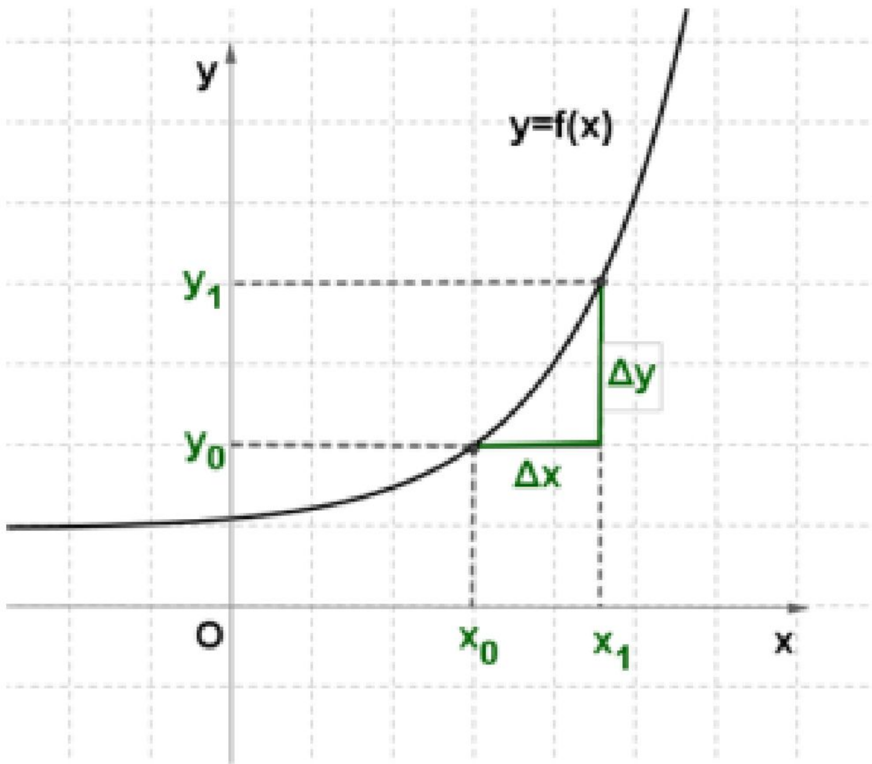
Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл

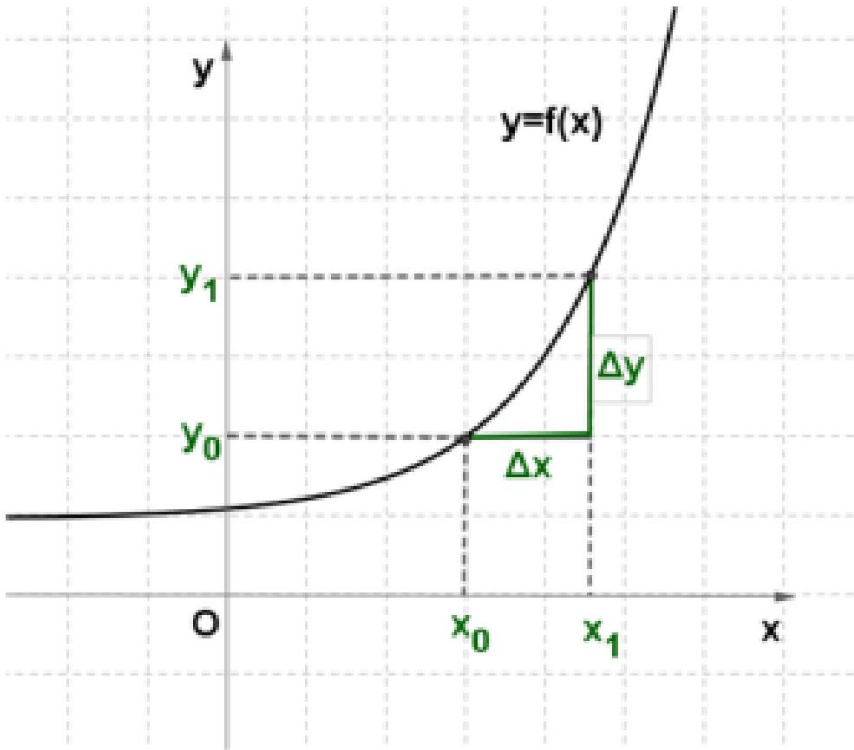


Изучая поведение функции y=f(x) около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в точках x_0 и x_1. Разность

$x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1)$-$f(x_0)$

называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ).
Приращение функции обозначают Δy или Δf.
Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.
$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$, значит, $\boldsymbol{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

Пример 1.

Найдем приращение Δx и Δf в точке $x_{0,}$ если $f(x)= x^2$, $x_0=2$ и $x=1,9$

Решение:

$\Delta x= x_1 - x_0=1,9-2=-0,1$

$\Delta f= f(1,9) - f(2)=1,9^2-2^2=-0,39$

Ответ: $\Delta x=-0,1$; $\Delta f =-0,39$

Пример 2.

Найдем приращение Δx и Δf в точке $x_{0,}$ если $f(x)= x^2$, $x_0=2$ и $x=2{,}1$

Решение:

$\Delta x= x_1 - x_0=2{,}1-2=0{,}1$

$\Delta f= f(1{,}9) - f(2)=2{,}1^2-2^2=0{,}41$

Ответ: $\Delta x=0{,}1$; $\Delta f =0{,}41$

Пример 3.

Найдем приращение Δf функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке x_0,если приращение аргумента равно x_0.

Решение:

по формуле (1) находим:

$$\Delta f = f(x0 + \Delta x) - f(x0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \quad .$$

Ответ: $\Delta f = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \quad .$

Определение. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Если функция f(x) имеет производную в точке x, то эта функция называется **дифференцируемой** в этой точке.

Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция **дифференцируема на этом промежутке**.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Схема вычисления производной функции по её определению

1) Найти приращение функции на отрезке [x; $x_0+\Delta x$]:

$$\Delta y = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)$$

2) Разделить приращение функции на приращение аргумента:

$$\frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

3) Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Пример 4.

Вычислить производную функции $y=x^2$

1) $$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 =$$
$$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

3) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0$$

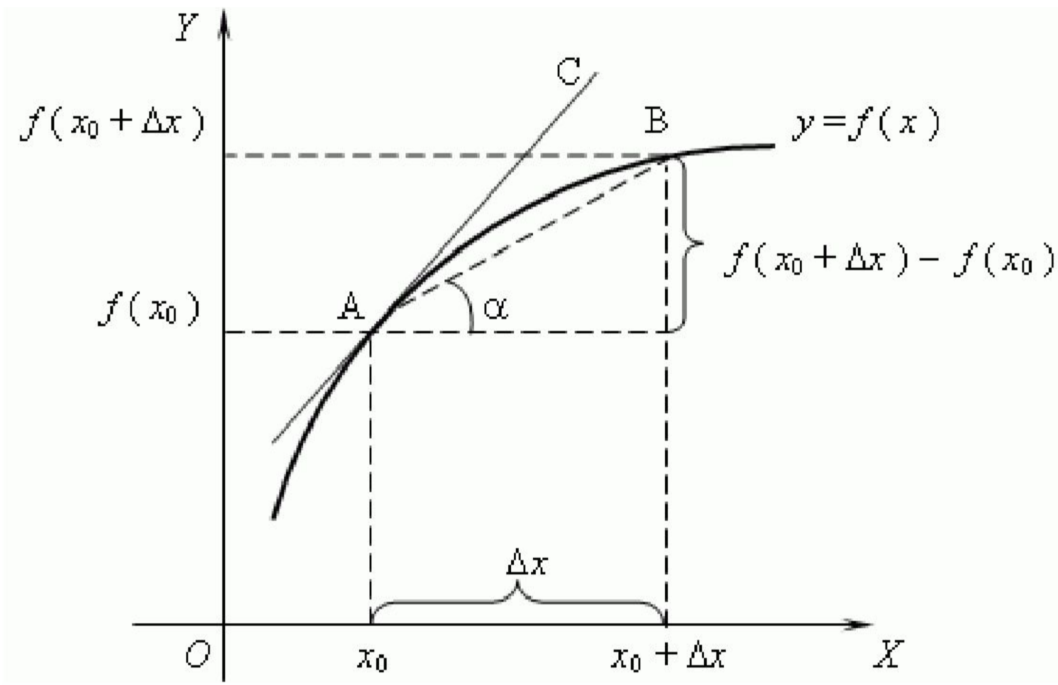
Физический смысл производной

Если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t:

$$v(t)=S'(t)$$

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

Геометрический смысл производной



Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

$$f'(x) = k = tg\alpha$$

Задание для самостоятельного решения

- Пользуясь определением производной, найдите значение производной функции $f(x)=x^2-3x$ в точке 2.