Дифференциальное исчисление

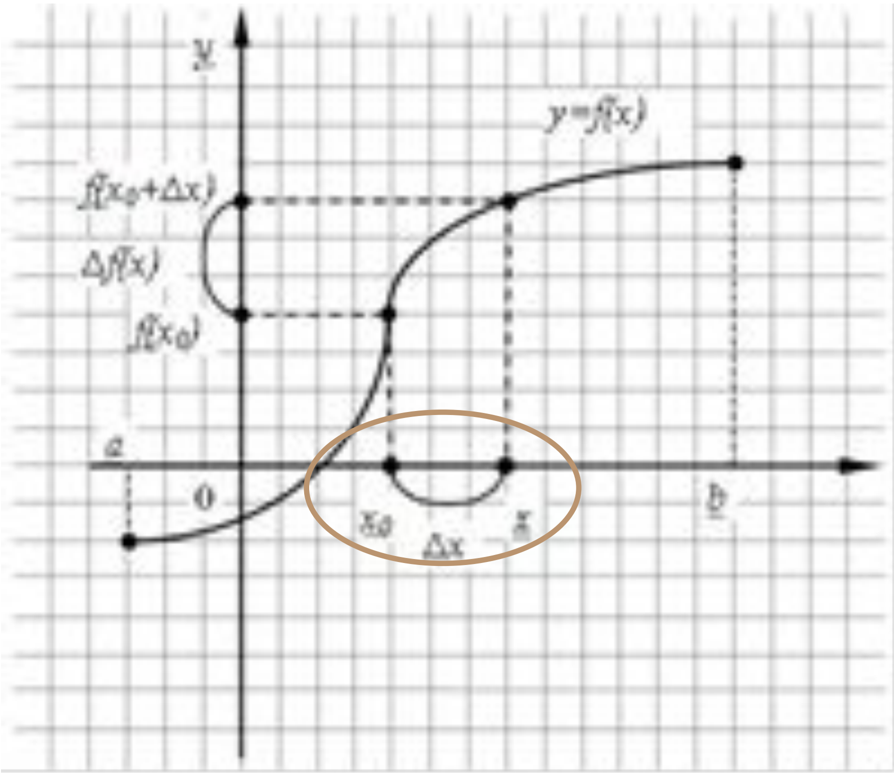
Студент должен знать

ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ*

* Федеральный государственный стандарт среднего профессионального образования по специальности 060501 Сестринское дело

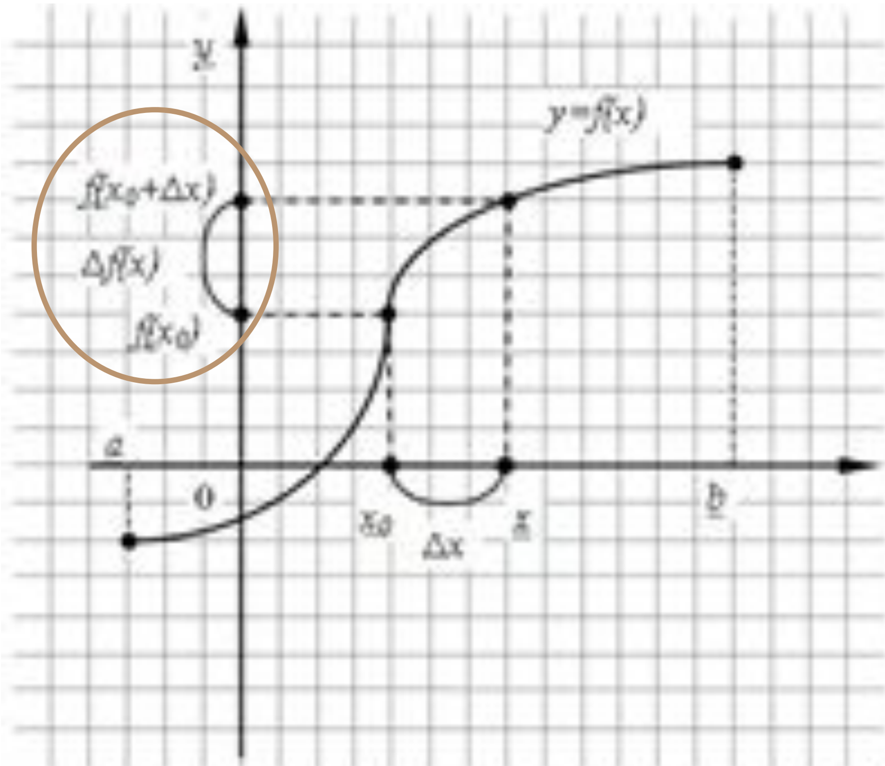
Понятие ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Приращение аргумента



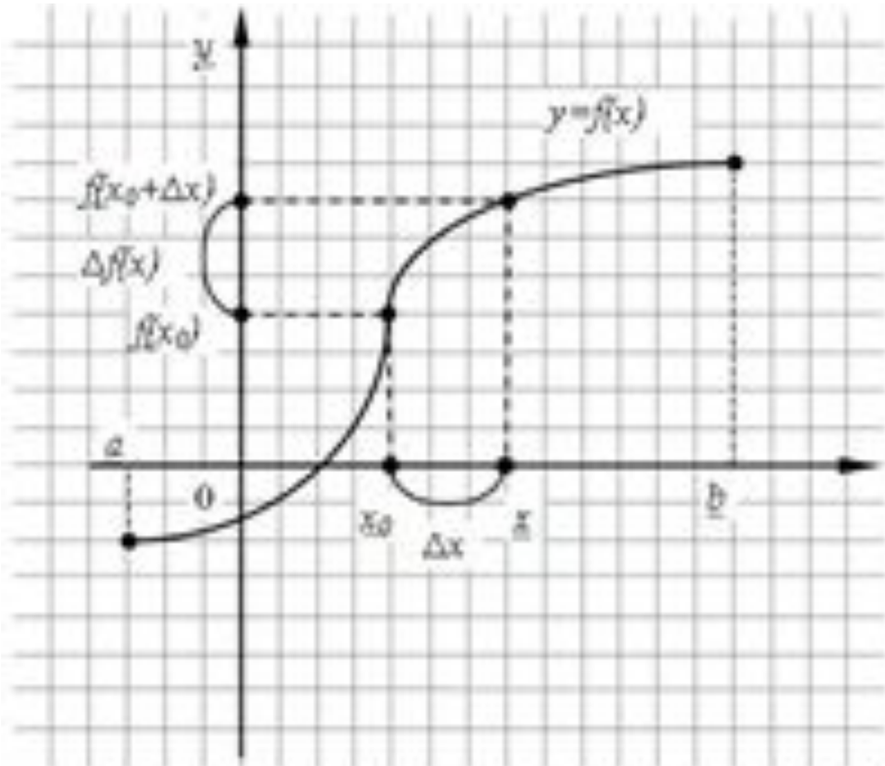
- Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением независимой переменной.*
- Тогда: $x = x_0 + \Delta x$.

Приращение функции



$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

Производная функции в точке:



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

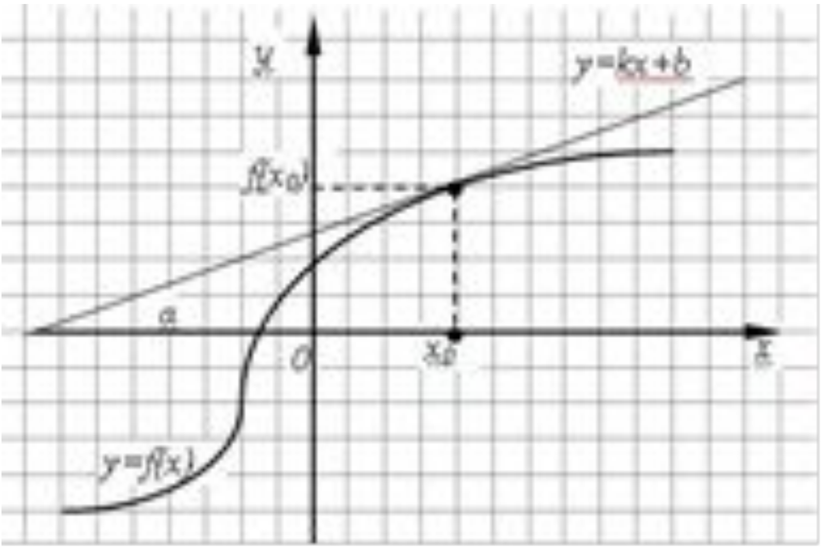
Производная функции

1. $\left(y = f(x),\ x = x_0,\ \exists f'(x_0)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0)

2. Если $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке x из интервала X, то она называется дифференцируемой на интервале X.

Геометрический смысл производной



- Угловой коэффициент:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

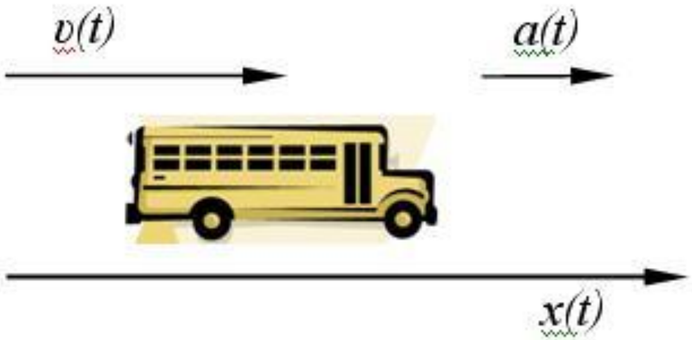
- Уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

- Уравнение линейной функции:

$$y = k\cdot x + b$$

Физический смысл производной



- Координата тела: *x(t);*
- Скорость тела:

$$\upsilon(t) = x'(t)$$

- Ускорение тела:

$$a = \upsilon'(t) = \left(x'(t)\right)' = x''(t)$$

Таблица производных

Степенная функция

$$C' = 0$$

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x' = 1$$

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

Тригонометрические функции

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Показательная и логарифмическая функции

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Правила дифференцирования

Производная суммы (Т1)

$$(u+v)' = u' + v'$$

Вынос множителя за знак производной (С1)

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

Производная произведения (Т2)

$$(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'$$

Производная частного (Т3)

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon'}{\upsilon^2}, \upsilon \neq 0$$

Сложная функция
и её дифференцирование

Сложная функция

$y = u(v)$ – сложная функция;

$v = v(x)$ – сложный аргумент.

Сложная функция $y = \sin x^2$

$$y = u(\upsilon) = \sin \upsilon$$

– сложная тригонометрическая функция;

$$\upsilon(x) = x^2$$

– сложный аргумент, квадратичная функция.

Производная сложной функции (T4)

$$\left(u\left(\upsilon\right)\right)' = u'\left(\upsilon\right)\cdot\upsilon'$$

Прим. 1. Найти производную функции: $y = 2^x + 3\cos x - 4x^7$

$$y' = \left(2^x + 3\cos x - 4x^7\right)' =$$

$$= \left(2^x\right)' + \left(3\cos x\right)' - \left(4x^7\right)' =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \left(\cos x\right)' - 4 \cdot \left(x^7\right)' =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 + 3\left(-\sin x\right) - 4 \cdot 7x^6 =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 - 3\sin x - 28x^6.$$

Прим. 2. Найти производную функции: $y=\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^3+2x\right)$

$$y'=\left(\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^3+2x\right)\right)'=$$

$$=\left(x^2-3\right)'\cdot\left(x^3+2x\right)+\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^3+2x\right)'=$$

$$=\left(2x-0\right)\cdot\left(x^3+2x\right)+\left(x^2-3\right)\cdot\left(3x^2+2\cdot 1\right)=$$

$$=2x\left(x^3+2x\right)+\left(x^2-3\right)\cdot\left(3x^2+2\right)=$$

$$=2x^4+4x^2+3x^4+2x^2-9x^2-6=$$

$$=5x^4-3x^2-6.$$

Прим. 3. Найти производную функции: $y=\dfrac{x^2-3}{x^3+2x}$

$$y'=\left(\frac{x^2-3}{x^3+2x}\right)'= \quad =\frac{\left(x^2-3\right)'\left(x^3+2x\right)-\left(x^2-3\right)\left(x^3+2x\right)'}{\left(x^3+2x\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\left(x^3+2x\right)-\left(x^2-3\right)\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+4x^2-3x^4-2x^2+9x^2+6}{\left(x^3+2x\right)^2}= \quad =\frac{-x^4+11x^2+6}{\left(x^3+2x\right)^2}.$$

Прим. 4. Найти производную функции: $y=\sqrt{3x^3-5x}$

$$y'=\left(\sqrt{3x^3-5x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3x^3-5x}}\cdot\left(3x^3-5x\right)'=$$

$$=\frac{9x^2-5}{2\sqrt{3x^3-5x}}.$$

Дифференциал функции

Дифференциал функции

По определению производной: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ – бесконечно малая величина.

При $\Delta x \to 0$: $\Delta x = dx$ – *дифференциал аргумента*.

Дифференциал аргумента – очень малое его приращение.

Аналогично:

При $\Delta x \to 0$: $\Delta f(x) \to 0$ – бесконечно малая функция.

При $\Delta x \to 0$: $\Delta f(x) = df(x)$ – *дифференциал функции*.

или: при $\Delta x \to 0$: $\Delta y \to 0$), $\Delta y = dy$

Дифференциал функции – очень малое её приращение.

Производная функции

Тогда:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

(читаем: «дэ эф от икс **по** дэ икс»).

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

(читаем: «дэ игрек **по** дэ икс») или:

Дифференциал функции

Итак,:

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{dy = y' \cdot dx}$$

Найти дифференциал функции $y = x^3$.

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}$$

$$dy = y'dx = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx$$

Ответ: $dy = 3x^2 dx$

Приближенные вычисления

Формула для приближённых вычислений

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x)$$

Если Δx – малая величина, то *Δx = dx* и *Δf(x) = df(x)*

$$f(x) = f(x_0 + dx) = f(x_0) + df(x)$$

$$df(x) = f'(x)dx \Rightarrow \quad f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

Вычислить: $3{,}003^5$.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

Рассмотрим функцию: $f(x)=x^5$

Так как *x* = *3,003*, то $x_0=3;\ \Delta x=x-x_0=3{,}003-3=0{,}003.$

$$f'(x)=\left(x^5\right)'=5x^4;\qquad f'(3)=5\cdot 3^4=5\cdot 81=405;$$

$$f(3)=3^5=241.$$

$$f(3{,}003)\approx 241+405\cdot(0{,}003)=241+1{,}209=242{,}209.$$

Вычислить: $2{,}996^5$.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$f(x)=x^5;$$

$$x_0=3;\;\;\Delta x=2{,}996-3=-0{,}004.$$

$$f'(x)=\left(x^5\right)'=5x^4;\qquad f'(3)=5\cdot3^4=5\cdot81=405;$$

$$f(3)=3^5=241.$$

$$f(2{,}996)\approx241+405\cdot(-0{,}004)=241-2{,}0251=$$

$$=238{,}9749\approx238{,}975.$$

Частные случаи приближённых вычислений

n-я степень числа x≈1

$$\boxed{x^n = (1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha}$$

$$\alpha = x - 1 \qquad 0 < |\alpha| << 1$$

Корень n-й степени числа x≈1

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha}$$

$$\alpha = x - 1 \qquad 0 < |\alpha| << 1$$

Вычислить: $1{,}003^5$.

$$x^n = (1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$$

$$\alpha = 1{,}003 - 1 = 0{,}003\,, \quad n = 5$$

$$1{,}003^5 = (1 + 0{,}003)^5 \approx$$

$$\approx 1 + 5 \cdot 0{,}003 = 1 + 0{,}015 = 1{,}015.$$

Вычислить: $\sqrt[4]{0,996}$

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{n}\alpha$$

$$\alpha=0,996-1=-0,004,\ \ n=4$$

$$\sqrt[4]{0,996}=\sqrt[4]{1+\left(-0,004\right)}\approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{4}\cdot\left(-0,004\right)=1-0,001=0,999.$$

Итоги

- Определение производной;
- Таблица производных;
- Правила дифференцирования;
- Дифференциал функции;
- Приближённые вычисления с помощью дифференциала.