Теория вероятностей и математическая статистика

Лекции

Южно-Уральский государственнаый аграрный университет

- Лектор: кандидат физико-математических наук, профессор РАЕ
- Завьялов Олег Геннадьевич

Теория вероятностей

Тема 1. Случайные события. Основные понятия. Алгебра событий. Частота и ее свойства. Вероятность события. Классическая формула. Основные теоремы. Геометрическая вероятность.

Теория вероятностей -

раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при массовых повторениях испытаний

Литература

1. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-Пресс.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика., М.: Высшая школа.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа.

Основные понятия теории вероятностей

Испытание (опыт)	Осуществление некоторого комплекса условий (, или действие, результат которого заранее неизвестен)
Событие	Всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти

События обозначаются обычно большими латинскими буквами **A, B, D, F ...**

Классификация событий

Достоверное - событие, которое при повторении опыта **обязательно** произойдет

- обычно обозначатся - **Ω**

Невозможное - событие, которое при повторениях опыта никогда не происходит

- обычно обозначается **Θ**

Случайное -

событие, которое при повторении опыта иногда происходит, иногда нет

- обычно обозначается - **A, B, C, D ...**

Взаимосвязь событий

Совместные события	События A и B совместны, если появление одного из них не исключает появление другого. Несколько событий совместны, если совместны хотя бы 2 из них
Несовместные события	События A и B несовместны, если появление одного из них исключает появление другого. Несколько событий несовместны, если они попарно несовместны
Зависимые события	События A и B зависимы, если появление события B зависит от появления события A.

Взаимосвязь событий

Независимые события	События А и В независимы, если появление одного из них никак не влияет на возможность появления другого.
Равновозможные события	События в опыте называются равновозможными, если условия их появления одинаковы и нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое
Элементарные события	Если события А, В, С, … не могут быть выражены через более простые события их называют ***элементарными событиями*** (элементарными исходами)

Взаимосвязь событий

Полная группа событий -

несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

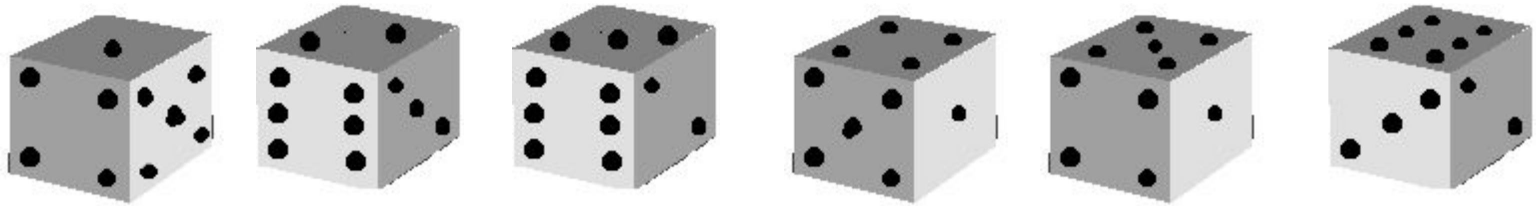
Противоположные события -

2 несовместных события , образующих полную группу событий

Пример 1:

Опыт - бросание игральной кости

События:



A_1 **A_2** **A_3** **A_4** **A_5** **A_6**

B - выпадение четного числа очков

C - выпадение более 7 очков

D - выпадение не менее 3 очков

E - выпадение не более 6 очков

F - выпадение не менее 1 очка

Анализ событий опыта:

E - невозможное событие

F - достоверное событие

A_1 - A_6 - элементарные события

A_1 - A_6 - полная группа несовместных равновозможных событий

B, C, D - можно выразить через более простые (элементарные) события

Например:

B - наступит либо A_2, либо A_4, либо A_6

Алгебра событий

<u>Сумма (объединение)</u> событий $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ **-**

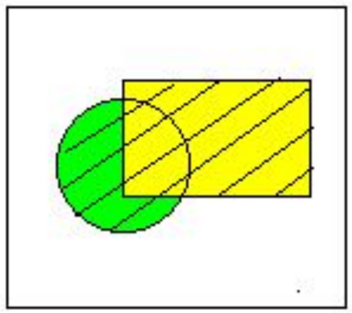
событие, состоящее в появлении <u>хотя бы одного</u> из этих событий

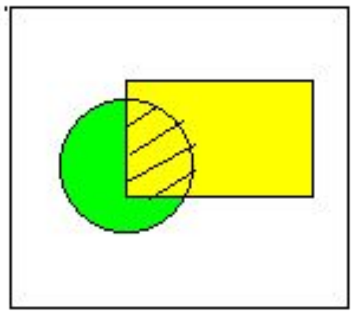
Обозначение: $\mathbf{A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$

Произведение (пересечение) событий $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ **-**

событие, состоящее в появлении <u>всех</u> этих событий

Обозначение: $\mathbf{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$





$A+B=A\cup$ $\quad$ $A \bullet B = A\cap B$

Пример 2:

Опыт - два выстрела по мишени

Обозначим

A_1 -попадание в мишень при первом выстреле

A_2-попадание в мишень при втором выстреле

Сформулируйте события:

$$B=A_1+A_2,\ \ C=\bar{A}_1+\bar{A}_2,\ \ D=A_1A_2,\ \ E=\bar{A}_1A_2+\bar{A}_1A_2$$

*

Решение примера:

$B=A_1+A_2$ - хотя бы одно попадание,

$C=\overline{A}_1+\overline{A}_2$ - хотя бы один промах,

$D=A_1 \cdot A_2$ - попадание в цель дважды,

$E=A_1 \cdot \overline{A}_2+\overline{A}_1 \cdot A_2$ - ровно одно попадание.□

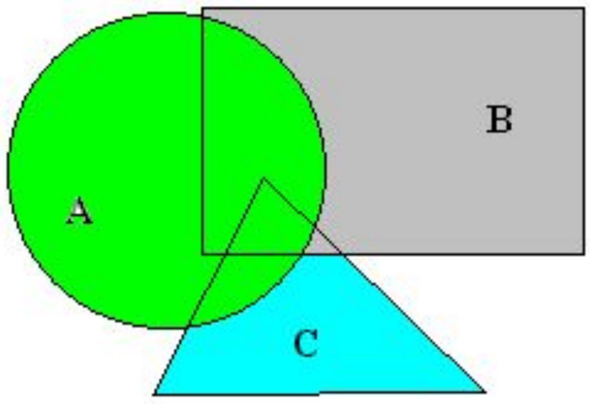
Задание1: Найдите 1) $A+\Omega$, 2) $A+\Theta$, 3) $A+A$, 4) $A \cdot A$, 5) $A \cdot \Omega$, 6) $A\Theta$, 7) $A+\overline{A}$, 8). $A\overline{A}$

Задание2: Два студента выполняют независимо друг от друга задание. Запишите через элементарные события следующие события:

- **оба студента выполнят задание;**
- **только один из них выполнит задание;**
- **хотя бы один из них выполнит задание**

Задание3: доказать, что $A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$ и $A+B \cdot C=(A+B) \cdot (A+C)$.

Указание: Доказательство проведите геометрически с использованием чертежа



$0 \le \frac{m}{n} \le 1$

Частота события и ее свойства

Если опыт воспроизведен n раз, а событие А произошло m раз, то **частотой (относительной частотой)** события А назовем

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

т.е. отношение числа испытаний, в которых появилось событие А, к числу всех испытаний.

Свойства частоты.

1) $0 \le P^*(A) \le 1$, так как $0 \le m \le n$, следовательно, $0 \le \frac{m}{n} \le 1$

2) $P^*(\Omega)=1$, так как $m=n$.

3) $P^*(\Theta)=0$, так как $m=0$.

4) $P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B)-P^*(A \cdot B)$.

Доказательство:

Пусть опыт повторен n раз, причем событие A появилось m_1 раз, событие B появилось m_2 раза, вместе A и B появились при этом m_3 раза. Тогда

$$P^*(A+B)=\frac{m_1+m_2-m_3}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m_3}{n}=P^*(A)+P^*(B)-P^*(A\cdot B)$$

Условной частотой события В относительно события А, обозначение $P^*(B/A)$, назовем частоту события В при условии, что событие А уже произошло,

это число равно отношению числа опытов N_{AB}, в которых произошли события А и В одновременно, к числу опытов N_A, в которых появилось событие А, т.е.

$$P^*(B/A) = \frac{N_{AB}}{N_A}$$

5) $P^*(A \cdot B)=P^*(A) \cdot P^*(B/A)$.

Доказательство:

Пусть опыт повторен n раз, событие A при этом появилось m_1 раз, событие B появилось m_2 раза, вместе A и B появились m_3 раза. Тогда

$$P^*(A \cdot B) = \frac{m_3}{n} = \frac{m_3 \cdot m_1}{n \cdot m_1} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_3}{m_1} = P^*(A) \cdot P^*(B/A).$$

Аналогично, можно доказать, что $P^*(A \cdot B)=P^*(B) \cdot P^*(A/B)$.

Частота случайного события обладает **свойством устойчивости,** т.е. при увеличении числа опытов значения частоты события группируются около некоторого числа, характеризующего возможность появления данного события в данном опыте.

Таким образом, мы приходим к понятию вероятности события в данном опыте.

Вероятность события. Аксиомы теории вероятностей

Вероятностью P(A) события A в опыте назовем численную меру объективной возможности появления события A в данном опыте.

Основные аксиомы:

Аксиома1. Вероятность любого **события A есть число P(A), удовлетворяющее неравенствам**

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(\Theta)=0$.

Классическая формула

События $E_1, E_2, ..., E_n$ называются **случаями** в опыте, если

- они образуют **полную группу событий**, т.е. $E_1+E_2+...+E_n=\Omega$;
- **несовместны**, т.е. $E_i \cdot E_j=\Theta$, где $i \neq j$;
- **равновозможны**.

Случай называется **благоприятным** событию А, если появление этого случая влечет появление события А. Пусть в данном опыте благоприятными событию А являются случаи $E_1, E_2, ..., E_m$, т.е. $A= E_1 + E_2 +... + E_m$. Покажем, что

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m - число благоприятных событию А случаев, n - число всех случаев в данном опыте.

Действительно, $P(E_1+E_2+...+E_n)=P(\Omega)=1$, так как события несовместны, то

$$P(E_1) + P(E_2) +...+ P(E_n) =1 \qquad (1).$$

По условию события равновозможны, следовательно,

$$P(E_1) = P(E_2) =...= P(E_n) \qquad (2).$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $P(E_1)=P(E_2) =\ldots =P(E_n) = \frac{1}{n}$

Найдем

$$P(A) = P(E_1 + E_2 +... + E_m) = P(E_1)+P(E_2)+...+P(E_m) = \frac{m}{n}$$

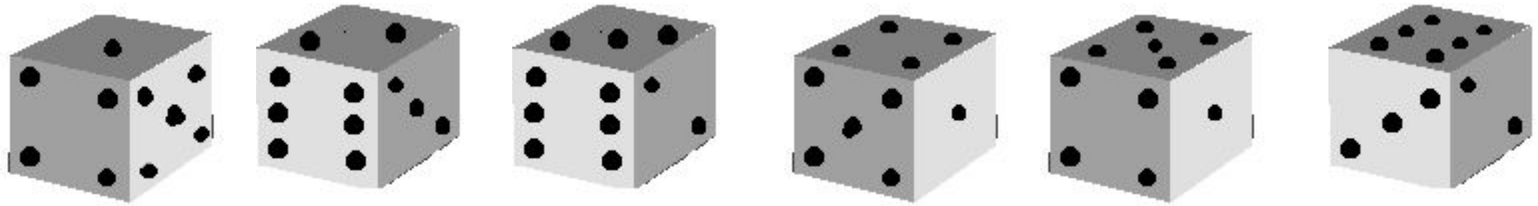
Пример 4:

Опыт - бросание игральной кости

Событие А - выпадение числа очков, кратного 3.

Найдем вероятность события А.

Решение:



A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6

Всего случаев 6. Благоприятных из них 2, следовательно, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Элементы комбинаторики

Имеется совокупность *n* объектов, назовем ее **генеральной совокупностью**. Из генеральной совокупности наудачу отбираем *m* объектов, эту отобранную совокупность назовем **выборкой**.

Выборка может быть **упорядоченной,** если порядок объектов (элементов) играет роль, и может быть **неупорядоченной,** если порядок элементов роли не играет.

Выборка может быть **без повторений**, если элементы повторяться не могут, и может быть **с повторениями,** если элементы в выборке повторяются.

Например, телефонный номер 260-61-51 - упорядоченная выборка с повторениями из десяти цифр по шести.

Упорядоченная выборка из n элементов по m называется ***размещением,*** *неупорядоченная выборка из n элементов по* m называется **сочетанием.** Число размещений и сочетаний с повторениями и без повторений из *n* элементов по *m* можно найти из следующей таблицы.

Выборка	Упорядоченная	Неупорядоченная
Без повторений	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$
С повторениями	$\overline{A}_n^m = n^m$	$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$

$$\mathbf{n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n, \quad 0!=1}$$

*

Пример 5:

Два счета из десяти выполнены с ошибками. Найти вероятность того, что из четырех взятых на проверку счетов один счет окажется с ошибками.

Решение:

Имеем дело с неупорядоченными выборками без повторений, следовательно, всего случаев $\mathbf{n=C_{10}^{4}}$, благоприятных из них $\mathbf{m=C_2^1\cdot C_8^3}$.

Следовательно

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_8^3}{C_{10}^4}=$$

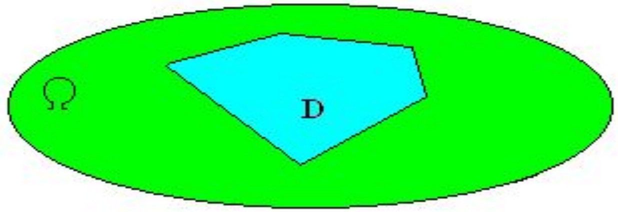
$$=\frac{\frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}=\frac{1\cdot 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)}=\frac{8}{15}.$$

Геометрическая вероятность

На практике часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно.

Пример 6:

Два студента условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 часами. Пришедший первым ждет 15 мин и уходит. Определить вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равновозможно в течение указанного часа.

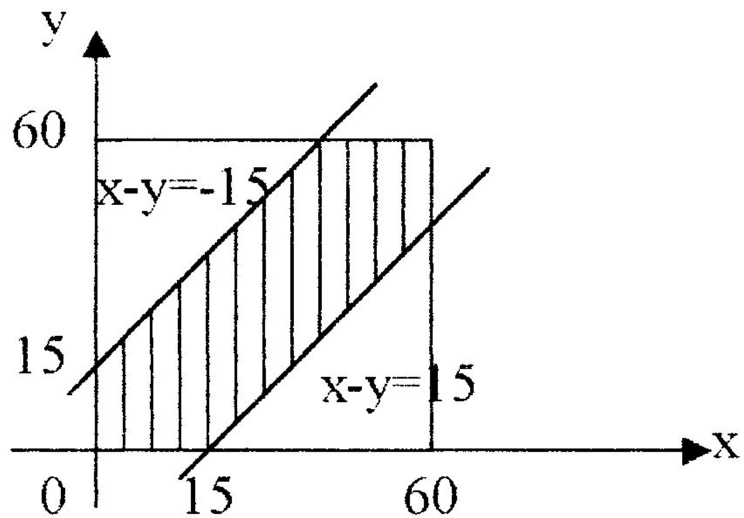


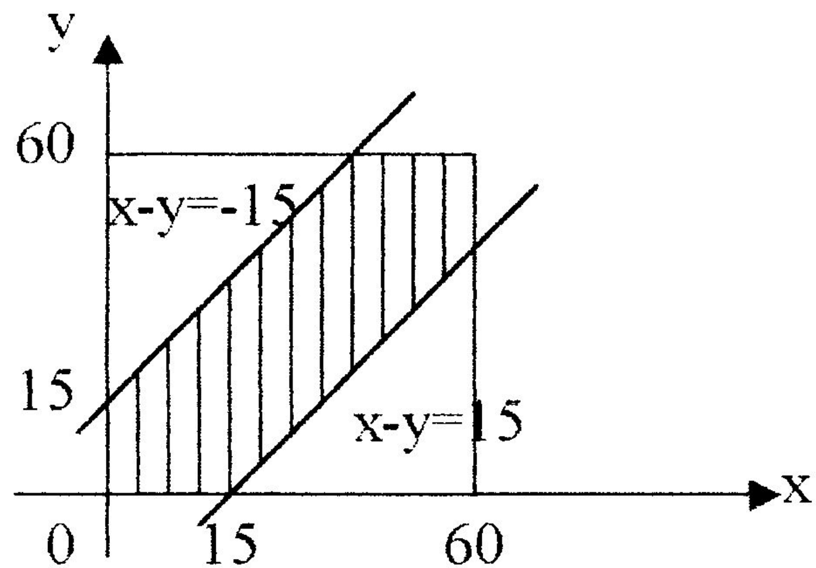
Если пространство Ω содержит бесконечное множество равновозможных элементарных событий и задача сводится к случайному бросанию точки на область (отрезок), то используют метод геометрической вероятности, причем этот метод может быть использован в том случае, если вероятность попадания точки в любую часть области пропорциональна мере (площади, объему, длине) этой части области и не зависит от расположения и формы этой части области.
Если мера всей области равна S, а мера части D области, попадание в которую благоприятствует появлению события A, равна S_D, то вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{S_D}{S} \quad .$$

Решение примера 6:

Пусть x- время прихода одного студента, y- время прихода второго. Чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \leq 15$, т.е. $-15 \leq x - y \leq 15$. Область возможных значений - квадрат со стороной, равной 60.





Область *D*- часть квадрата между прямыми

x – y = -15 и x - y = 15. Следовательно,

$$p = \frac{S_D}{S} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}$$

*

Основные теоремы

Теорема 1. Теорема сложения вероятностей.

$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) +$
$... + P(A_n) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) -...-$
$- P(A_{n-1} \cdot A_n) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_4) +...+$
$+ P(A_{n-2} \cdot A_{n-1} \cdot A_n) -...+$
$+(-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n).$

Для трех событий:

$P(A_1+A_2+A_3)= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) –$
$-P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$

□ **Доказательство** (для n=3).

$P(A+B+C) = P((A+B)+C) =$ / по аксиоме 4 / $= P(A+B)+P(C)-P((A+B)\cdot C) = P(A+B) + P(C) - P(A\cdot C+B\cdot C) = P(A+B) + P(C) - (P(A\cdot C) + P(B\cdot C) - P(A\cdot B\cdot C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cdot B) - P(A\cdot C)- P(B\cdot C) + P(A\cdot B\cdot C)$.□

Следствие 1. Вероятность суммы двух любых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Следствие 2. Если события A и B **несовместны**, то $A \cdot B=\Theta$ и следовательно,

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 3. Если события $A_{1,}\ A_2, \ldots, A_n$ **несовместны,** то

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Замечание .

Так как , $A+\overline{A}=\Omega$, то $P(A+\overline{A})=1$

События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

Следовательно, $P(A)+P(\overline{A})=1$,

откуда

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

*

Определение. **Условной вероятностью** $P(A/B)$ события *A* относительно события *B* назовем вероятность события *A* при условии, что событие *B* уже произошло.

Теорема 2. Теорема умножения вероятностей.

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1})}.$$

Для трех событий:

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2)}\ .$$

□ *Доказательство*

Воспользуемся методом математической индукции.

$P(A_1 \cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)$.

Предполагаем, что теорема верна для (n-1) событий; докажем, что она верна для n событий.

Найдем $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n)=P((A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1})\cdot A_n)$ $= \quad =P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1})\cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1}) =$ / по предположению /$= P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot ..$ $\cdot P(A_{n-1}/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_{n-2})\cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1})$.□

Следствие 1. Вероятность произведения двух любых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно первого, т.е.

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A)=P(B) \cdot P(A/B).$$

Событие А называется **независимым** от события В, если условная вероятность события А относительно события В равна безусловной вероятности события А, т.е. P(A/B)=P(A). Нетрудно доказать, что если А не зависит от В, то и В не зависит от А.

Следствие 2. Если события А и В **независимы,** то

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B).$$

Пример 7:

Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов. Какова вероятность того, что он ответит на два выбранных наудачу вопроса?

Решение.

Рассмотрим события:

A- студент знает ответ на первый вопрос,

B- студент знает ответ на второй вопрос.

Найдем $P(A \cdot B)$.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30}$$

Определение.

Несколько событий называют **независимыми** (или независимыми в совокупности), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следовательно, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то $P(A_2/A_1) = P(A_2)$, $P(A_3/A_1 \cdot A_2) = P(A_3)$, ... , $P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = P(A_n)$, тогда

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).}$$

Пример 8:

Два студента выполняют независимо друг от друга задание. Вероятность того, что задание будет выполнено первым студентом 0,6;
для второго студента эта вероятность равна 0,8.

Найти вероятность того, что

- оба студента выполнят задание;
- только один из них выполнит задание;
- хотя бы один из них выполнит задание.

Решение.

События: *А* - задание выполнит первый студент,

В - задание выполнит второй студент.

По условию $P(A) = p_1 = 0{,}6$; $P(B)=p_2 = 0{,}8$; следовательно, $P(\overline{A}) = 1-p_1 = q_1 = 1-0{,}6 = 0{,}4$; $P(\overline{B}) = 1-p_2 = q_2 = 1-0{,}8 = 0{,}2$.

- $P(A \cdot B) =$ /события *А* и *В* - независимые события / $= P(A) \cdot P(B) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.
- $P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) =$ / $A\overline{B}$ и $\overline{A} \cdot B$ - несовместные события / $= P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$.
- $P(A+B) =$ / *А* и *В* - совместные события / $= P(A)+P(B)-P(A \cdot B) = 0{,}6+0{,}8-0{,}48 = 0{,}92$

или т.к. *А*+*В* и $\overline{A}\,\overline{B}$ противоположные события, то

$P(A+B) = 1-P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1-q_1 \cdot q_2 = 1-0{,}4 \cdot 0{,}2 = 1-0{,}08 = 0{,}92$. □

Пример 9:

Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками соответственно равны $p_1=0,5$, $p_2=0,4$ и $p_3=0,9$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то в размере: первый банк-160 тыс. руб., второй-40 тыс. руб., третий-200 тыс. руб.

Найти вероятности того, что предприятие получит кредит

а) в размере 200 тыс. руб.,

б) не менее 240 тыс. руб.

с) в любом размере.

Решение.

События:

A - первый банк выделит кредит,

B - второй банк выделит кредит,

C - третий банк выделит кредит,

D - предприятие получит кредит в размере 200 тыс. руб.,

E - предприятие получит кредит в размере не менее 240 тыс. руб.,

F – получит кредит.

а) Т.к. $D = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$,

то $P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}9) + (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0{,}4) \cdot 0{,}9 = 0{,}02 + 0{,}27 = 0{,}29.$

б)Т.к.$E=A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$,

то $P(E)=0{,}5 \cdot (1-0{,}4) \cdot 0{,}9+(1-0{,}5) \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}9+0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}9=0{,}63.$

с) $\overline{F} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, то $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}97.$ □

Теорема 3. Формула полной вероятности

Пусть в результате опыта может появиться какое-либо из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Событие А может появиться только вместе с одним из этих событий. События H_1, H_2,..., H_n называются **гипотезами.** Если известны вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$, где $i = \overline{1,n}$, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Доказательство.

$P(A)=P(A\cdot\Omega) = =P(A\cdot (H_1+H_2+...+H_n)=P(A\cdot H_1+A\cdot H_2+...+A\cdot H_n)=$

/*события* $A\cdot H_i$ *и* $A\cdot Hj$, *где* $i\neq j$, *несовместные события, т.к.* $(A\cdot H_i)\cdot(A\cdot H_j)=A\cdot H_i\cdot H_j=A\cdot(H_i\cdot H_j)=A\cdot\varnothing=\varnothing$ /

$= P(A\cdot H_1)+P(A\cdot H_2)+...+P(A\cdot H_n)=$
$=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n).$

Пример 10:

На стройку поступают блоки с трех баз, причем 50% с первой базы,30% со второй базы, остальные с третьей базы. Вероятность того, что блок с первой базы бракованный - 0,09; со второй - 0,1; с третьей - 0,08. Найти вероятность того, что взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

Решение.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 -взятый наудачу блок поступил с первой базы,

H_2 -взятый наудачу блок поступил со второй базы,

H_3 -взятый наудачу блок поступил с третьей базы.

Событие A -взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

По условию

$P(H_1)=50/100=0,5;$

$P(H_2)=30/100=0,3;$

$P(H_3)=(100-50-30)/100 = 0,2.$

$P(A/H_1)=0,09;$

$P(A/H_2)=0,1;$

$P(A/H_3)=0,08.$

Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A)=0,5 \cdot 0,09+0,3 \cdot 0,1+0,2 \cdot 0,08=0,091. \square$$

Запомним

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.}$$

*

Теорема 4. Формула Байеса

(теорема переоценки гипотез)

Пусть в условиях предыдущей теоремы событие *A* наступило и мы нашли вероятность $P(A)$. Спросим, как изменились вероятности гипотез в связи с появлением события *A*, т.е. найдем $P(H_i/A)$, где $i=1,2,...,n$.

По аксиоме 5: $P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$, откуда

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}}$$

Пример 11:

В предыдущем примере событие А наступило, т.е. взятый наудачу на стройке блок оказался бракованным. Определить вероятность того, что этот блок поступил со второй базы.

Решение.

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2/\mathrm{A}) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}1}{0{,}091} = \frac{30}{91} \approx 0{,}33.$$

Теорема 5 . Формула Бернулли

На дне глубокого сосуда лежат спокойно n шаров.
Поочередно их оттуда таскают двое дураков.
Сия работа им приятна, они таскают t минут,
И, вынув шар, его обратно тотчас немедленно кладут.
Ввиду занятия такого, сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго, когда шаров он вынул k?

Студенческий фольклор Санкт-Петербургского государственного университета

Теорема 5 . Формула Бернулли

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* наступает с постоянной вероятностью *p*. Найдем вероятность того, что в этих *n* испытаниях событие A появится ровно m раз, т.е. найдем $P_n(m)$. Обозначим через A_i -появление события *A в i-ом* опыте, тогда

$$P_n(m)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n + \ldots + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot \ldots \cdot A_n)=$$

/ *сумма несовместных событий, каждое из которых – произведение n независимых событий* /

$= C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$, следовательно,

$$P_n(m)= C_n^m\, p^m q^{n-m}, \text{ где } q=1-p$$

Пример 12:

Каждый из пяти независимо работающих элементов отказывает с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что откажут три элемента из пяти.

Решение.

$$P_5(3)= C_5^3\, p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2 =$$

$$=10\cdot 0{,}064\cdot 0{,}36=0{,}23.$$

Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

Если $\mathbf{m_0}$ - наивероятнейшее число появления события **A** в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых событие **A** наступает с постоянной вероятностью **p**

$$\boxed{np - q \le m_0 \le np + p.}$$

Пример 13:

Найти наивероятнейшее число отказавших элементов, если каждый из пяти независимо работающих элементов отказывает с вероятностью 0,4.

Решение.

Так как $n=5$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$, то $5 \cdot 0{,}4-0{,}6 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0{,}4+0{,}4$ или

$1{,}4 \leq m_0 \leq 2{,}4$. Следовательно, $m_0=2$. □