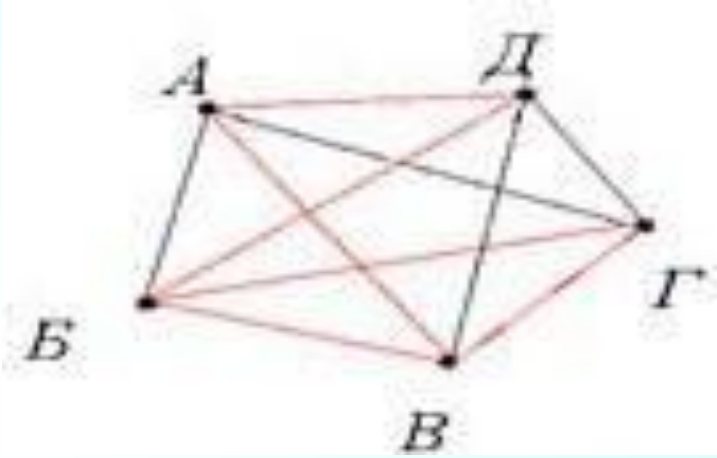
14.09.23
Пути в графе. Связные графы.

Графы, в которых построены все возможные ребра, называются полными графами



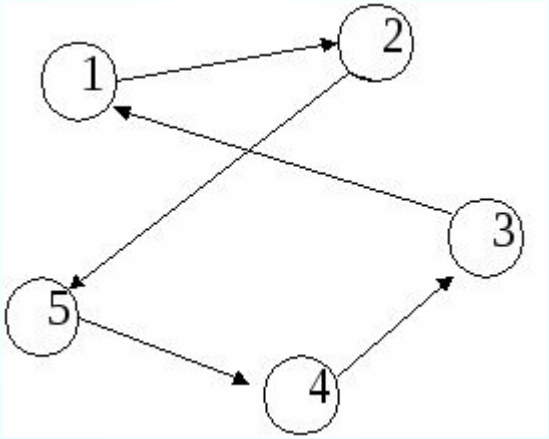
Основные понятия теории графов

Маршрутом в графе называется последовательность рёбер, в которой соседние рёбра имеют общую вершину. Первая вершина называется началом маршрута, последняя — концом.

Путём (или цепью) в графе называется маршрут, в котором нет повторяющихся рёбер. Если в пути нет повторяющихся вершин, его называют простым путём. Длина маршрута равна количеству рёбер в порядке их прохождения. Расстоянием между вершинами в графе называют длину кратчайшего пути от одной вершины до другой.

Граф-путь с 6 вершинами

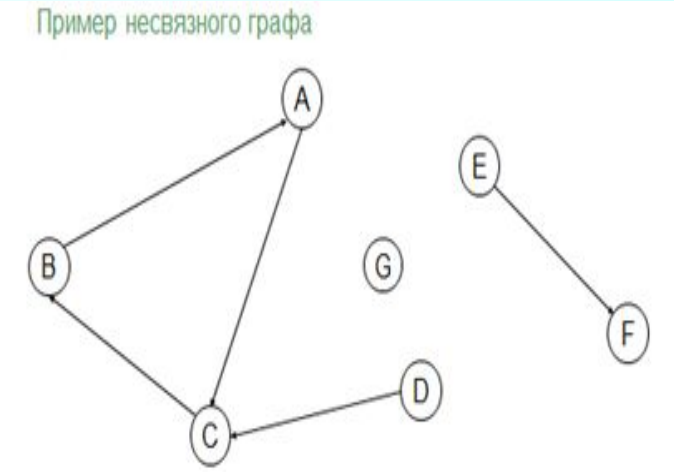
Цикл — это путь, у которого совпадают начало и конец. Если в цикле все вершины разные, его называют простым циклом. Если в цикле все рёбра разные, то такой цикл называется эйлеровым. Маршрут, содержа щий все рёбра или все вершины графа, называется обходом графа.



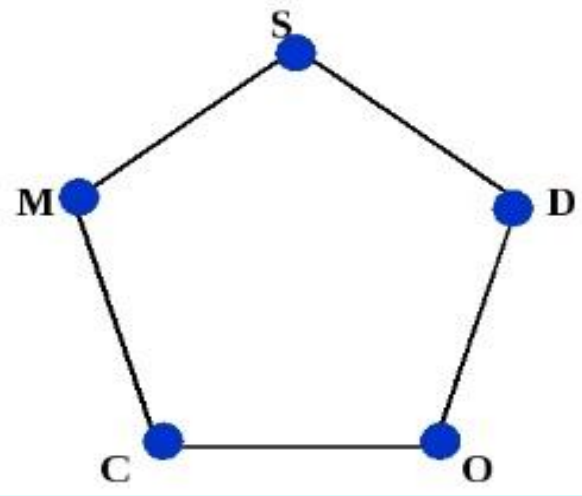
Цикл графа 1, 2, 5, 4, 3, 1

Виды графов

Несвязный граф – это граф, в котором существует хотя бы одна пара вершин, между которыми нет пути. Такие вершины называются несвязными. Например, на показанном графе несвязными вершинами является G и любая другая вершина данного графа.

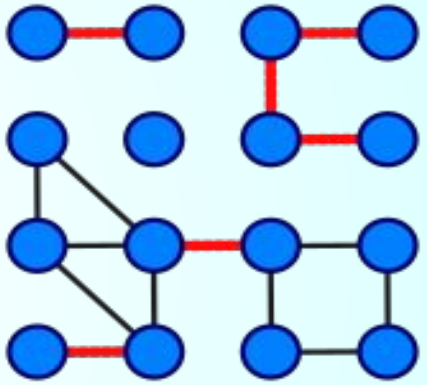


Связный граф – это граф, между любой парой которого существует хотя бы один путь.



Виды графов

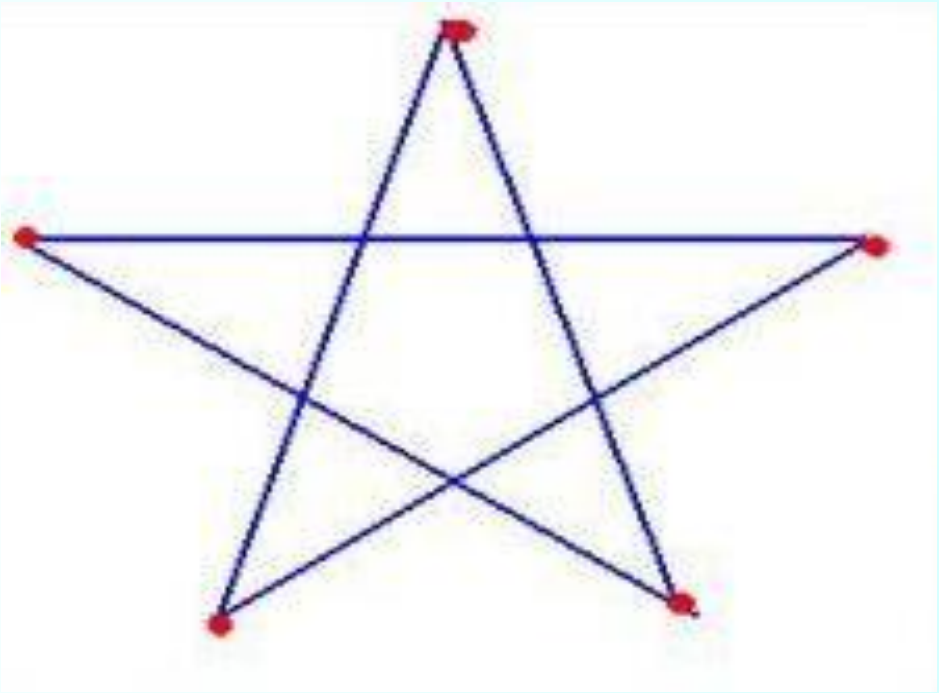
Если в связном графе после удаления ребра граф превратится в несвязный, такое ребро называют мостом. На рисунке граф с 6 мостами выделены красным.



Виды графов

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется эйлеровым.

Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

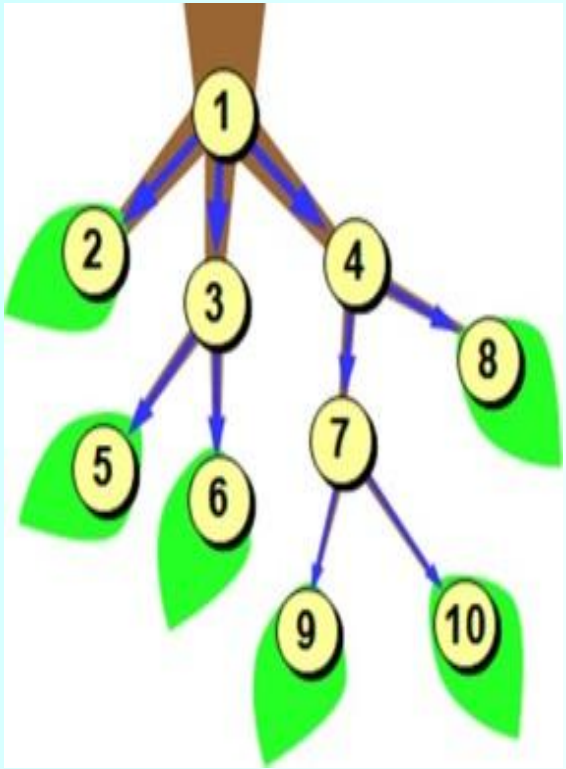


Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

Виды графов

- Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».
- Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и имеет не более двух нечетных вершин.

Виды графов



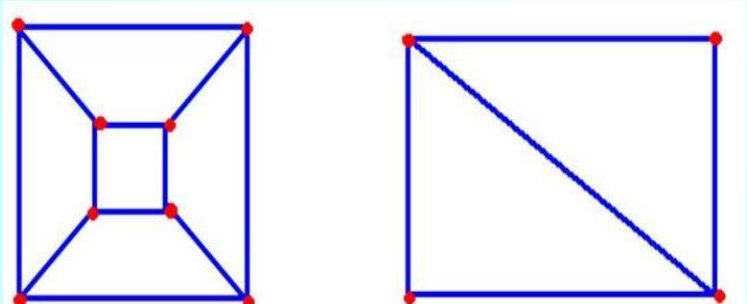
Особым видом графа является дерево. Деревом называется любой связный граф, не имеющий циклов.

В дереве нельзя вернуться в исходную вершину, двигаясь по рёбрам и проходя по одному ребру не более одного раза.

В дереве любые две вершины соединены ровно одним путём.

В дереве есть вершина, из которой выходит только одно ребро. Такая вершина называется висячей.

При удалении любого ребра из дерева граф становится несвязным.

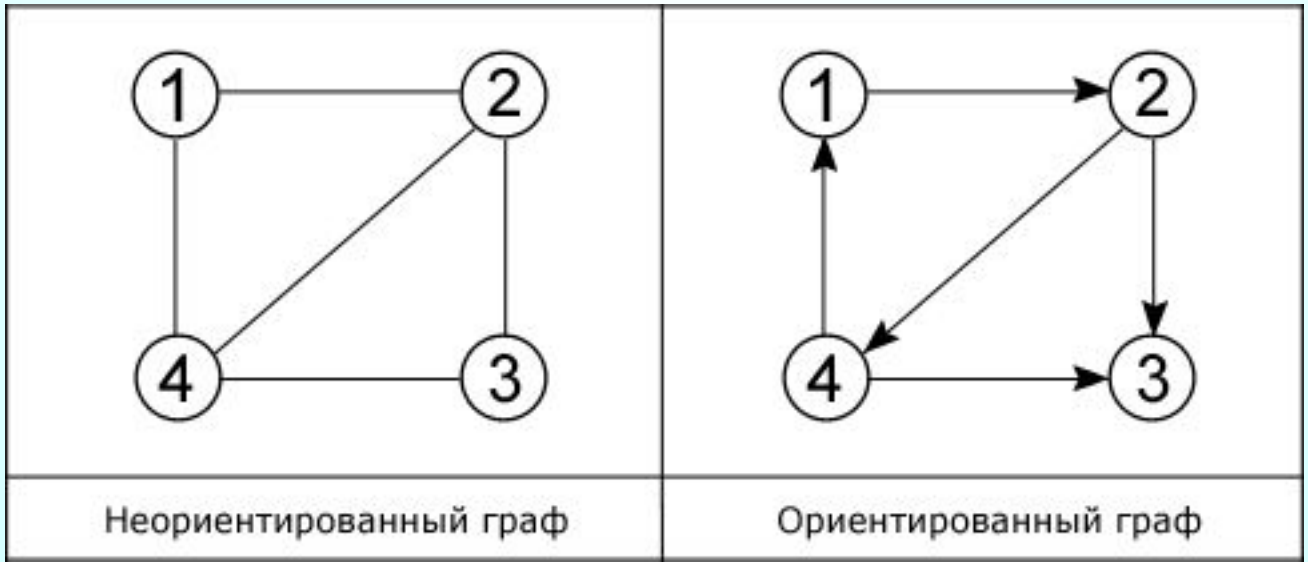


Плоским графом называют такой граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин.

Виды графов

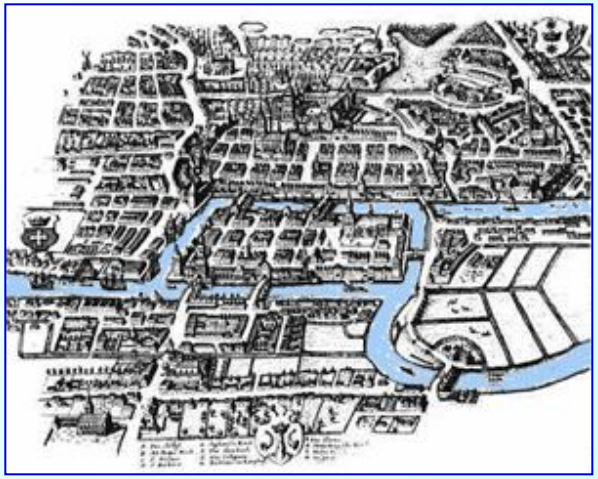
Ориентированный граф — это граф, рёбрам которого присвоено направление, т.е. нанесены стрелочки. Направленные рёбра именуются
также дугами, а в некоторых источниках и просто рёбрами.

Неориентированный граф — это граф, в котором все ребра являются неупорядоченными парами вершин, т.е. возможно прохождение из вершины в вершину в обоих направлениях.



Задача о Кенигсбергских мостах

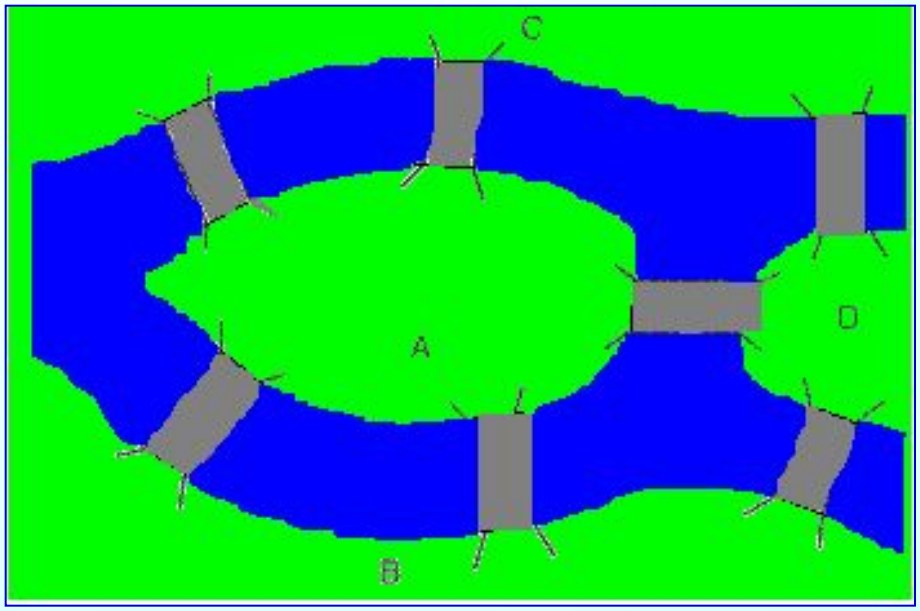
Бывший *Кенигсберг (ныне Калининград)* расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



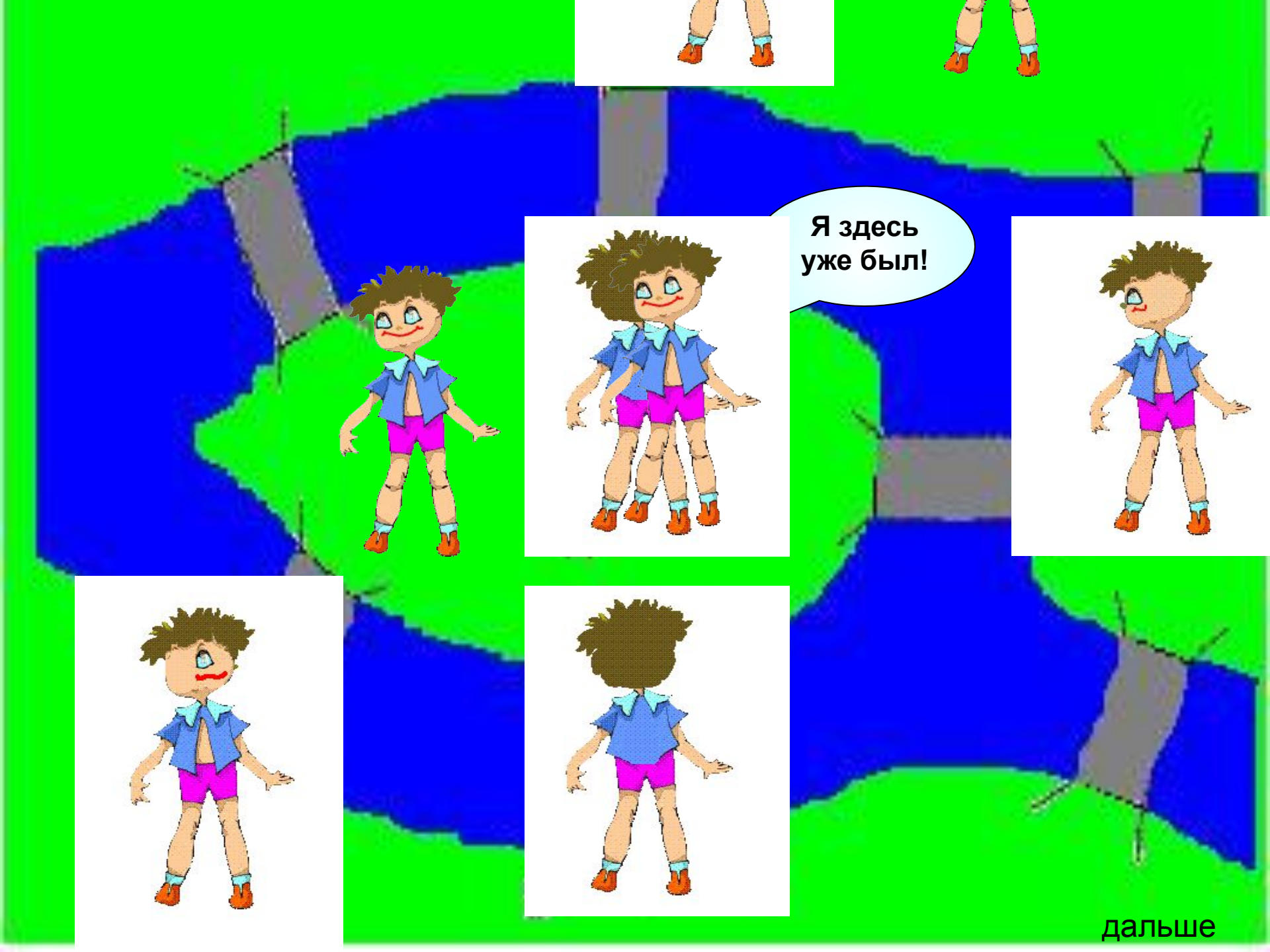
Дальше

Задача о Кенигсбергских мостах

Кенигсбергцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причём на каждом мосту следовало побывать только один раз.

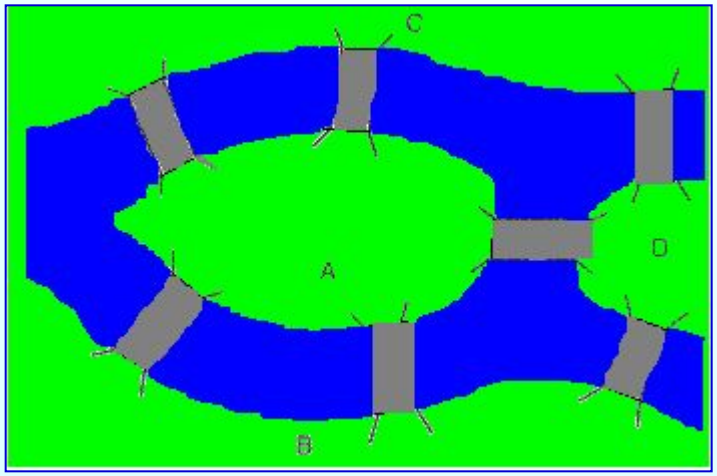


Дальше


Я здесь уже был!
дальше

Задача о Кенигсбергских мостах

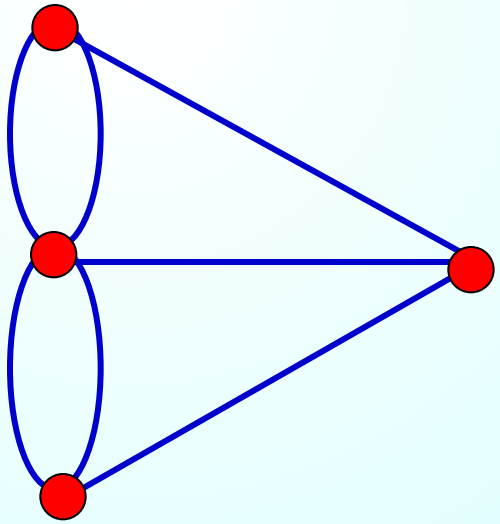
Пройти по Кенигсбергским мостам, соблюдая заданные условия, нельзя. Прохождение по всем мостам при условии, что нужно на каждом побывать один раз и вернуться в точку начала путешествия, на языке теории графов выглядит как задача изображения «одним росчерком» графа.



дальше

Задача о Кенигсбергских мостах

Но, поскольку граф на этом рисунке имеет четыре нечетные вершины, то такой граф начертить «одним росчерком» невозможно.



содержание

Одним росчерком

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется ***эйлеровым***.

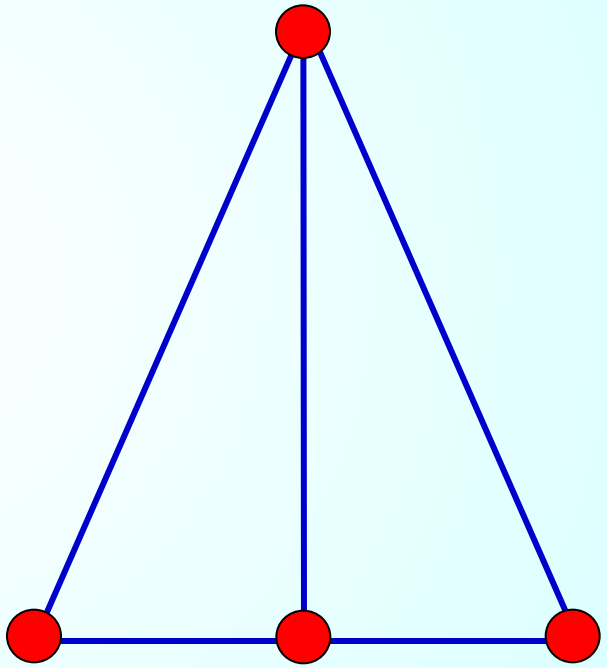
Решая задачу О кенигсбергских мостах, Эйлер сформулировал свойства графа:

Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

дальше

Одним росчерком

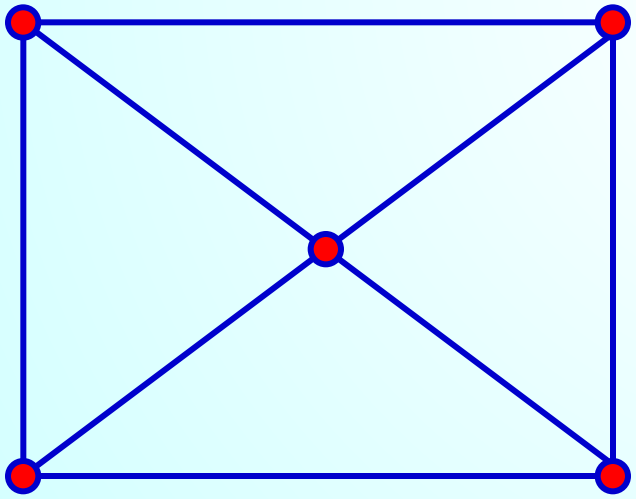
Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

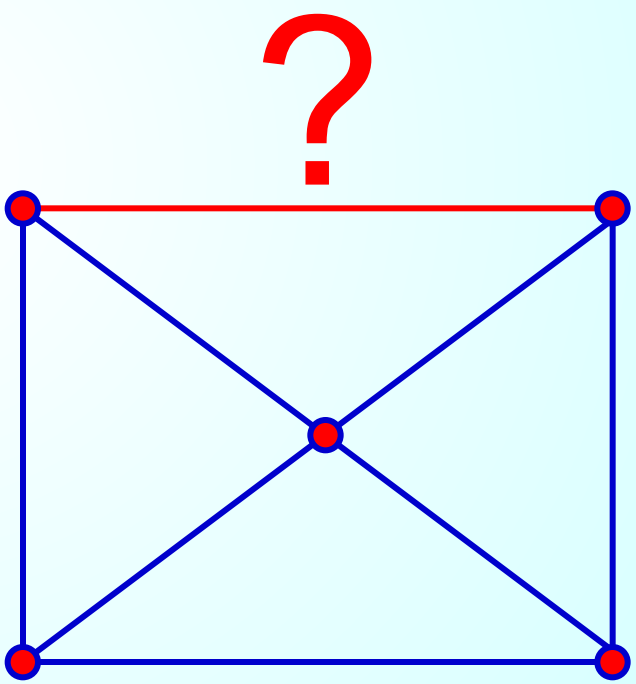


дальше

Одним росчерком

Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».





содержание

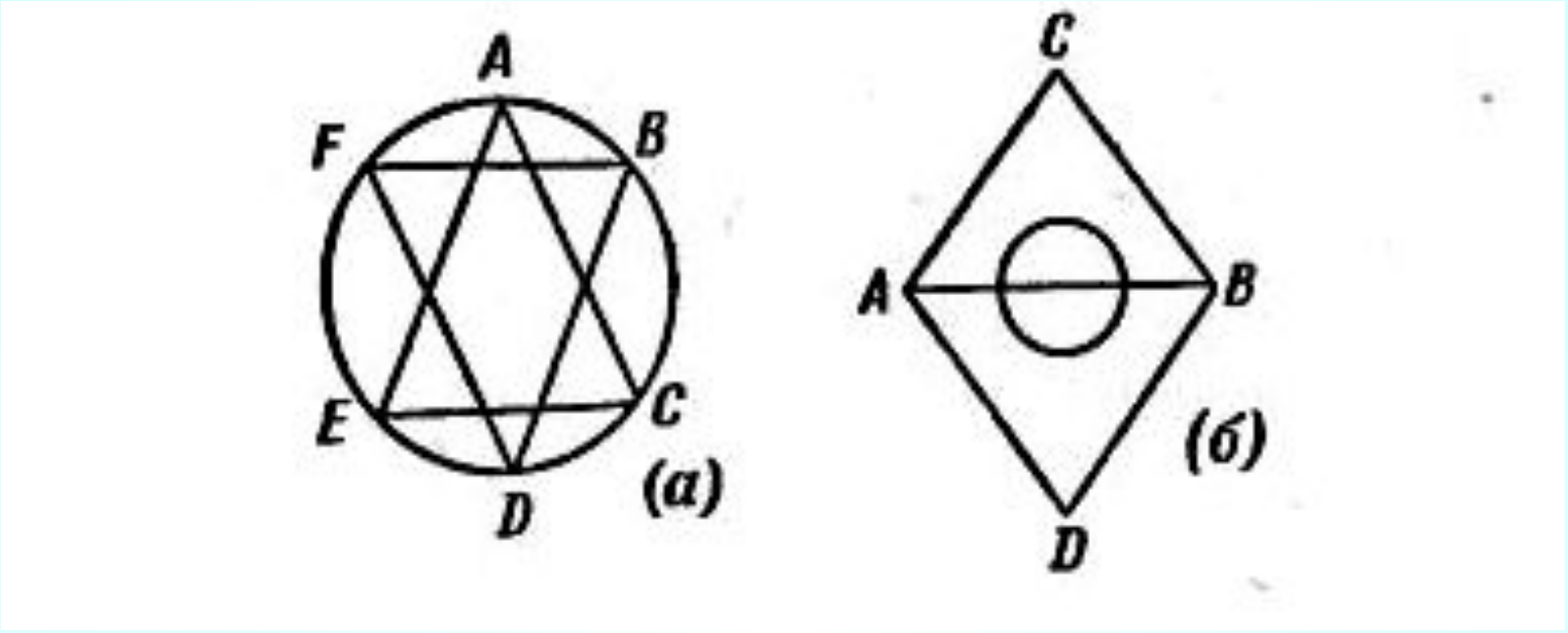


Рис. 155. Попробуйте зачертить каждую фигуру одним росчерком, не проводя более одного раза по одной и той же линии.

Задачи

142 **Какими** цифрами на рисунке 36 обозначены эйлеровы графы?

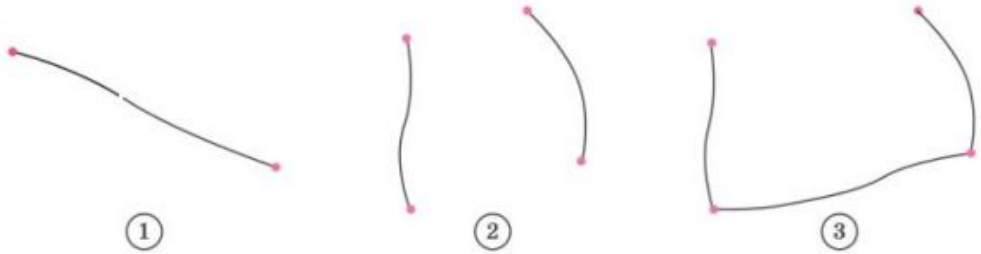


Рисунок 36

143 **Какими** цифрами на рисунке 37 обозначены эйлеровы графы?

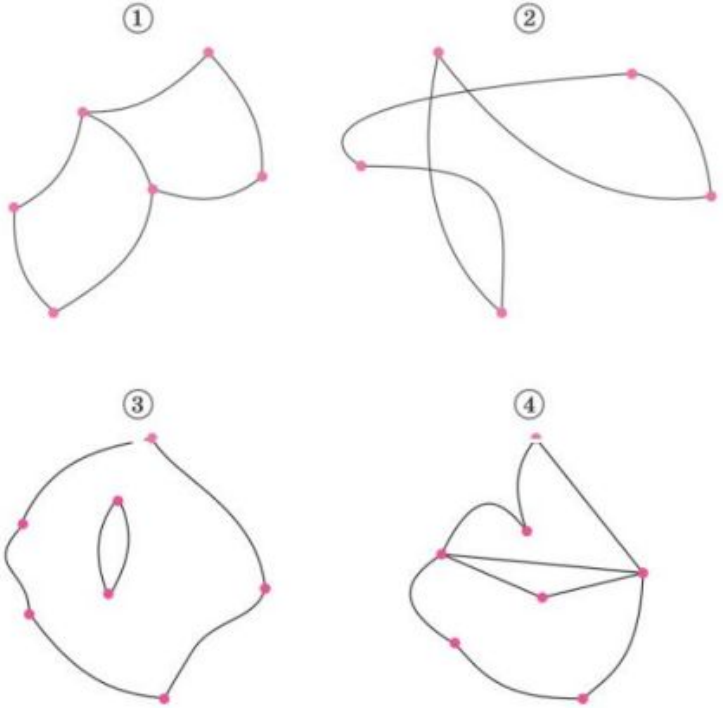
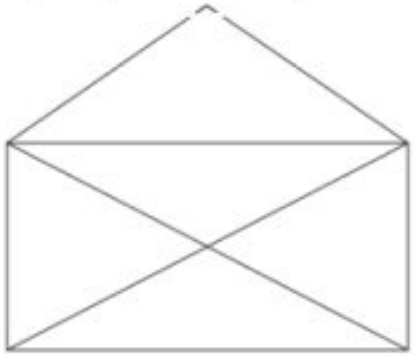


Рисунок 37

144 **Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды, нарисуйте фигуры, изображённые на рисунке 38.**

а) Открытый конверт



б) Квадраты Льюиса Кэрролла

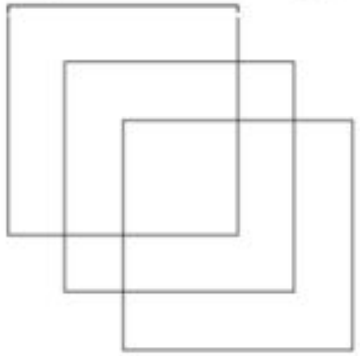
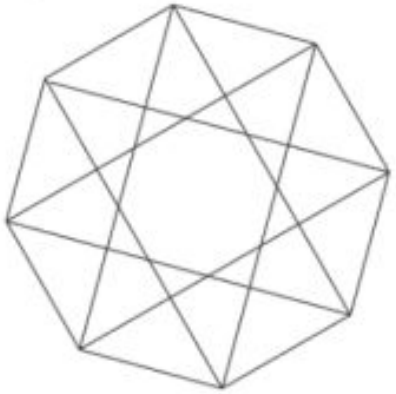


Рисунок 38

145 **Придумайте способ обвести фигуру, изображённую на рисунке 39, одним росчерком (не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды).**

а)



б)

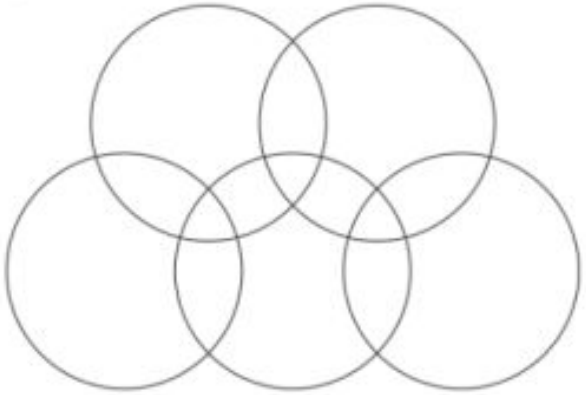


Рисунок 39

147 В Изумрудном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются.

а) Начертите возможный план Изумрудного города.

б) Можно ли устроить экскурсию по всем улицам и площадям Изумрудного города, не проходя ни по одной улице дважды?