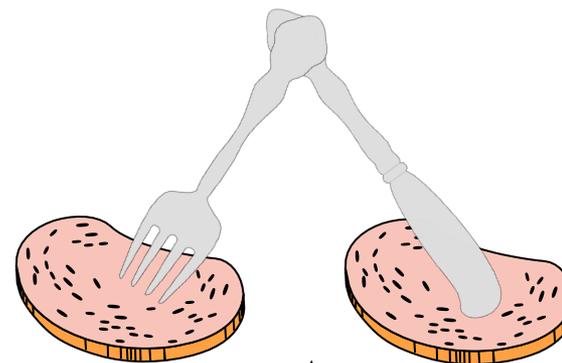
Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



# Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также:  $A \cdot B$ ,  $A \wedge B$ ,  
 A and B (Паскаль),  
 A && B (Си)

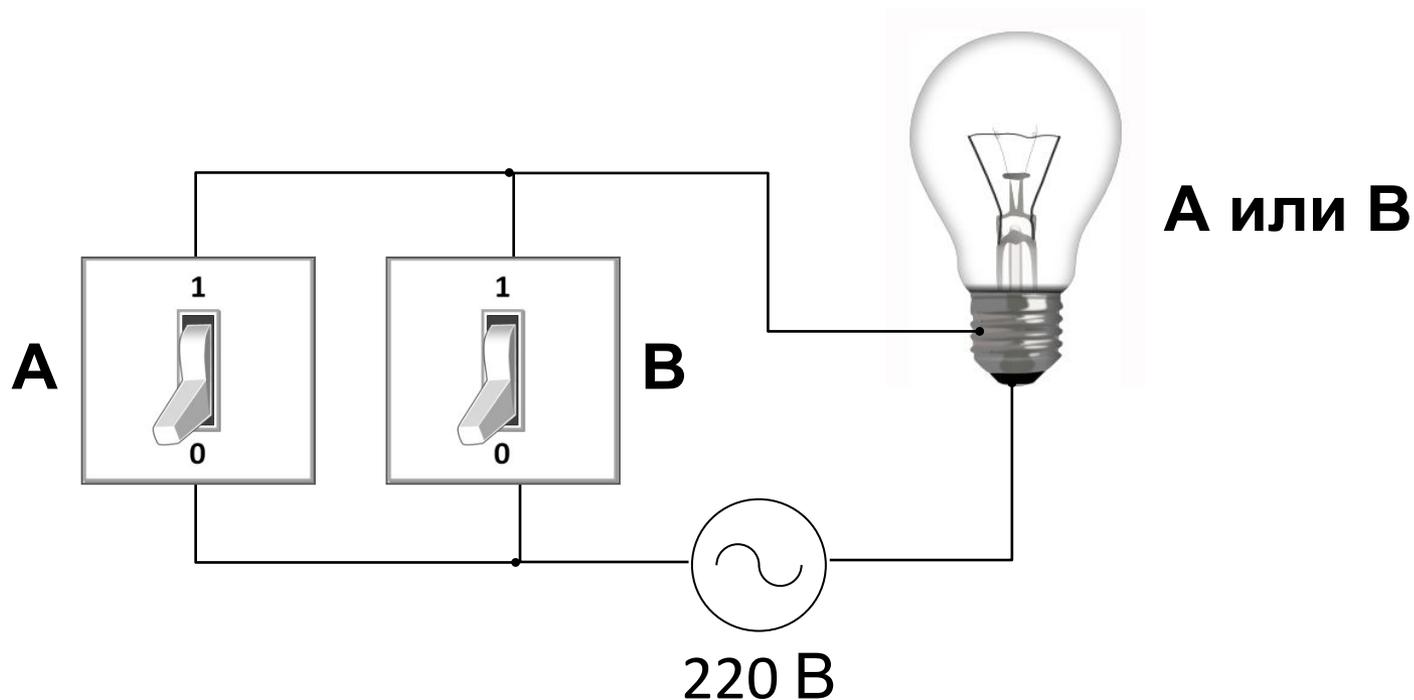


A  $\wedge$   
 B

**КОНЪЮНКЦИЯ** – от лат. *conjunctio* — соединение

# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A** или **B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также:  $A+B$ ,  $A \vee B$ ,  
 $A \text{ or } B$  (Паскаль),  
 $A \parallel B$  (Си)

**ДИЗЪЮНКЦИЯ** – от лат. *disjunctio* — разъединение

# Задачи

---

*В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

- 1) **принтеры & сканеры & продажа**
- 2) **принтеры & продажа**
- 3) **принтеры | продажа**
- 4) **принтеры | сканеры | продажа**

**1 2 3 4**

## Импликация («если ..., то ...»)

Высказывание « $A \rightarrow B$ » истинно, если не исключено, что из  $A$  следует  $B$ .

$A$  – «Работник хорошо работает».

$B$  – «У работника хорошая зарплата».

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

## Импликация («если ..., то ...»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

**A** – «Вася идет гулять».

**B** – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

## Эквивалентность («тогда и только тогда, ...»)

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

# Базовый набор операций

---

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

# Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	$\bar{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

# Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

## Задачи (таблица истинности)

Символом  $F$  обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Дан фрагмент таблицы истинности выражения  $F$ . Какое выражение соответствует  $F$ ?

$X$	$Y$	$Z$	$F$
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

1)  $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

2)  $X \wedge Y \wedge Z$

3)  $X \vee Y \vee Z$

4)  $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

1)  $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

2)  $X \cdot Y \cdot Z$

3)  $X + Y + Z$

4)  $\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$

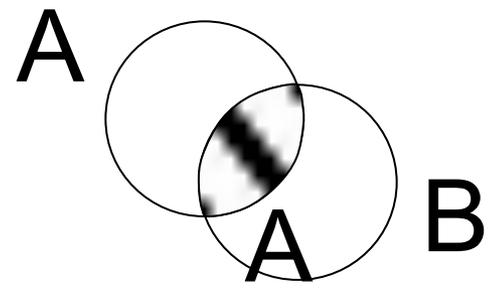
# Логические основы компьютеров

## § 20. Диаграммы

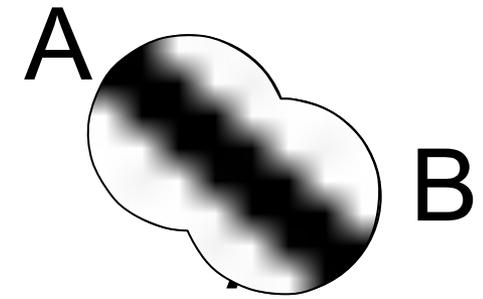
# Диаграммы Венна (круги Эйлера)



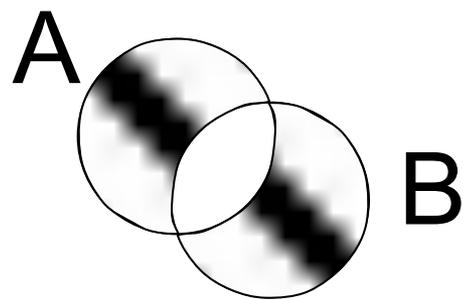
$\bar{A}$



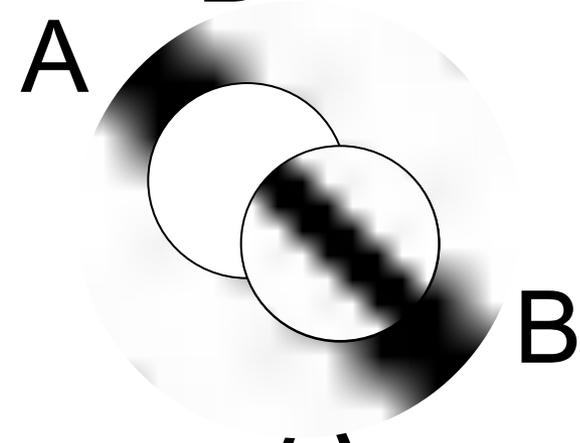
$\cdot$



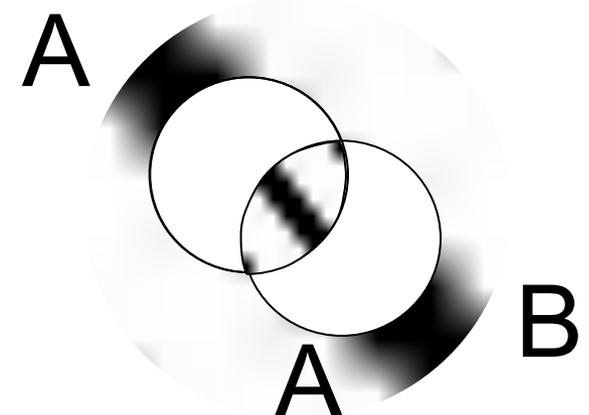
$+$



$\oplus$



$\rightarrow$



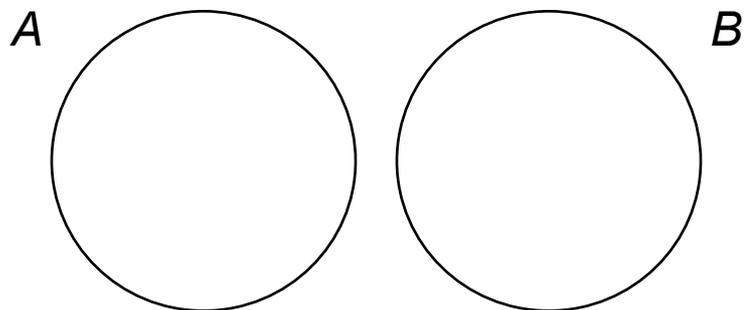
$\leftrightarrow$

$\bar{B}$

$\bar{B}$

$\bar{B}$

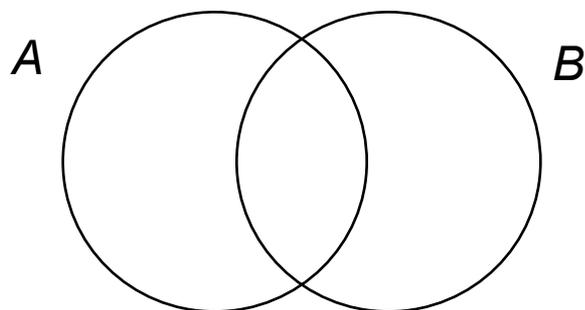
# Задачи



$$N_{A|B} =$$

50

огурцы &amp; помидоры



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

# Задачи

---

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>огурцы</i>	<i>100</i>
<i>помидоры</i>	<i>200</i>
<i>огурцы &amp; помидоры</i>	<i>50</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**огурцы | помидоры**

**Задача 1.** Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам (здесь символ «&» обозначает операцию «И», а «|» — операцию «ИЛИ»):

собаки   кошки	770
кошки	550
собаки & кошки	100

Сколько страниц будет выдано по запросу собаки?

# 30

---

**\*7. Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам:**

собаки	50
кошки	60
лемуры	70
собаки   кошки	80
собаки   лемуры	100
лемуры & (собаки   кошки)	20

**Сколько страниц найдёт этот сервер по запросу  
кошки & (собаки | лемуры)?**

# 1000



## Задача (Простая)

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» — символ «&». В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Пушкин	3500
Лермонтов	2000
Пушкин   Лермонтов	4500

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу Пушкин & Лермонтов? Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# 2200

---

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» – символ «&».

В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Кокос   Ананас	3400
Кокос & Ананас	900
Кокос	2100

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу Ананас?

Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# 550

---

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» - символ «&».

В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
(Космос & Звезда)   (Космос & Планета)	1100
Космос & Планета	600
Космос & Планета & Звезда	50

Какое количество страниц (в тыс.) будет найдено по запросу Космос & Звезда?

Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# Самостоятельно

---

**3. Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам:**

собаки	200
кошки	250
кошки & собаки	50

**Сколько страниц найдёт этот сервер по запросу  
кошки | собаки?**

4. Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам:

собаки	200
кошки	250
лемуры	450
кошки   собаки	450
кошки & лемуры	40
собаки & лемуры	50

Сколько страниц найдёт этот сервер по запросу  
кошки | собаки | лемуры?

5. Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам:

собаки	250
кошки	200
лемуры	500
собаки & лемуры	0
собаки & кошки	20
кошки & лемуры	10

Сколько страниц найдёт этот сервер по запросу  
кошки | собаки | лемуры?

6. Известно количество страниц, которые находит поисковый сервер по следующим запросам:

собаки	120
кошки	270
лемуры	100
кошки   собаки	390
кошки & лемуры	20
собаки & лемуры	10

Сколько страниц найдёт этот сервер по запросу  
кошки | собаки | лемуры?

---

3) 400

4) 810

5) 920

6) 460

## Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
Динамо & Рубин	320
Спартак & Рубин	280
(Динамо   Спартак) & Рубин	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
Динамо & Спартак & Рубин



Общее условие с & можно отбросить !

## Задачи

---

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>Динамо</i>	320
<i>Спартак</i>	280
<i>Динамо   Спартак</i>	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**Динамо & Спартак**

Ответ:  $320 + 280 - 430 =$  **170**

## Задачи

Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот ее фрагмент:

<b>Ключевое слово</b>	<b>Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым</b>
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**(принтер | сканер) & монитор**  
если по трем следующим запросам найдено:

**принтер | сканер** – 450 сайтов,

**принтер & монитор** – 40 сайтов

**сканер & монитор** – 50 сайтов.

# Задачи

(принтер | сканер) & монитор = ?

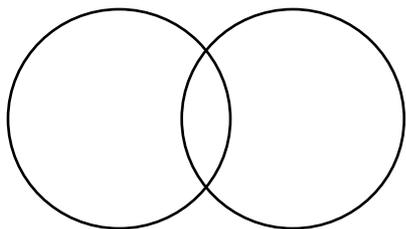
A (сканер)

B (принтер)

450

принтер | сканер

0



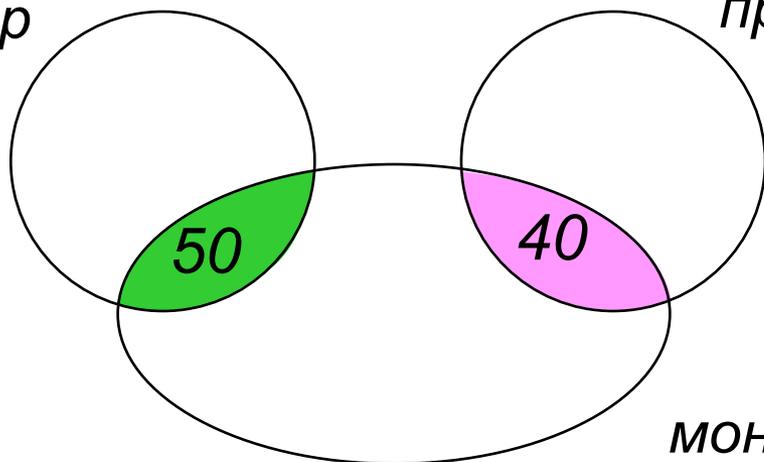
$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

сканер 200

принтер 250

сканер

принтер



принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

монитор

40 + 50 = 90

# Сложная задача

---

Ниже приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

<b>мезозой</b>	<b>500</b>
<b>кроманьонец</b>	<b>600</b>
<b>неандерталец</b>	<b>700</b>
<b>мезозой   кроманьонец</b>	<b>800</b>
<b>мезозой   неандерталец</b>	<b>1000</b>
<b>неандерталец &amp; (мезозой   кроманьонец)</b>	<b>200</b>

Сколько страниц будет найдено по запросу

**кроманьонец & (мезозой | неандерталец)**

# 550

---

## Задача (Классическая)

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» - символ «&».

В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
(Космос & Звезда)   (Космос & Планета)	1100
Космос & Планета	600
Космос & Планета & Звезда	50

Какое количество страниц (в тыс.) будет найдено по запросу Космос & Звезда?

Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# 180

## Задача (На закрепление)

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для обозначения логической операции «И» – символ «&». В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Море & Солнце	290
Море & Пляж	355
Море & (Пляж   Солнце)	465

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу Море & Пляж & Солнце? Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# 324

## Задача (с 4 сущностями)

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для обозначения логической операции «И» – символ «&».

В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Англия & (Уэльс & Шотландия   Ирландия)	450
Англия & Уэльс & Шотландия	213
Англия & Уэльс & Шотландия & Ирландия	87

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу

Англия & Ирландия?

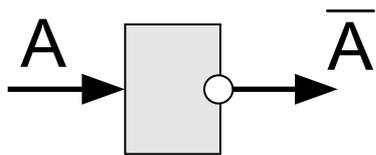
Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

# Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

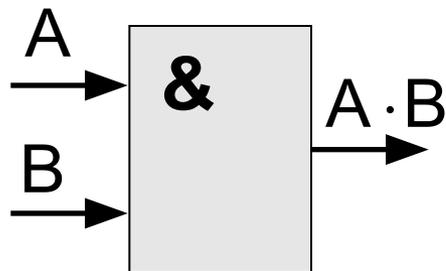
## § 24. Логические элементы компьютера

# Логические элементы компьютера

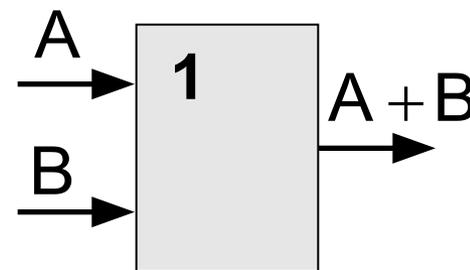
значок инверсии



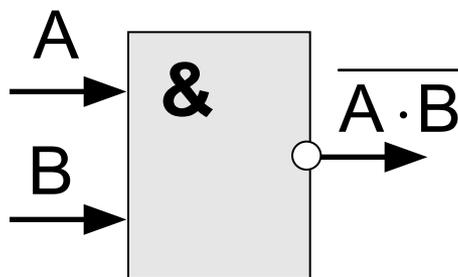
НЕ



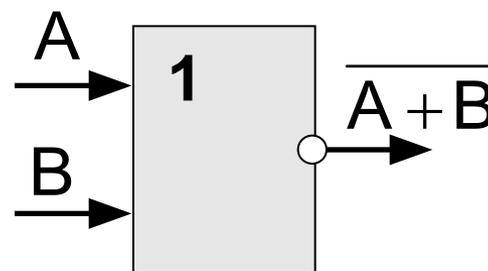
И



ИЛИ



И-НЕ



ИЛИ-НЕ