

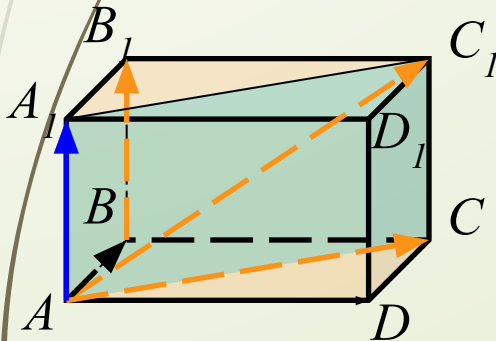
Компланарные векторы в пространстве



Определение компланарных

векторов
Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

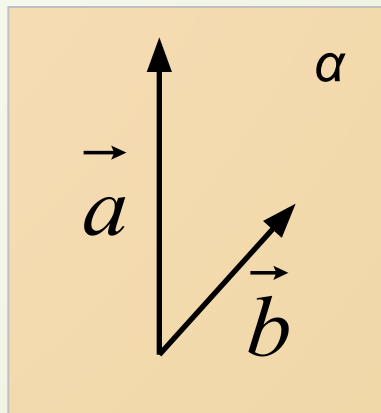
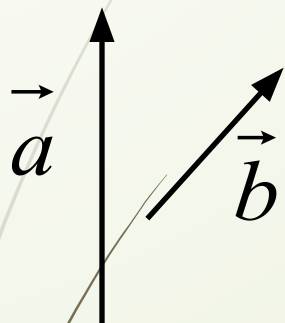
Пример:



$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – компланарны, т.к.
 $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, а векторы $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA₁C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



$$\vec{a} \in \alpha$$

$$\vec{b} \in \alpha$$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ –

компланарны

если

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство

Задачи на компланарность

1) Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

Справка

Решение

2) Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.
Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Справка

Решение

Решение

а) векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны

Решение

а) если векторы $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны,
то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом,
значит векторы компланарны

Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

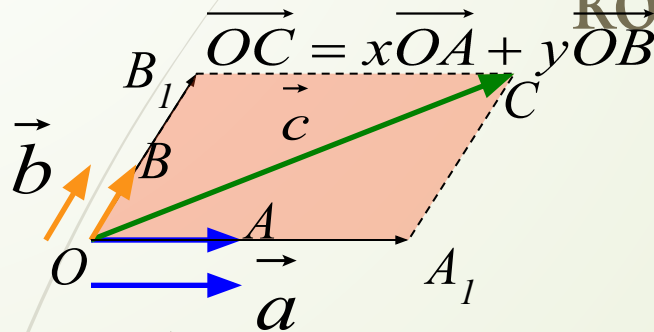
$$\vec{a}(1 - x) + \vec{b}(1 - 2y) + \vec{c}(-2x + 3y) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - 2y = 0 \\ 3y - 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны

Доказательство признака компланарности



Дано :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

x, y – некоторые числа

Доказать :

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны

Доказательство :

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – не коллинеарны

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA_1}, \vec{OB_1} \in (OAB)$$

$$\vec{OA_1} = x \cdot \vec{OA}, \vec{OB_1} = y \cdot \vec{OB} \Rightarrow$$

$$\vec{OC} = \vec{c} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны ч.т.д

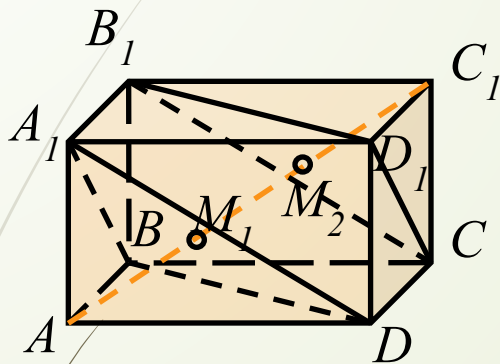
Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Задача 1. Задача на доказательство



Решение

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – δ

M_1, M_2 – точки пересечения

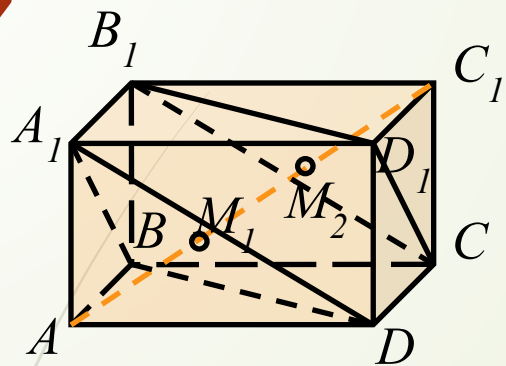
медиан $\triangle A_1 B D$ и $\triangle D_1 C B_1$

соответственно

Доказать :

$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Решение



Доказательство :

Рассм. тетраэдр AA_1BD

M_1 – центр оид $\triangle AA_1B$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар – да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1, AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1, C_1M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

следовательно $AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$ ч.т.д.

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д

M_1, M_2 – точки пересечения
медиан $\triangle A_1 BD$ и $\triangle D_1 CB_1$

соответственно

Доказать :

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$$