

Системы счисления

ЕГЭ-14

Перевод в десятичную с.с. из N-ричной с.с.

□ 4 3 2 1 0 ← разряды

□ $1\ 2\ 3\ 4\ 5_N = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$

□ последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N

□ две последние цифры – это остаток от деления на N^2 , и т.д.



$$10^N = 1 \underbrace{0 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 0$$

$$10^N - 1 = \underbrace{9 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 9$$

$$10^N - 10^M = \underbrace{9 \boxed{} \boxed{}}_{N-M} \underbrace{9 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{M} 0$$

$$10^N - 10^M = 10^M \cdot (10^{N-M} - 1)$$

$$2^N = 1 \underbrace{0 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 0_2$$

$$2^N - 1 = \underbrace{1 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 1_2$$

$$2^N - 2^K = \underbrace{1 \boxed{} \boxed{}}_{N-K} \underbrace{1 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{K} 0_2$$

$$2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$$

$$2^N = 2^{N+1} - 2^N$$

$$-2^N = -2^{N+1} + 2^N$$

$$3^N = 1 \underbrace{0 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 0_3$$

$$3^N - 1 = \underbrace{2 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N} 2_3$$

$$3^N - 3^M = \underbrace{2 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{N-M} \underbrace{2 \boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{M} 0_3$$

$$3^N - 3^M = 3^M \cdot (3^{N-M} - 1)$$



Р-25. (демо-2021) Значение арифметического выражения: $49^7 + 7^{21} - 7$ – записали в системе счисления с основанием 7.

Сколько цифр **6** содержится в этой записи?

□ **Решение:**

□ приведём все числа к степеням семерки, учитывая, что $49 = 7^2$

□ $7^{14} + 7^{21} - 7^1$

□ расставим степени в порядке убывания:

□ $7^{21} + 7^{14} - 7^1$

□ Очевидно, что «шестёрки» в семеричной записи значения выражения возникнут только за счёт вычисления разности $7^{14} - 7^1$, их количество равно $14 - 1 = 13$

□ Ответ: 13.



Р-24. (М.В. Кузнецова) Значение арифметического выражения: $64^{10} + 2^{90} - 16$ записали в системе счисления с основанием 8.

Сколько цифр «7» содержится в этой записи?

□ **Решение:**

□ Приведём все числа к степеням восьмерки, учитывая, что $16 = 64 - 48 = 8^2 - 6 \cdot 8^1$

□ $64^{10} + 2^{90} - 16 = (8^2)^{10} + 2^{3 \cdot 30} - (8^2 - 48) = 8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$

□ Перепишем выражение, располагая степени восьмёрки в порядке убывания:

$$8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1 = 8^{30} + 8^{20} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$$

□ Очевидно, что «семёрки» в восьмеричной записи значения выражения возникнут только за счёт вычисления разности $8^{20} - 8^2$, их количество равно $20 - 2 = 18$

□ Ответ: 18.



Р-23. (М.В. Кузнецова) Значение

арифметического выражения: $9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19$

записали в системе счисления с основанием 3.

Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение:

Приведём все числа к степеням тройки, учитывая, что $19 = 27 - 8 = 3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)$:

$$9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19 = (3^2)^9 - 3^9 + (3^2)^{19} - (3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)) = 3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Перепишем выражение, располагая степени тройки в порядке убывания:

$$3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3^{38} + 3^{18} - 3^9 - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Сначала рассмотрим часть выражения, в которой имеется два расположенных подряд «минуса»:
 $3^{18} - 3^9 - 3^3$:

найдем разность двух крайних чисел: $3^{18} - 3^3$, в её троичной записи $18 - 3 = 15$ «двоек» и 3 «нуля»;

вычтем из этого числа значение 3^9 : одна из «двоек» (на 10-й справа позиции) уменьшится на 1, остальные цифры не изменятся;

итак, троичная запись разности $3^{18} - 3^9 - 3^3$ содержит $15 - 1 = 14$ «двоек», одну «единицу» и 3 «нуля»

Прибавим к полученному значению сумму: $2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 22_3$. В троичной записи результата два крайних справа нуля заменяются на «двойки», остаётся один ноль. Общее количество «двоек»: $14 + 2 = 16$.

Прибавление значения 3^{38} не изменит количества «двоек» в троичном числе: слева от имеющихся цифр появятся ещё $38 - 18 = 20$ «нулей» и одна «единица» — на 39-й справа позиции.

Итак, результат, записанный в троичной системе, содержит 39 цифр. Его состав: 16 «двоек», 2 «единицы» (их позиции: 39-я и 10-я справа) и 21 «нуль» ($39 - 16 - 2 = 21$).

Ответ: 16.

Р-22. Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 9$

записали в системе счисления с основанием 3.

Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение:

- приведём все слагаемые к виду 3^N и расставим в порядке убывания степеней:

$$9^8 + 3^5 - 9 = 3^{16} + 3^5 - 3^2$$

- первое слагаемое, 3^{16} , даёт в троичной записи одну единицу – она нас не интересует
- пара $3^5 - 3^2$ даёт $5 - 2 = 3$ двойки
- Ответ: 3.



Р-21. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа

$$4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250$$

Решение (способ Е.А. Смирнова, Нижегородская область):

Общая идея: количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц

приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что $250 = 256 - 4 - 2 = 2^8 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250 = (2^2)^{512} + (2^3)^{512} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1 =$$

$$= 2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

старшая степень двойки — 2^{1536} , двоичная запись этого числа представляет собой единицу и 1536 нулей, то есть, состоит из 1537 знаков; таким образом, остаётся найти количество единиц

вспомним, число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N-K$ единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{1 \dots 1}_{N-K} \underbrace{0 \dots 0}_K$$

для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N - 2^K$, причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию

в нашем случае вы выражении

$$2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу

используем теперь равенство $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$, так что $-2^{128} = -2^{129} + 2^{128}$; получаем

$$2^{1536} + 2^{1024} - 2^{129} + 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

здесь две пары $2^N - 2^K$, а остальные слагаемые дают по одной единице

общее число единиц равно $1 + (1024 - 129) + (128 - 8) + 1 + 1 = 1018$

таким образом, количество значащих нулей равно $1537 - 1018 = 519$

ответ: 519.

Р-20. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$$

▣ **Решение (С.О. Куров, Москва):**

- ▣ приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что $122 = 128 - 4 - 2 = 2^7 - 2^2 - 2^1$:
- ▣ $4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 =$
- ▣ $= 2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$
- ▣ ищем в **разности** крайнюю левую степень двойки и крайнюю правую $2^{1215} - 2^7$, при этом 2^{150} на время «теряем»
- ▣ определяем количество единиц в разности $2^{1215} - 2^7$, получаем $1215 - 7 = 1208$ единиц
- ▣ так как «внутри» этой разности есть еще 2^{150} , то просто вычитаем одну единицу: $1208 - 1 = 1207$; итого в разности $2^{1215} - 2^{150} - 2^7$ ровно 1207 единиц
- ▣ осталось прибавить по одной единицы от чисел $2^{4030}, 2^2, 2^1$
- ▣ Ответ: 1210

P-19. Решите уравнение

Ответ запишите в троичной системе счисления.

Основание системы счисления указывать не нужно.

Решение:

1) переведём все числа в десятичную систему счисления:

$$121_x = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1, \quad 101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 50$$

2) собирая всё в одно уравнение получаем

$$x^2 + 2x + 1 + 1 = 50 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

3) это уравнение имеет два решения, 6 и -8; основание системы счисления – натуральное число, поэтому ответ – 6

4) переводим ответ в троичную систему: $6 = 2 \cdot 3^1 = 20_3$.

5) ответ: **20**.



P-18. Сколько единиц в двоичной записи

числа

$$4^{2014} + 2^{2015} - 8 \quad \mathbf{2013}$$

P-17. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6 \quad \mathbf{221}$$

P-16. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80 \quad \mathbf{2395}$$

P-15. Решите уравнение $60_8 + x = 120_7$.

Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно

23

Р-14. Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

Решение:

- если запись числа в системе счисления с основанием N заканчивается на 0, то это число делится на N нацело
- поэтому в данной задаче требуется найти наименьшее натуральное число, которое делится одновременно на 3 и на 5, то есть, делится на 15
- очевидно, что это число 15.



Р-13. Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры.

Укажите основание этой системы счисления N .

Решение:

- поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1, то есть при некотором целом имеем
- следовательно, основание N – это делитель числа 66
- с другой стороны, запись числа содержит 4 цифры, то есть
- выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел, которые являются делителями числа 66:
- видим, что из этого списка только для числа $N = 3$ выполняется условие
- таким образом, верный ответ – 3.
- можно сделать проверку, переводя число 67 в троичную систему $67_{10} = 2111_3$



Р-12. Запись числа 381_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 3 и содержит 3 цифры. Укажите **наибольшее** возможное основание этой системы счисления N .

□ **Решение:**

- поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 3, то остаток от деления числа 381 на N равен 3, то есть при некотором целом имеем
- следовательно, основание N — это делитель числа
- с другой стороны, запись числа содержит 3 цифры, то есть
- неравенство дает (так как)
- неравенство дает (так как)
- таким образом, ; в этом диапазоне делителями числа 378 являются числа
 - 9, при получаем запись числа
 - 14, при получаем запись числа
 - 18, при получаем запись числа
- наибольшим из приведенных чисел — это 18 (можно было сразу искать подбором наибольший делитель числа 378, начиная с 19 «вниз», на уменьшение)
- таким образом, верный ответ — 18.

все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11?

▣ **Решение (через четверичную систему, предложен О.А. Тузовой):**

- ▣ переведем 25 в четверичную систему счисления: $25 = 121_4$, все интересующие нас числа не больше этого значения
- ▣ из этих чисел выделим только те, которые заканчиваются на 11, таких чисел всего два: это $11_4 = 5$ и $111_4 = 21$
- ▣ таким образом, верный ответ – 5, 21 .



P-10. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа **322** оканчивается на 2.

P-9. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа **31** оканчивается на 11.

2, 3, 5, 30

P-8. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел $10, 11, 12, \dots, 17$ в системе счисления с основанием 5.

7



Р-7. Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 трехзначна.

Решение:

- 1) обозначим через N неизвестное основание системы счисления, тогда запись числа 30 в этой системе имеет вид

$$x y z_N = 30$$

- 2) вспомним алгоритм перевода числа из системы счисления с основанием N в десятичную систему: расставляем сверху номера разрядов и умножаем каждую цифру на основание в степени, равной разряду:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ x & y & z_N \end{array} = x \cdot N^2 + y \cdot N + z = 30$$

- 3) поскольку запись трехзначная, $x \neq 0$, поэтому $30 \geq N^2$
4) с другой стороны, четвертой цифры нет, то есть, в третьем разряде – ноль, поэтому $30 < N^3$
5) объединяя последние два условия, получаем, что искомое основание N удовлетворяет двойному неравенству

$$N^2 \leq 30 < N^3$$

- 6) учитывая, что N – целое число, методом подбора находим целые решения этого неравенства; их два – 4 и 5:

$$4^2 = 16 \leq 30 < 4^3 = 64$$

$$5^2 = 25 \leq 30 < 5^3 = 125$$

- 7) минимальное из этих значений – 4
8) таким образом, верный ответ – 4.

возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, запись которых в системе счисления с основанием 5 начинается на 3?

Решение (вариант 1):

- 1) нас интересуют числа от 1 до 30
- 2) сначала определим, сколько цифр может быть в этих числах, записанных в системе счисления с основанием 5
- 3) поскольку $5^2 < 30 < 5^3$, в интересующих нас числах может быть от 1 до 3 цифр
- 4) рассмотрим трехзначные числа, начинающиеся на 3 в системе с основанием 5:

$$3xy_5 = 3 \cdot 5^2 + x \cdot 5 + y$$

все они заведомо не меньше $3 \cdot 5^2 = 75 > 30$, поэтому в наш диапазон не попадают;

- 5) таким образом, остается рассмотреть только однозначные и двухзначные числа
- 6) есть всего одно однозначное число, начинающееся на 3, это 3
- 7) общий вид всех двухзначных чисел, начинающихся на 3 в системе с основанием 5:

$$3 \cdot 5 + k = 15 + k$$

где k – целое число из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (поскольку система счисления имеет основание 5 и цифр, больших 4, в записи числа быть не может)

- 8) используя эту формулу, находим интересующие нас двухзначные числа – 15, 16, 17, 18 и 19
- 9) таким образом, верный ответ – 3, 15, 16, 17, 18, 19.



P-05. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 71 оканчивается на 13.

Решение (2 способ, М.В. Кузнецова и её ученики):

- 1) запись числа 71 в системе с основанием x оканчивается на 13, т.е. в разряде единиц – 3, это значит, что остаток от деления 71 на x равен 3, то есть для некоторого целого k имеем

$$k \cdot x + 3 = 71 \Rightarrow k \cdot x = 68$$

- 2) таким образом, искомые основания – делители числа 68; остается выбрать из них те, которые соответствуют другим условиям задачи
- 3) среди чисел, оканчивающихся на 13 в системе счисления с основанием x , минимальное – это само число 13_x ; отсюда найдем максимальное основание:

$$13_x = 1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0 = x + 3 = 71 \Rightarrow x = 68$$

так что первый ответ: 68.

- 4) остальные числа, оканчивающиеся в этой системе на 13, имеют не менее 3-х знаков ($113_x, 213_x, \dots$), т.е. все они больше $100_x = x^2$
- 5) поэтому $71 > x^2$, следовательно, $x < 9$
- 6) по условию в записи числа есть цифра 3, поэтому $x > 3$ (в системах с основанием ≤ 3 цифры 3 нет)
- 7) итак: $x \in [4, 8]$, и при этом x – делитель 68; единственное возможное значение $x = 4$ (на 5, 6, 7 и 8 число 68 не делится)
- 8) таким образом, верный ответ: 4, 68.

Р-04. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 86 оканчивается на 22.

1) Если число в системе с основанием x оканчивается на 22, то

а) $x \geq 3$, потому что в системах с меньшим основанием нет цифры 2

б) это число можно представить в виде $A \cdot x^2 + 2x + 2$, где A – целое неотрицательное число

2) определим наибольшее возможное A с учетом условия $x \geq 3$. Из уравнения

$$A \cdot x^2 + 2x + 2 = 86 \text{ следует } A = \frac{84 - 2x}{x^2}.$$

3) очевидно, что чем меньше x , тем больше A , поэтому значение A не превышает

$$A_{\max} = \frac{84 - 6}{3^2} = 8\frac{2}{3}$$

здесь мы подставили $x = 3$ – наименьшее допустимое значение x

4) остается перебрать все допустимые значения A (от 0 до $A_{\max} = 8$), решая для каждого из них уравнение

$$A \cdot x^2 + 2x + 2 = 86 \text{ или равносильное } A \cdot x^2 + 2x - 84 = 0$$

относительно x , причем нас интересуют только натуральные числа $x \geq 3$

5) получаем

а) при $A = 0$: $x = 42$

б) при $A = 1$: решения – не целые числа

в) при $A = 2$: $x = 6$ и $x_2 = -7$, второе решение не подходит

г) при $A = 3, 4, 5, 6, 7, 8$: решения – не целые числа

6) таким образом, верный ответ: **6, 42**.

Р-03. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 94 начинается на 23.

Решение:

- 1) Из условия сразу видно, что искомое основание не меньше 4 (в записи есть цифра 3).
- 2) Если запись числа 94 в некоторой системе счисления с основанием x двузначна ($94 = 23_x$), то справедливо равенство $94 = 2x + 3$; нас интересуют натуральные решения этого уравнения, такие что $x \geq 4$, таких решений нет.
- 3) Предположим, что число четырехзначное. Минимальное допустимое четырехзначное число – 2300_x , где $x \geq 4$. При минимальном основании ($x = 4$) оно равно $2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 = 176 > 94$, поэтому запись нужного нам числа имеет не больше трех знаков.
- 4) На основании (2) и (3) делаем вывод, что число трехзначное, то есть $94 = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + M$, где M – целое неотрицательное число, такое что $M < x$.
- 5) Максимальное x можно определить как решение уравнения $94 = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$ (при $M = 0$); получаем одно из решений – 6,15; поэтому $x \leq 6$
- 6) Если мы знаем x , то M определится как $M = 94 - 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x$; пробуем подставлять в эту формулу $x = 4, 5, 6$, пытаемся получить $M < x$
- 7) Минимальное M будет при $x = 6$: $M = 4$, а при $x = 4, 5$ получается $M > x$
- 8) Таким образом, верный ответ: 6.



$+1700_8 + \dots + 1700000_8$, перевести в 16-ую систему счисления. Найдите в записи числа, равного этой сумме, третью цифру слева.

□ **Решение:**

□ Несложно выполнить прямое сложение восьмеричных чисел, там быстро обнаруживается закономерность:

□ $17_8 + 170_8 = 207_8$

□ $17_8 + 170_8 + 1700_8 = 2107_8$

□ $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 = 21107_8$

□ $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 = 211107_8$

□ $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 + 1700000_8 = 2111107_8$

□ Переведем последнюю сумму через триады в двоичный код (заменяем каждую восьмеричную цифру на 3 двоичных):

□ 10001001001001000111_2

□ Теперь разбиваем цепочку на тетрады (группы из 4-х двоичных цифр), начиная справа, и каждую тетраду представляем в виде шестнадцатеричной цифры

□ 10001001001001000111_2

□ $\begin{matrix} & 8 & 9 & 2 & 4 & 7 \end{matrix}$

□ Таким образом, верный ответ (третья цифра слева): 2.



P-01. Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления, при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

Решение:

- 1) Поскольку в левой и в правой частях есть цифра 5, оба основания больше 5, то есть перебор имеет смысл начинать с $x = x_{\min} = 6$.
- 2) Очевидно, что $x > y$, однако это не очень нам поможет.
- 3) Для каждого «подозреваемого» x вычисляем значение $225_x = 2 \cdot x^2 + 2x + 5 = N$ и решаем уравнение $N = 405_y = 4 \cdot y^2 + 5$, причем нас интересуют только натуральные $y > 5$.
- 4) Для $x = 6$ и $x = 7$ нужных решений нет, а для $x = 8$ получаем $N = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 5 = 149 = 4 \cdot 6^2 + 5$ так что $y = 6$.
- 5) Таким образом, верный ответ (минимальное значение x): 8.

10
основанием N оканчивается на 0 и содержит 4 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N ?

Решение (2 способ, неравенства):

- 1) запись числа 30 в системе с основанием N содержит ровно 4 цифры тогда и только тогда, когда старший разряд – третий, то есть

$$N^3 \leq 30 < N^4$$

- 2) первая часть двойного неравенства $N^3 \leq 30$ дает (в целых числах) $N \leq 3$

- 3) вторая часть неравенства $30 < N^4$ дает (в целых числах) $N \geq 3$

- 4) объединяя результаты пп. 2 и 3 получаем, что $N = 3$

- 5) заметим, что условие «оканчивается на 0» – лишнее, ответ однозначно определяется по количеству цифр

- 6) Ответ: 3.

