

18.03.2023г.

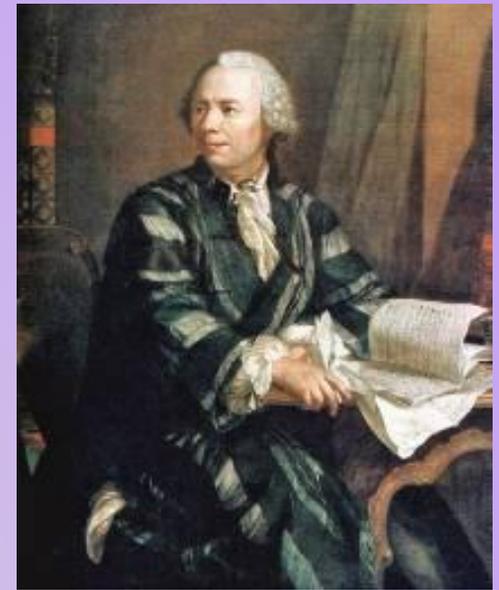
ТЕМА №1:

**Графы. Вершина. Ребро.  
Представление задачи с  
помощью графов.**

# Леонард Эйлер

(1707г – 1783гг)

Швейцарский, прусский и российский математик

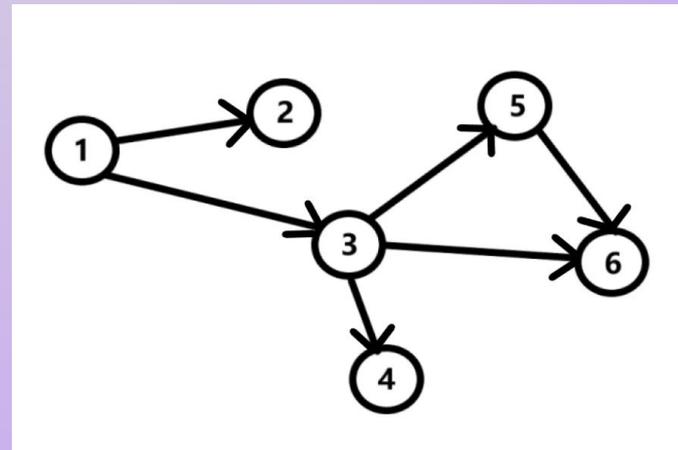
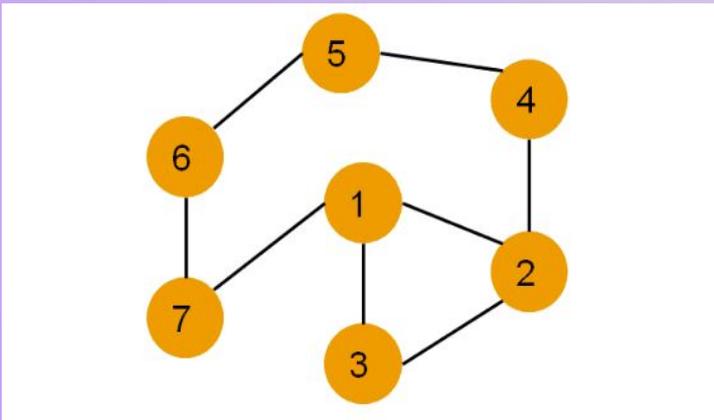


Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

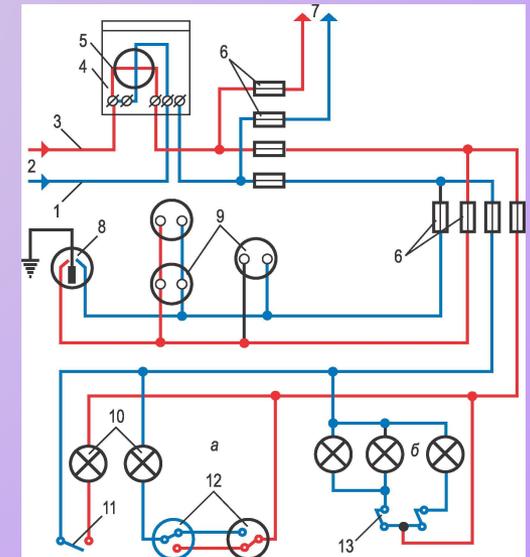
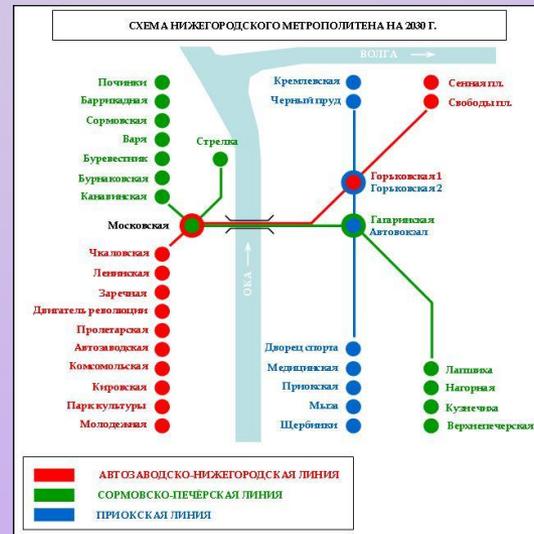
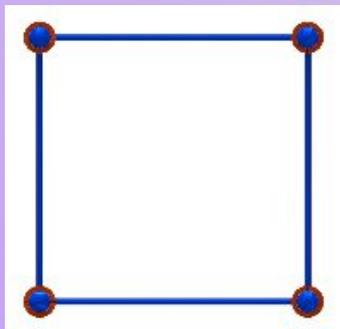
Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. Леонард Эйлер, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.

# Что такое граф

Слово «**граф**» в математике означает картинку, где нарисовано несколько точек, некоторые из которых соединены линиями. В процессе решения задач математики заметили, что удобно изображать объекты точками, а отношения между ними отрезками или дугами.



# Примеры графов: карта дорог, схема метро, электросхема, чертеж прямоугольника и т.п.

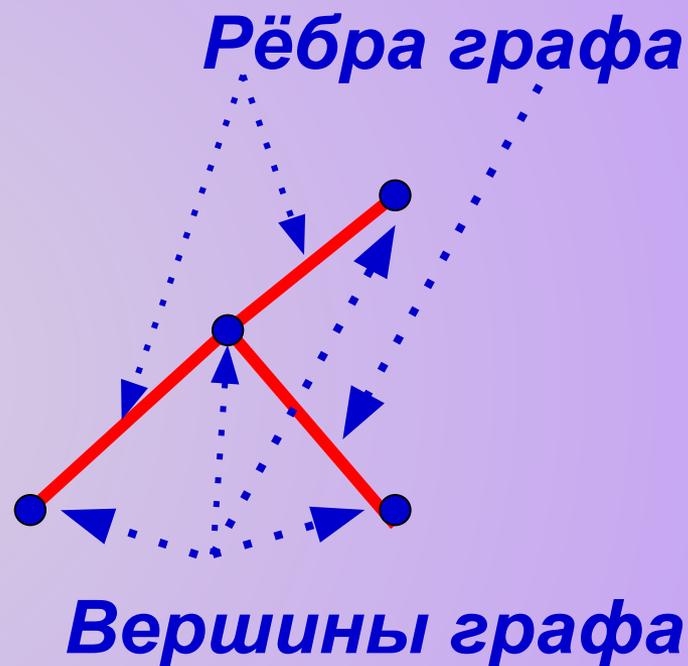


# Что такое граф

**Графом** называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями.

Точки называются **вершинами** графа, а соединяющие линии — **рёбрами**.

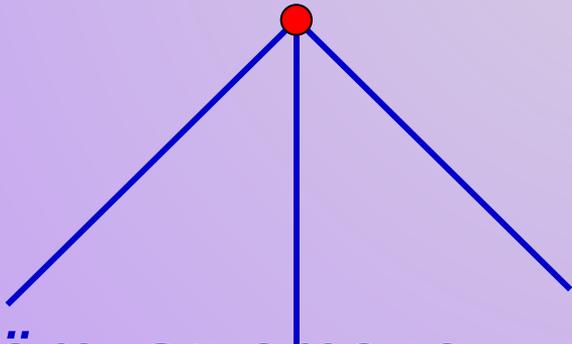
*(Каждое ребро соединяет ровно две вершины).*



# Что такое граф

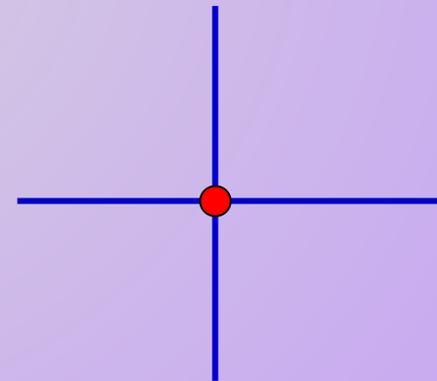
Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется **степенью вершины**.

Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется **нечётной**, а чётную степень – **чётной**.



*Нечётная степень*

(из вершины выходят *три* ребра)

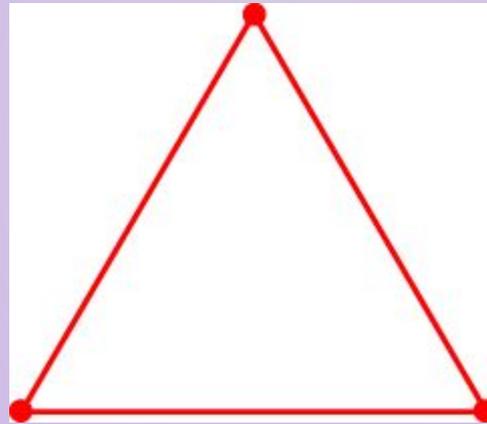


*Чётная степень*

(из вершины выходят *четыре* ребра)

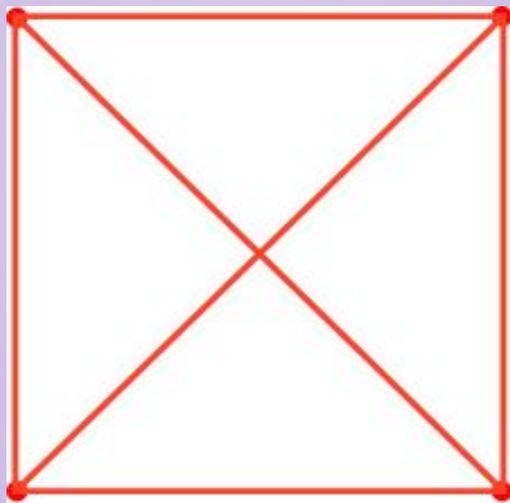
# Упражнения

1. В графе 3 вершины, каждая из которых имеет степень 2. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



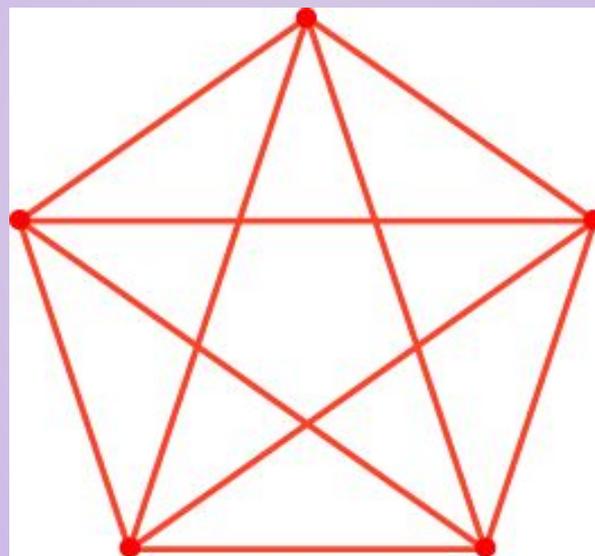
Ответ: 3.

2. В графе 4 вершин, каждая из которых имеет степень 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 6.

3. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет степень 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 10.

## № 4.

В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, Евгений — сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?



**Ответ: нет.**

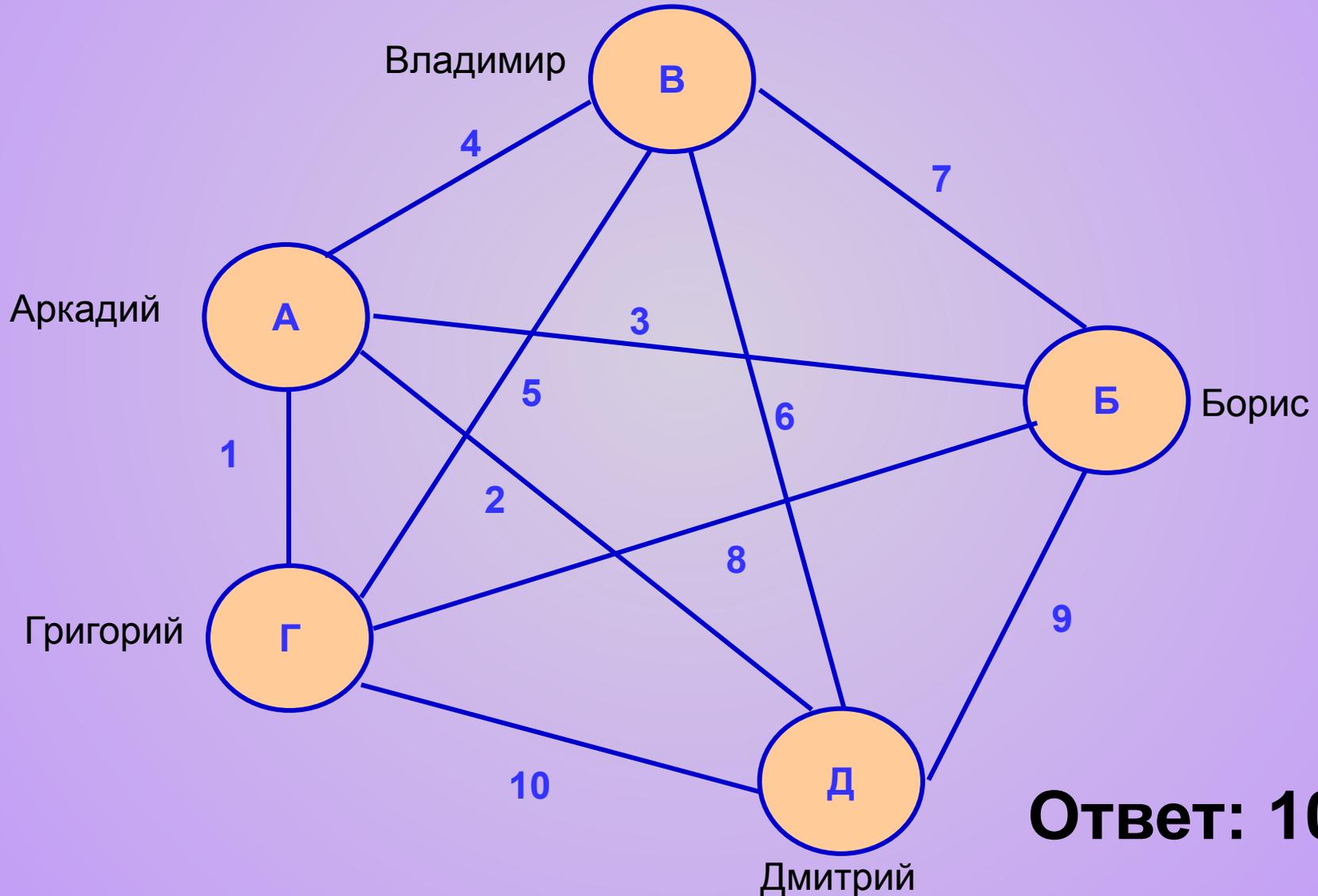
## №5.

Аркадий, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?



# Решение:

Изобразим точками всех участников рукопожатий. Будем постепенно соединять точки отрезками-это «рукопожатия» и считать их количество.



**Ответ: 10.**

## №6.

В первенстве класса по настольному теннису принимали участие 5 учеников: Андрей, Борис, Галина, Олег, Елена.

Первенство проводилось по круговой системе – каждый участник играет с каждым из остальных один раз.

К настоящему моменту некоторые игры уже проведены:

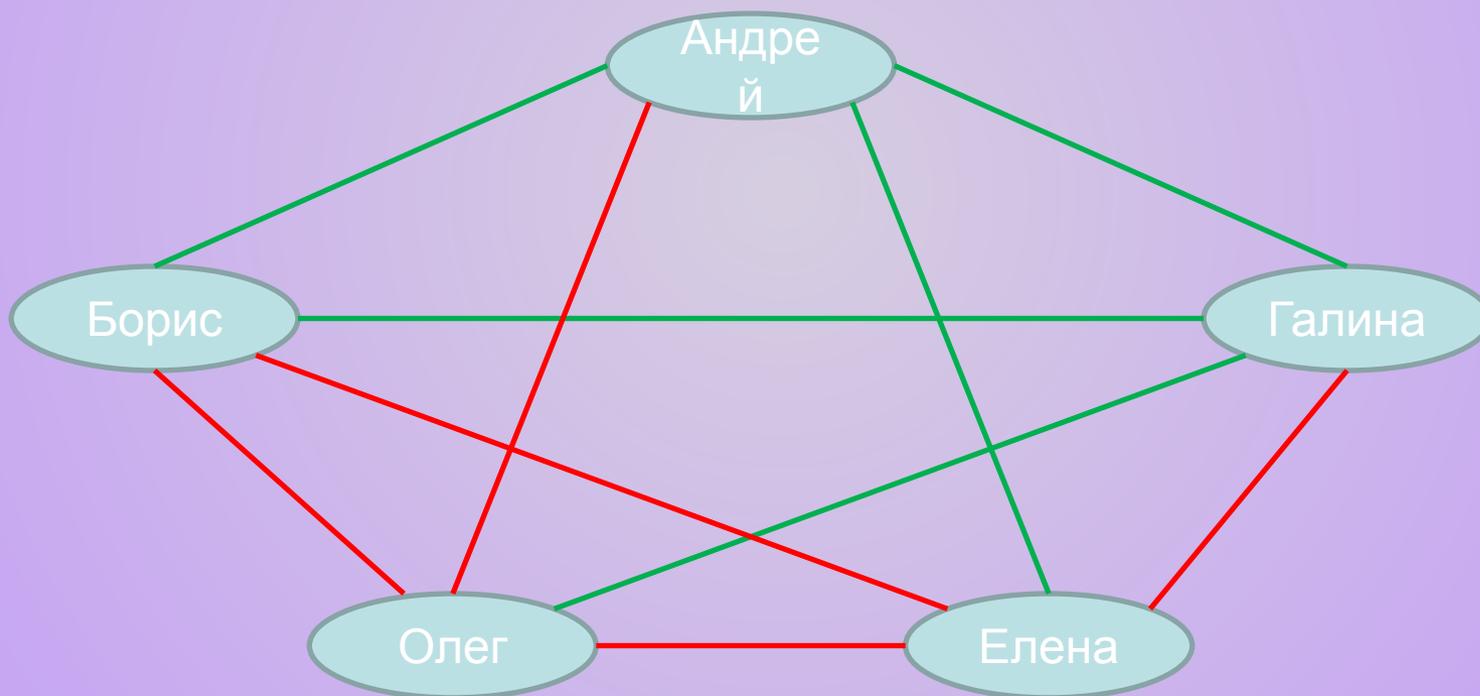
- Андрей сыграл с Борисом, Галиной и Еленой;
- Борис с Андреем и Галиной;
- Галина с Андреем и Олегом.

Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько ещё осталось?



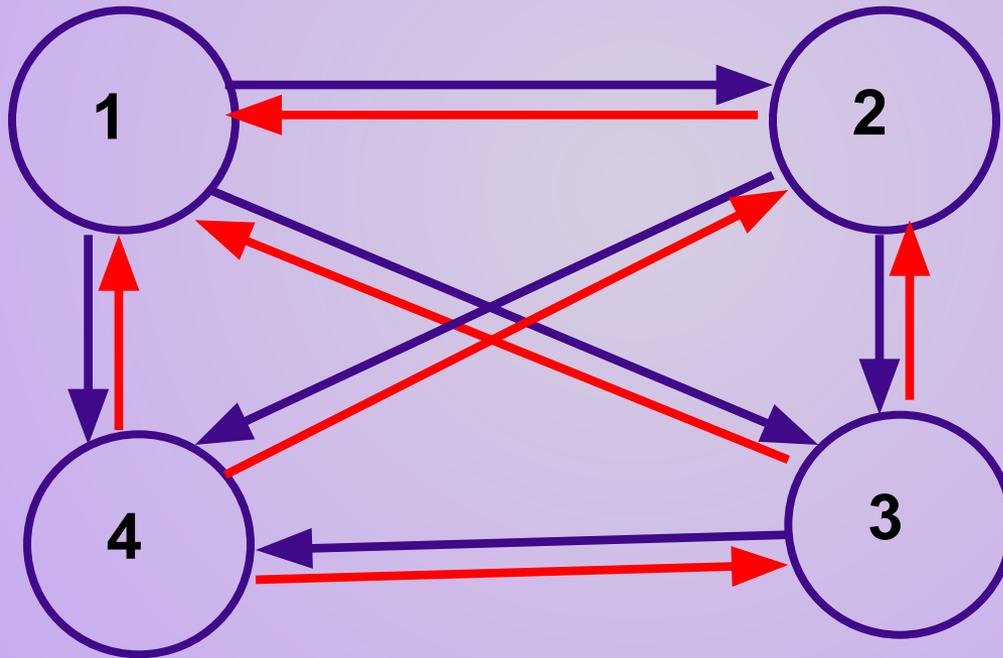
# Решение

- Андрей сыграл с Борисом, Галиной и Еленой;
- Борис с Андреем и Галиной
- Галина с Андреем и Олегом.



**Ответ: сыграно 5 партий, осталось 5 партий.**

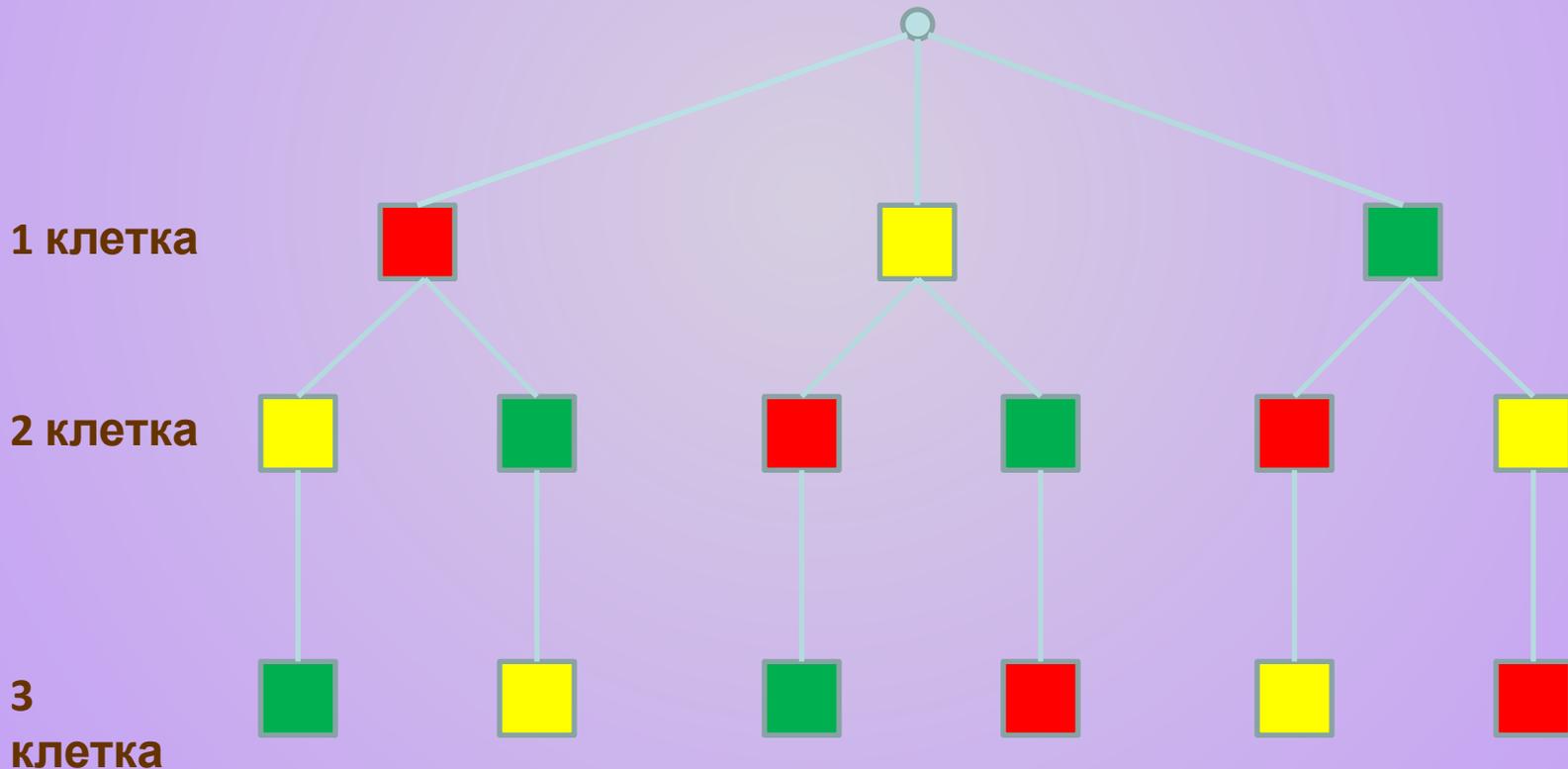
**№7.** По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали 4 человека?



**Ответ: 12.**

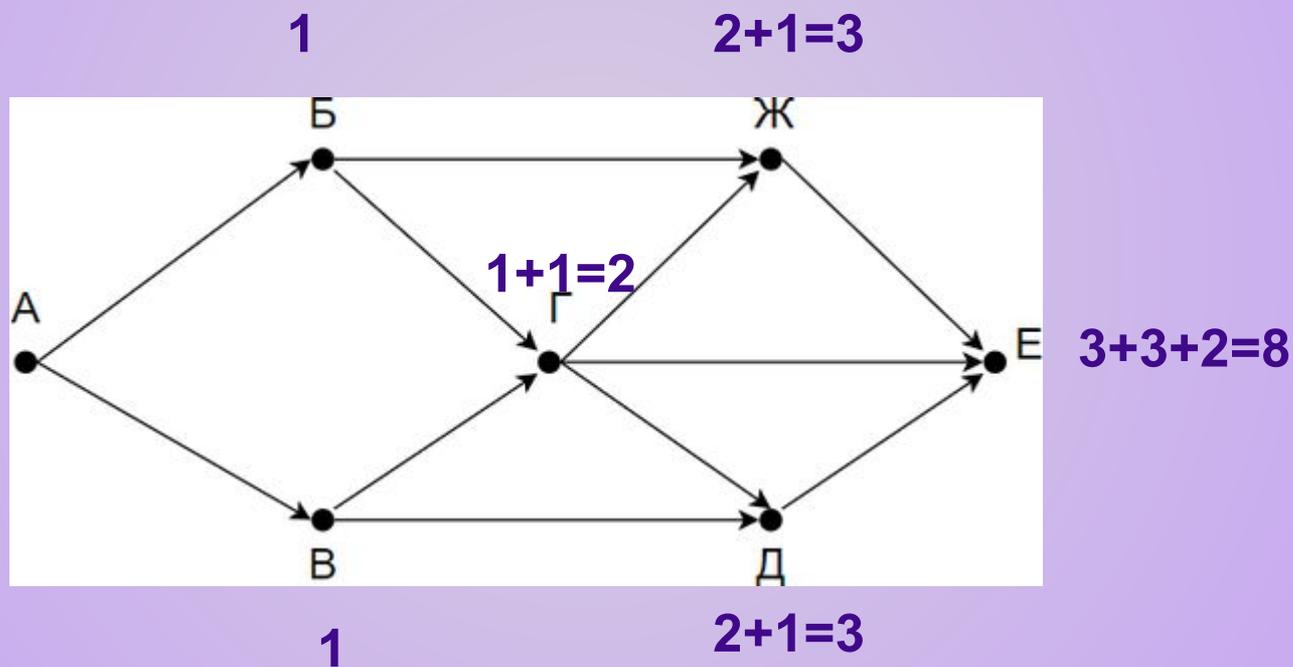
## №8.

У Васи в альбоме нарисован прямоугольник, разделённый на три равные части. Он должен закрасить каждую из этих частей в один из трёх цветов: красный, жёлтый, зелёный. Нельзя окрашивать разные части одинаковым цветом. Сколько вариантов рисунка может получиться?



Ответ: 6  
вариантов

**№9.** На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Е?



Отметим на рисунке индексами сверху каждого пункта количество путей, с помощью которых в него можно попасть

## ТЕМА №2:

# Цепь и цикл. Путь в графе. Представление о связности графа

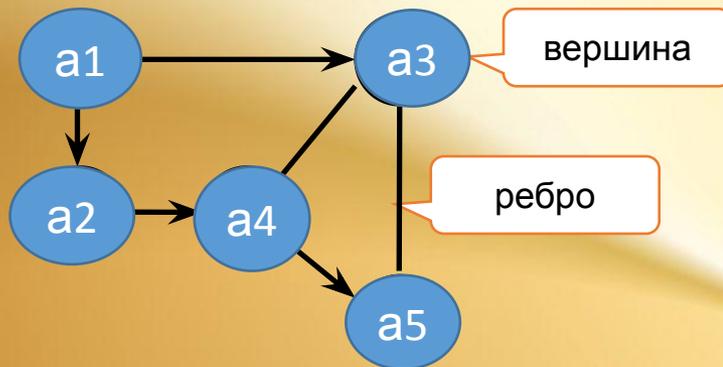
Цель:

- Познакомиться с понятиями: «маршрут», «путь», «цепь», «цикл», «связанный граф».
- Научиться определять характер последовательности вершин.
- Применять данный теоретический материал для решения задач.

# ПОВТОРЕНИЕ

Геометрическое представление графа — это схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых

Графом  $G(V, E)$  называется **совокупность** двух множеств — непустого множества  $V$  (**множества вершин**) и множества  $E$  двухэлементных подмножеств множества  $V$  ( **$E$  — множество рёбер**)



Как записать название данного графа в виде  $G(V, E)$  ?

**Ответ:**  $G(5;6)$   
 $V(a1, a2, a3, a4, a5)$

# МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Маршрутом** в графе называется последовательность ребер, такая, что два соседних ребра имеют общую вершину (*движение по рёбрам, без разрывов*)

Маршрут в котором все ребра различны, называется **цепью (путь)**

Цепь называется **простой**, если и все вершины в ней различны

Замкнутая простая цепь называется **циклом**

2, 3, 5, 4 – не маршрут

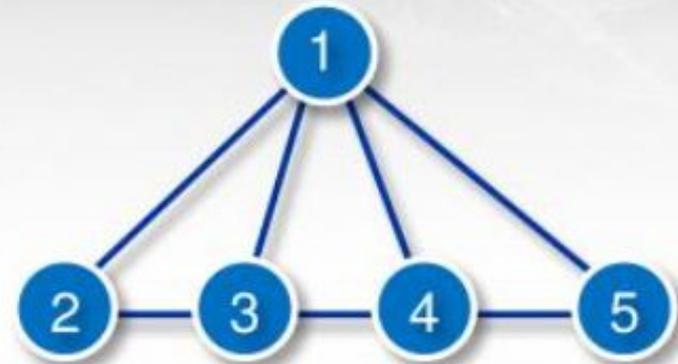
2, 3, 4, 5, 1, 4, 3 – маршрут, но не путь

3, 1, 4, 5, 1, 2 – путь, но не простой

2, 3, 1, 4, 3, 1, 2 – замкнутый маршрут, но не цикл

2, 3, 1, 4, 5, 1, 2 – цикл, но не простой

2, 3, 4, 5, 1, 2 – простой цикл



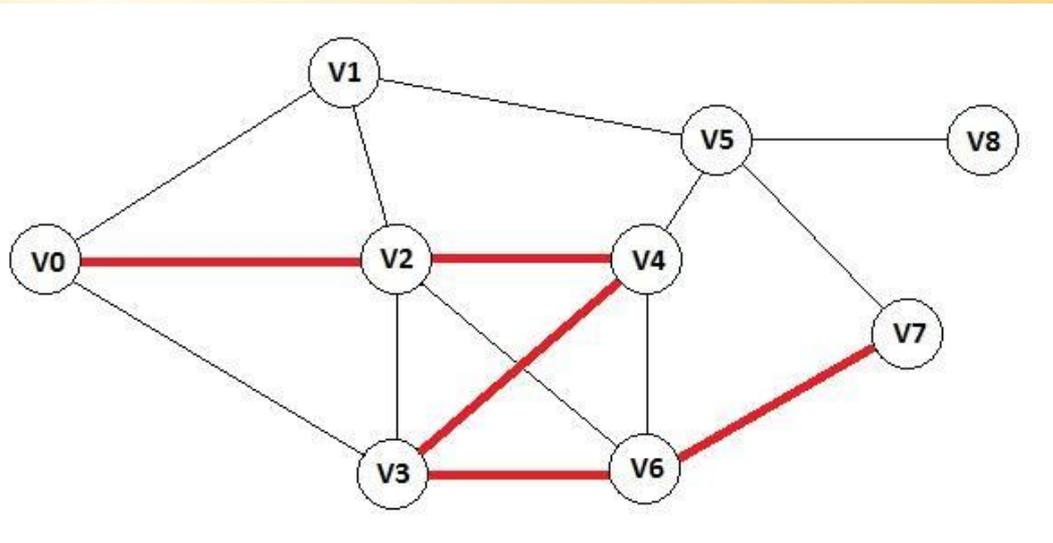
# МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ. Внешний вид

**Устно ответьте на вопросы по рисунку:**

- 1) Почему пунктиром показан «не путь»?
- 2) Как ещё можно назвать маршрут?
- 3) Является ли маршрут, обозначенный красной ломаной, простым?
- 4) Почему этот маршрут не является циклом?
- 5) Является ли цикл, обозначенный голубым цветом, простым?
- 6) Является ли цикл маршрутом, цепью, путём?



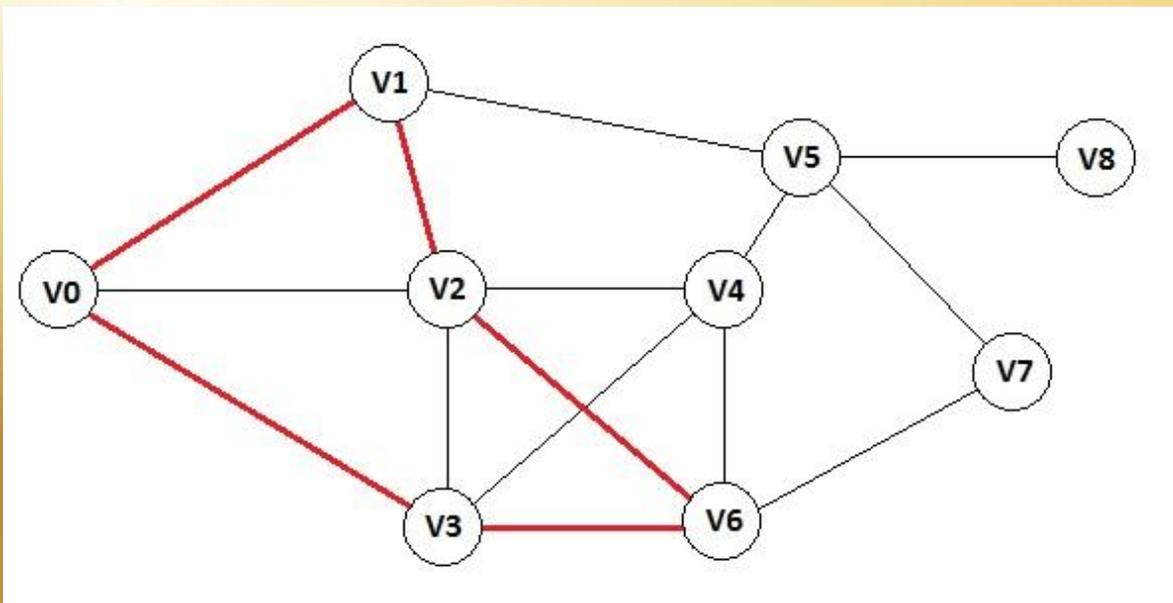
Определите, что изображено на рисунке красной линией:  
 $v_0 - v_2 - v_4 - v_3 - v_6 - v_7$   
Маршрут? Цепь? Цикл?



**Цепь**, в которой все вершины различны, кроме, может быть, ее концов, называется **простой**.

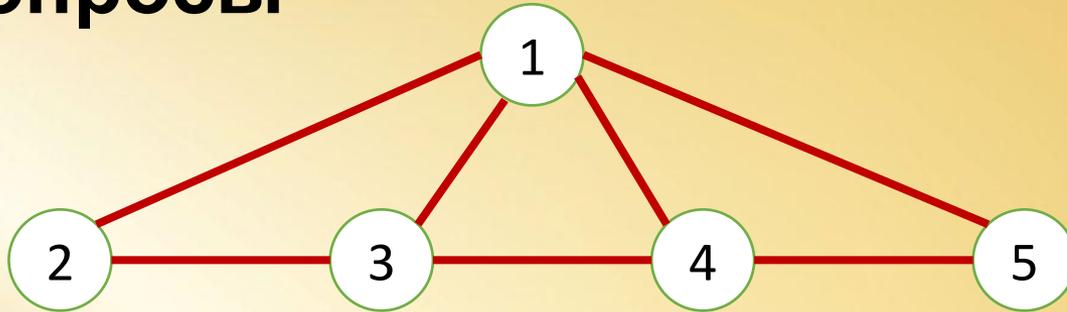
Ответ:  
на рисунке представлен:  
*Маршрут, Цепь (простая)*

Определите, что изображено на рисунке красной линией  $V_0 - V_1 - V_2 - V_6 - V_3 - V_0$  :  
Маршрут? Цепь ? Цикл?



Ответ:  
на рисунке представлен:  
Маршрут, Цепь, Цикл

## Задача № 10. Ответьте на вопросы

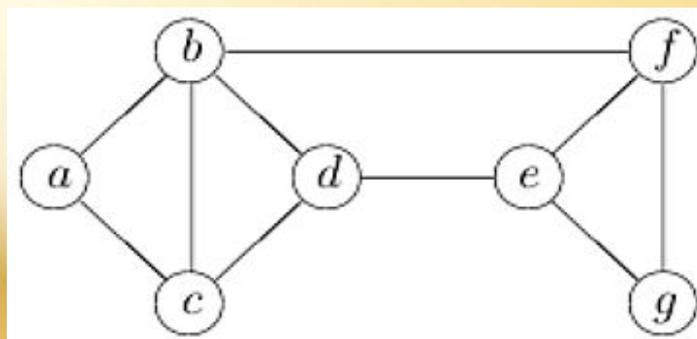


- 1) 2,3,5,4 - маршрут? **НЕТ**
- 2) 2,3,4,5,1,4,3- маршрут? **ДА** он же путь? **НЕТ**
- 3) 3,1,4,5,1,2- путь? **ДА** он простой? **НЕТ**
- 4) 2,3,1,4,3,1,2 - цикл? **НЕТ** маршрут? **ДА**
- 5) 2,3,1,4,5,1,2- цикл? **ДА** он простой? **НЕТ**
- 6) 2,3,4,5,1,2- цикл? **ДА** он простой? **ДА**

# РАССТОЯНИЯ И МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**Длиной** маршрута называется количество ребер в нем

**Расстоянием** между вершинами  $u, v$  (обозначается  $s(u,v)$ ) называется **наименьшая длина цепи**  $\langle u,v \rangle$



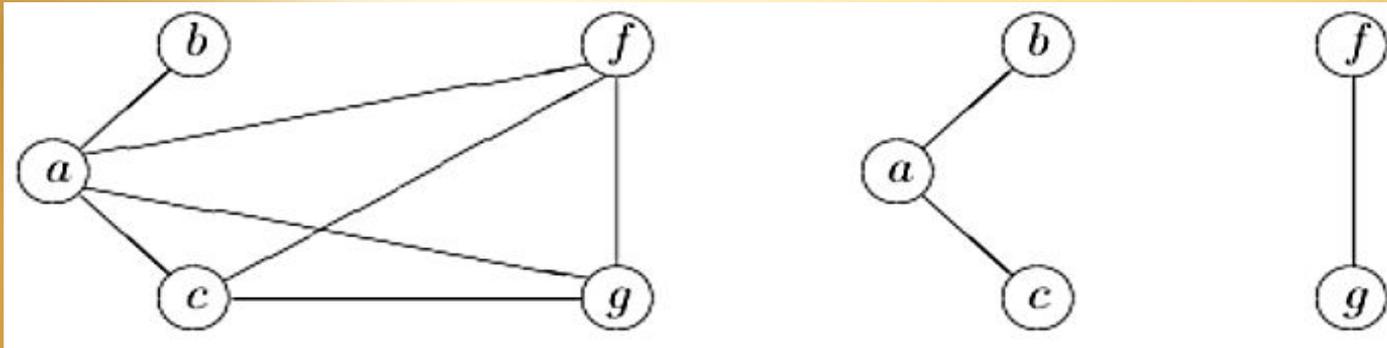
$s(a,d)=2$ , кратчайшая цепь, например,  $abd$ .

Определите расстояние  $s(a, f)$

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ

Две вершины в графе **связны**, если существует соединяющая их цепь (*отличаем от смежных!*)

**Граф называется связным**, если для любых двух его вершин имеется путь, соединяющий эти вершины (*из любой вершины можно попасть в любую*)

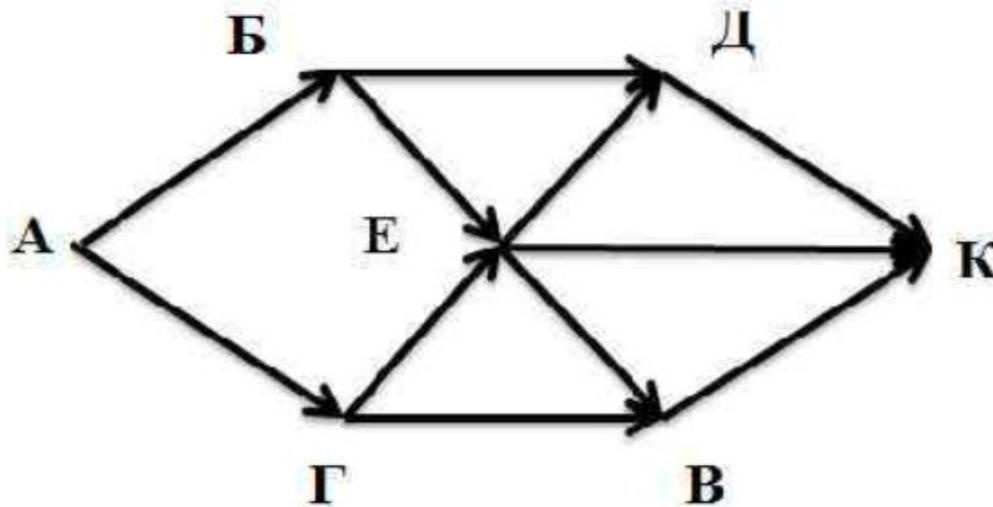


## Д/з. Задача 11.

Перенесите граф в тетрадь, запишите все возможные пути из А в К. Например: АГВК;...

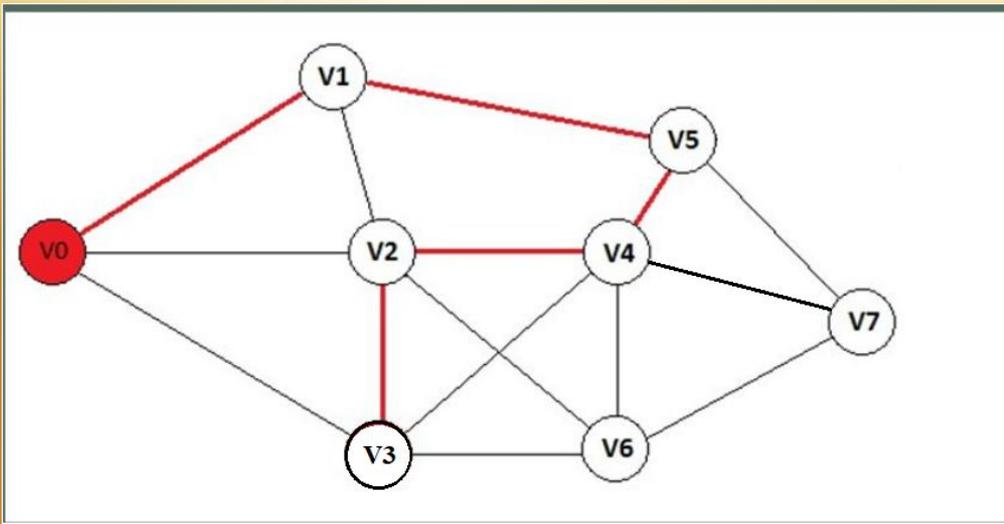
В ответ запишите количество всех возможных путей.

Сколько существует разных путей из пункта А в пункт К?



## Д/з. Задача 12.

Развозчик пиццы из города  $V_0$  должен доставить товар в 7 городов, которые соединены дорогами (схема на графе) и вернуться к себе в город. Начало его пути обозначено красной ломаной, продолжите его маршрутом красным цветом так, чтобы он являлся циклом.



### Подсказка:

нельзя проходить по тем же дорогам, можно проходить через те же вершины, вернуться нужно в  $V_0$ , направление движения покажите стрелками.

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ (до

**24.03):**

**Запишите в тетрадь ответы на вопросы:**

1. Что такое граф? Вершина графа? Ребро графа? Сделайте рисунок.
2. Что такое степень вершины? Сделайте рисунок.
3. Рассмотрите решение задач №4-№9, которые решаются с помощью графов. Запишите решение любых двух из них.
  
4. Что такое маршрут? В чем измеряется длина маршрута?
5. Что называется длиной маршрута? Расстоянием между вершинами?
6. Что такое путь? Чем он отличается от маршрута?
7. Что такое цепь? Простая цепь?
8. Что такое цикл? Простой цикл?  
К вопросам 4-8 сделайте рисунок (см. слайды 20 и 25).
9. Выполните письменно задачу №10 из презентации (слайд 24).
  
10. Какой граф называется связным? Сделайте рисунок.
  
11. Выполните письменно задачи 11 и 12 (см. слайды 27 и 28)

**Напоминание:**

**Получившие «2» за прошлую д/р (те, у кого не стоят отметки 04.03) сдают тетради с двумя конспектами не позднее 21.03)**