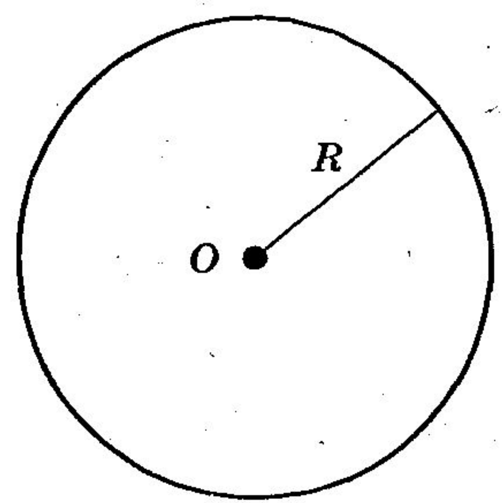
Углы и отрезки, связанные с окружностью

10 класс (повторение)

Основные определения

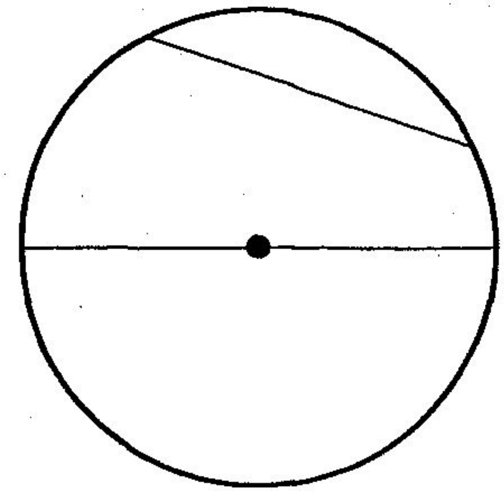
Окружностью называется замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра окружности), лежащей в той же плоскости, что и кривая.

Отрезок R, соединяющий центр окружности с какой–либо ее точкой (а также длина этого отрезка), называется ***радиусом***



Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

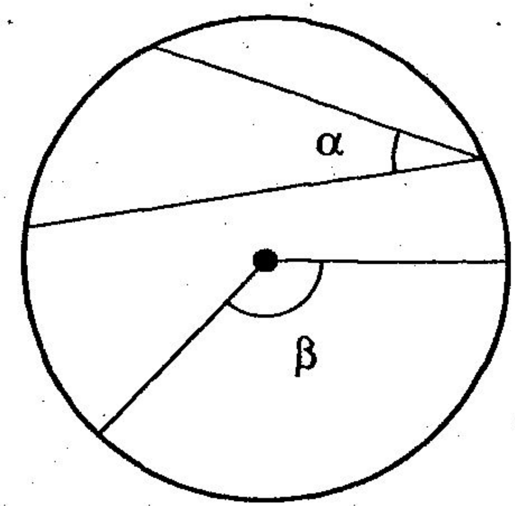
Диаметр — наибольшая из хорд



Дуга — часть окружности, расположенная между двумя ее точками.

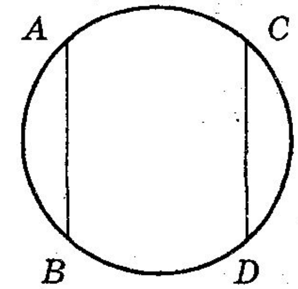
Вписанным углом называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец.

Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами

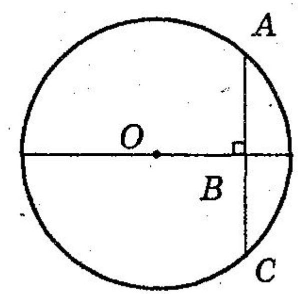


Равные хорды стягивают равные дуги

$AB = CD \Rightarrow \cup AB = \cup CD$

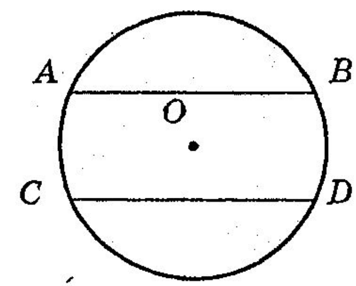


Диаметр, который проходит через середину хорды, перпендикулярен к ней



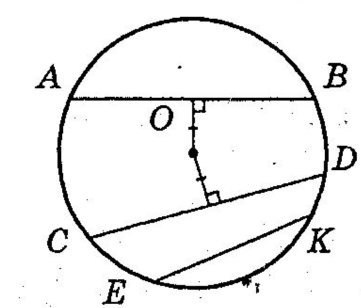
Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги

$AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$



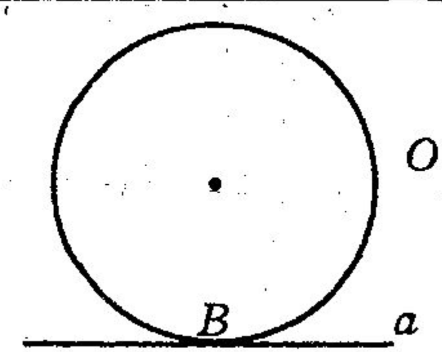
Хорды, равноудаленные от центра окружности, равны.

Большая из двух хорд находится ближе к центру окружности

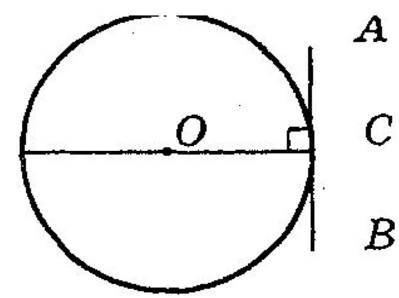


Касательная к окружности

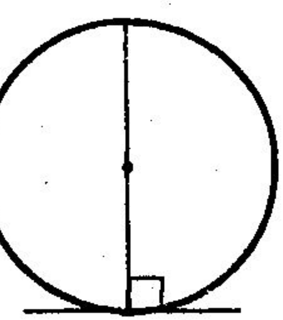
Прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку, называется ***касательной*** к этой окружности



Прямая, перпендикулярная диаметру окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности

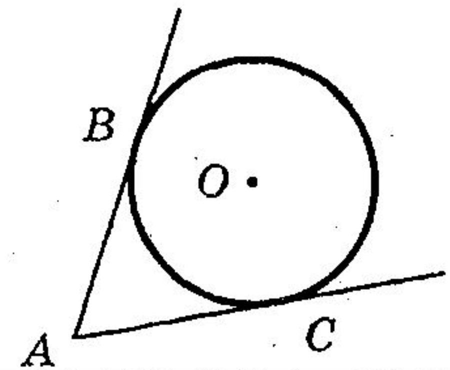


Касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания

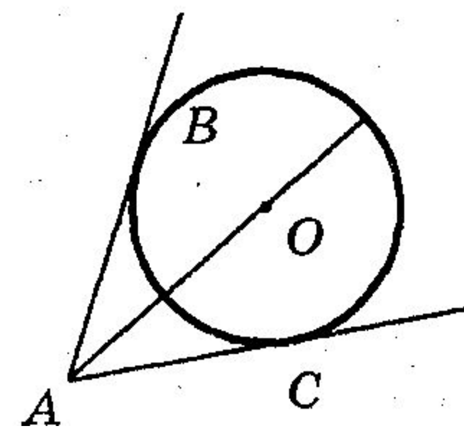


Свойства касательных , проведенных к окружности

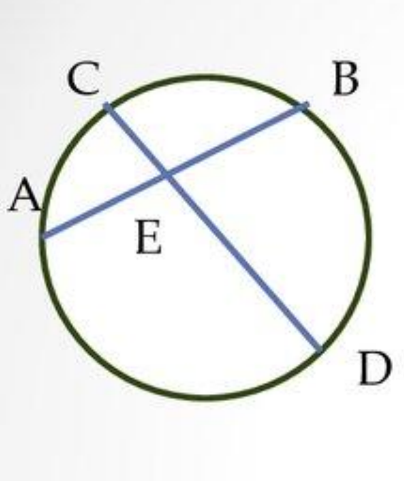
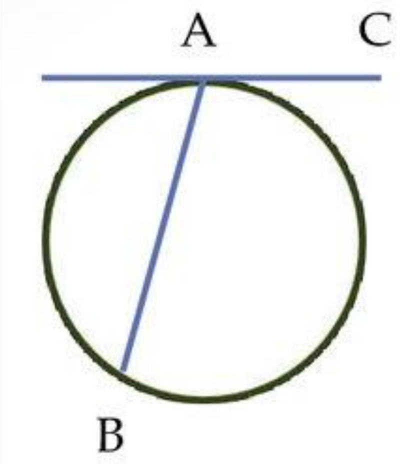
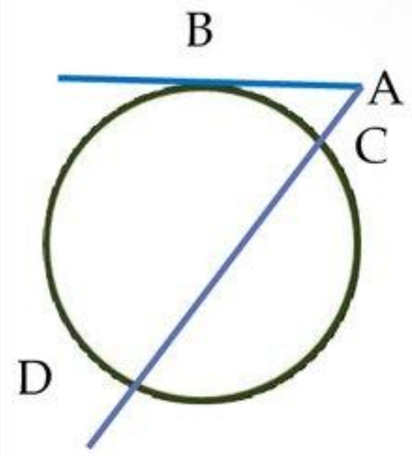
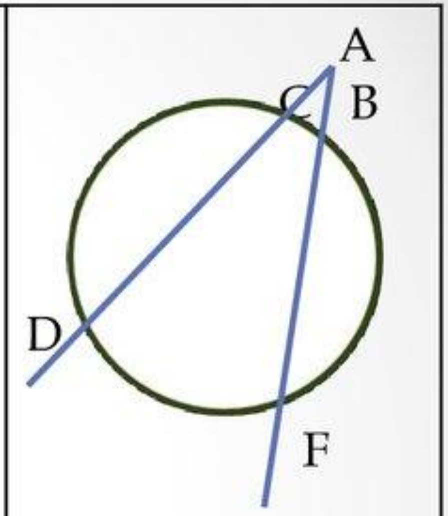
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:
$AB = AC$



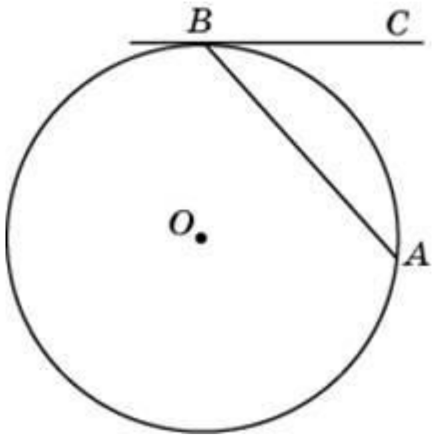
Углы, образованные касательными, проведенными из одной точки, и прямой, проходящей через центр окружности и эту точку, равны: $\angle BAO = \angle OAC$



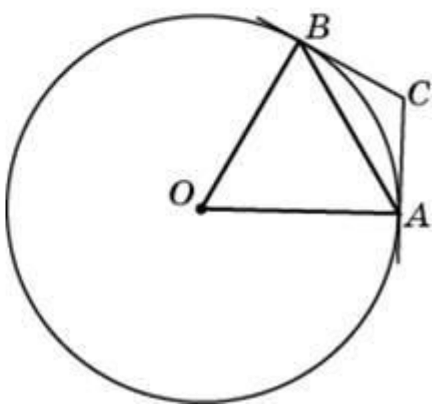
Свойства хорд, секущих и касательных

			
AB CD хорды $AB \cap CD = E$ $AE \cdot BE = CE \cdot DE$	AC - касательная AB – хорда угол CAB равен половине дуги AB	AB – касательная AD – секущая $AB^2 = AC \cdot AD$	AD - секущая AF - секущая $AC \cdot AD = AB \cdot AF$ УголDAF равен полуразности дугDF и CB

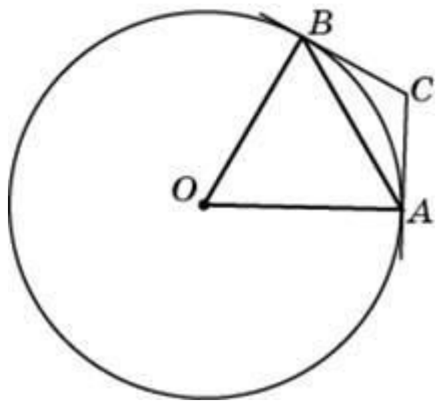
Решение задач



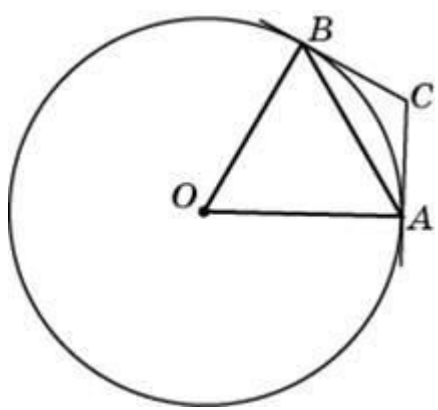
№1 Хорда *AB* *стягивает дугу окружности в 72°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B. Ответ дайте в градусах*



№2 Через концы *A* *и* *B* *дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 36°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.*



№3 Через концы *A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 42°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.*

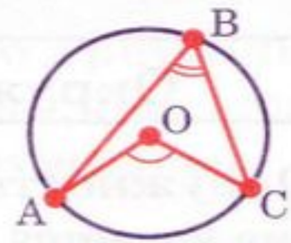


№4 Касательные *CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный 76°. Найдите величину меньшей дуги AB, стягиваемой точками касания. Ответ дайте в градусах*

Углы с вершинами внутри и вне круга

1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла (дуги, на которую он опирается):

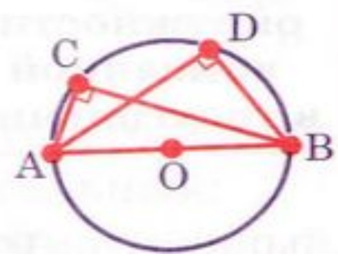
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}.$$



2. Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB, равны: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \ldots$

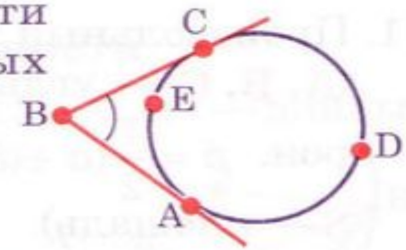
3. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые:

$$\angle ACB = \angle ADB = 90°.$$



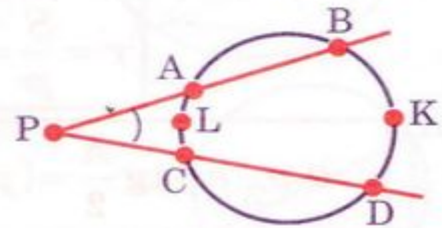
Углы с вершинами внутри и вне круга

4. Описанный угол равен полуразности угловых величин дуг, заключенных между его сторонами:



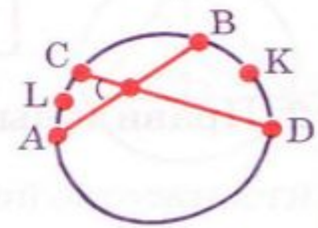
$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{AEC}).$$

5. Угол, образованный двумя секущими, проведенными из одной точки, лежащей вне окружности, равен полуразности угловых величин дуг, *заключенных между его сторонами:*



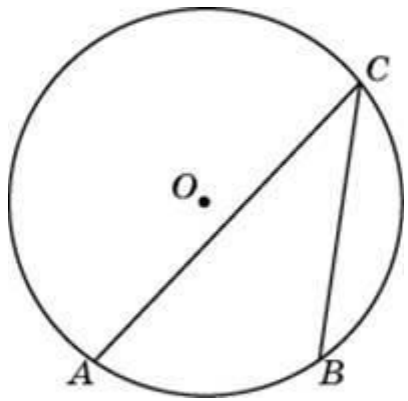
$$\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BKD} - \overset{\frown}{ALC}).$$

6. Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме угловых величин дуг, заключенных между его сторонами:



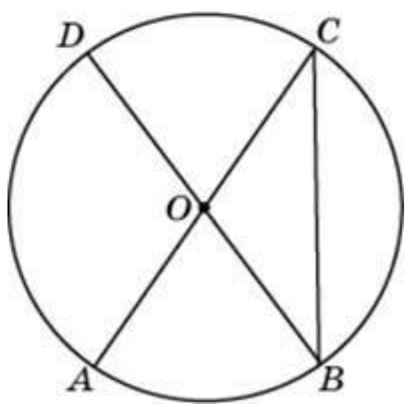
$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ALC} + \overset{\frown}{BKD}).$$

Решение задач

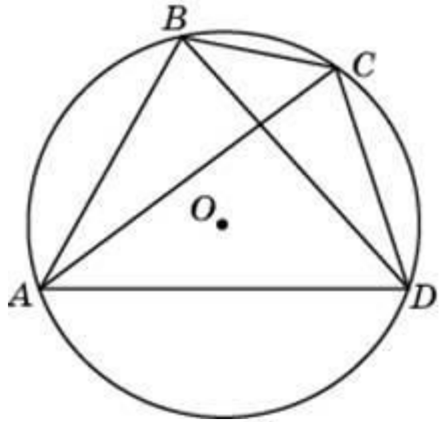


№6 . Дуга окружности *AC, не содержащая точки B, имеет градусную меру 270°, а дуга окружности BC, не содержащая точки A, имеет градусную меру 80°.*

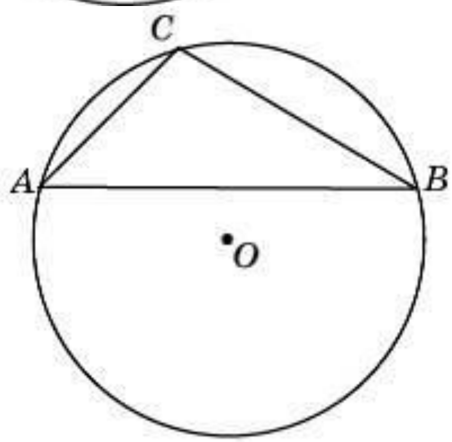
Найдите вписанный угол *ACB. Ответ дайте в градусах.*



№7 Отрезки *AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 94°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.*

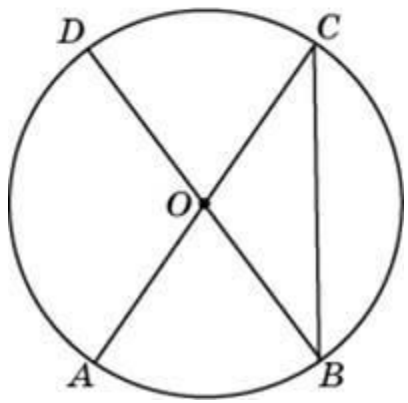


№ 8 Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол ABD равен 15°, угол CAD равен 31°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

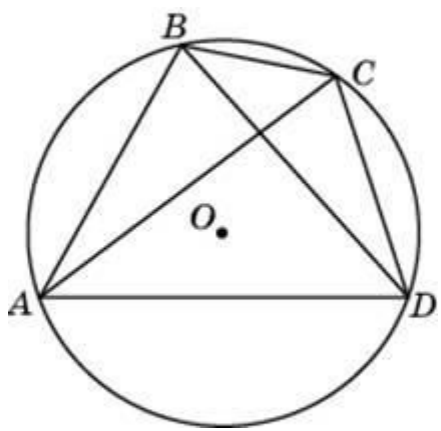


№9 Хорда *AB* делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.

Реши самостоятельно:

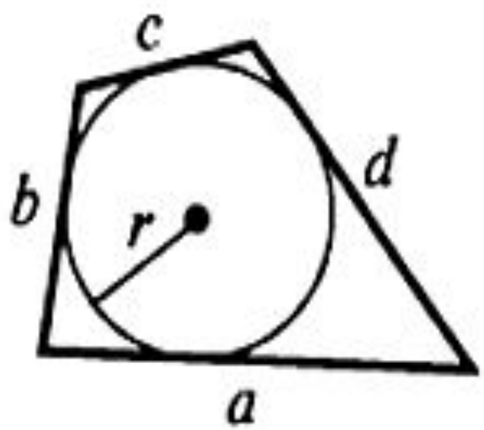


№1 Отрезки *AC* и *BD* – *диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 71°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах*



№2 Четырехугольник *ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 150°, угол CAD равен 89°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах*

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противолежащих сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

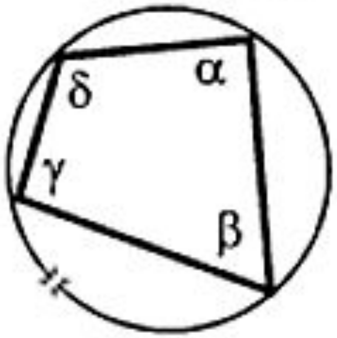
Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противолежащих сторон равны.

Площадь: $S = pr$, где $p = \dfrac{a + b + c + d}{2}$ (полупериметр),

r — радиус вписанной окружности.

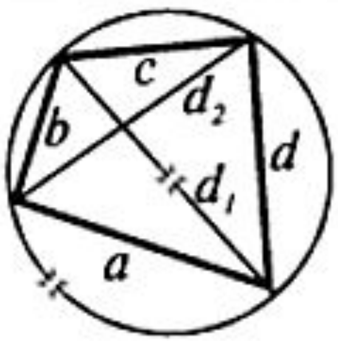
Формула $S = pr$ справедлива для *любого* многоугольника, описанного около окружности.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ



Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противолежащих углов равна 180°: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

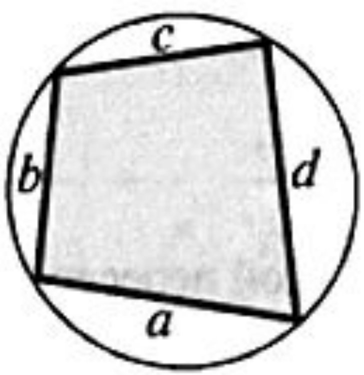
Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противолежащих углов равны 180°.



Теорема Птолемея

Сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей:

$$ac + bd = d_1 d_2 .$$

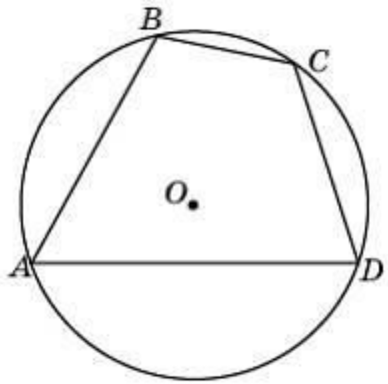


Площадь

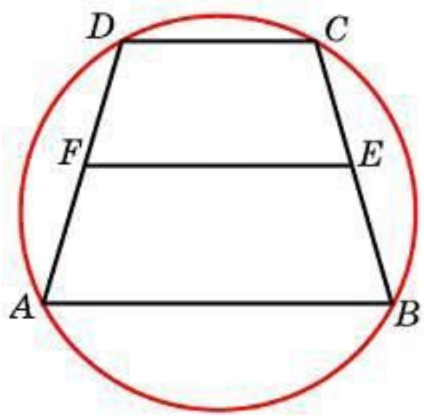
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} .$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ (полупериметр).

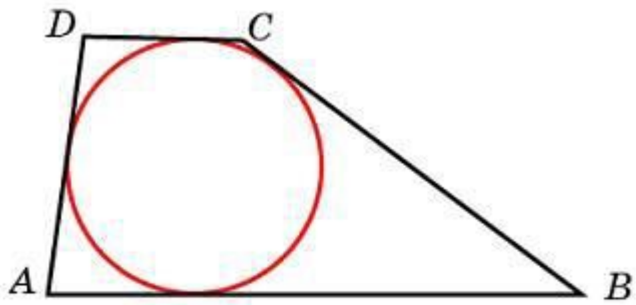
Решение задач



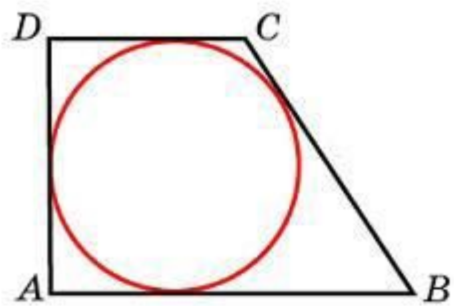
№1 Угол *A* четырехугольника *ABCD*, вписанного в окружность, равен 18°. Найдите угол *C* этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



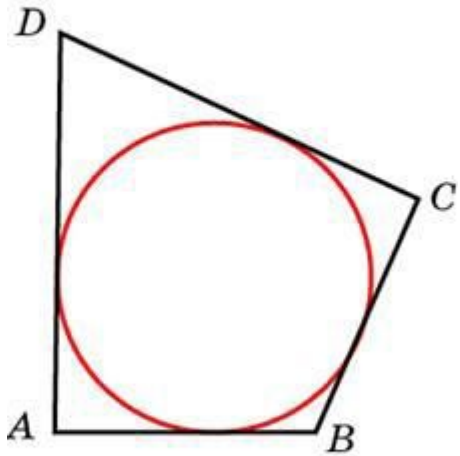
№ 2 Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 66, средняя линия равна 11. Найдите боковую сторону трапеции.



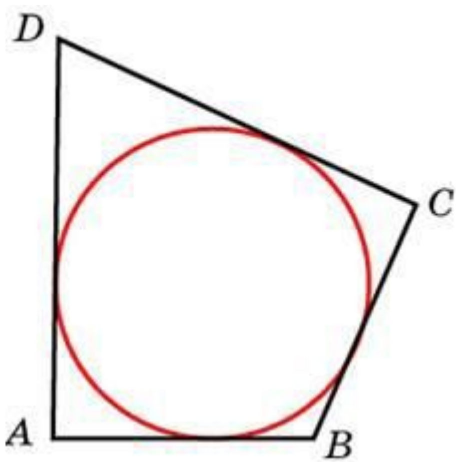
№3 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 28 и 4. Найдите среднюю линию трапеции.



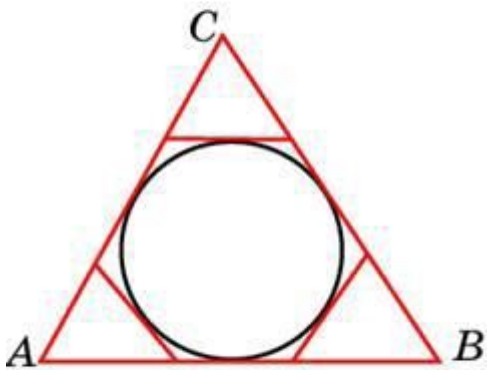
№4 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, ее большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.



№5 В четырёхугольник *ABCD* вписана *окружность, AB=42, CD = 33. Найдите периметр четырёхугольника ABCD.*



№6 В четырёхугольник *ABCD, периметр которого равен 66, вписана окружность, AB = 21. Найдите CD.*



№7 К окружности, вписанной в треугольник *АВС, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 10, 23, 34. Найдите периметр данного треугольника.*