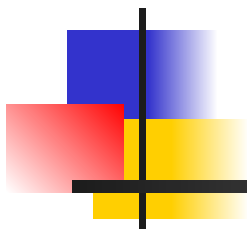


Законы распределения случайных величин

1. Законы распределения дискретных случайных величин (биномиальный, Пуассона).
2. Законы распределения непрерывных случайных величин (равномерный, нормальный, показательный.)



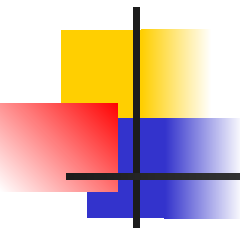
Биномиальный закон



Дискретная случайная величина X имеет **биномиальный закон** распределения, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ с вероятностями

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p+q=1, p>0, q>0, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$

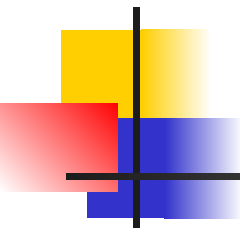


Биномиальный закон

Ряд распределения

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

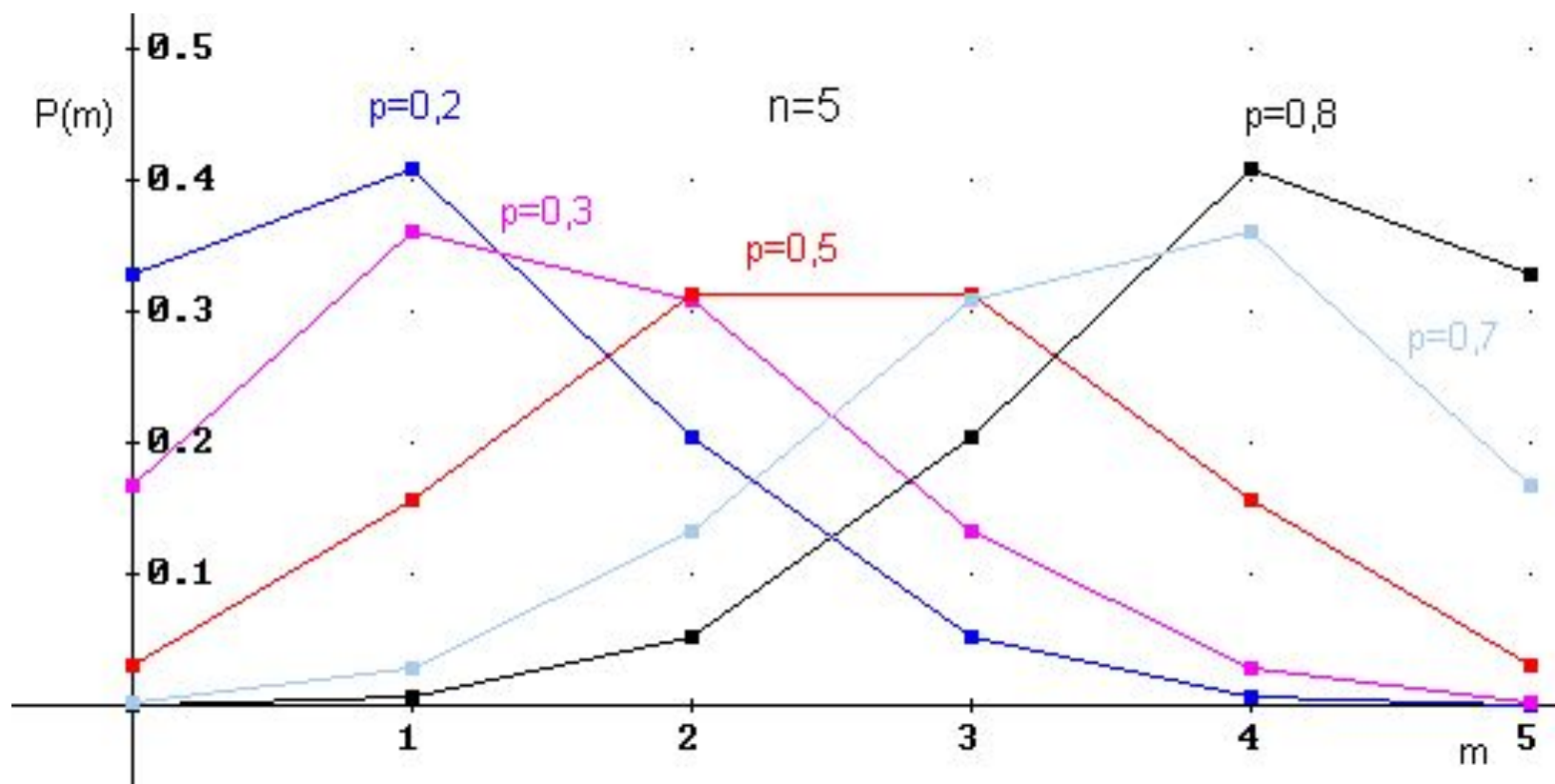
причем
$$\sum_{i=0}^n p_i = 1$$



Биномиальный закон

Параметры	n, p
Математическое ожидание	$M(X) = np$
Дисперсия	$D(X) = npq$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$
Мода (наивероятнейшее число)	$np - q \leq Mo(X) \leq np + p$

многоугольники (полигоны) распределения
случайной величины X , имеющей биномиальный
закон распределения с параметрами
 $n=5$ и p (для $p=0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,8$)



Пример

Примерно 20% судебных дел – это дела по обвинению в краже. В порядке прокурорского надзора проверено 4 наудачу отобранных дела.



Каково наивероятнейшее значение дел о краже среди отобранных и какова вероятность этого значения?

РЕШЕНИЕ

$$n = 4,$$

$$p = \frac{20}{100} = 0,2,$$

$$q = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$np - q \leq Mo(X) \leq np + p$$

$$4 \cdot 0,2 - 0,8 \leq Mo(X) \leq 4 \cdot 0,2 + 0,2$$

$$0 \leq Mo(X) \leq 1$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1$$

РЕШЕНИЕ

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1$$

$$P_4(0) = 0,8^4 = 0,4096$$

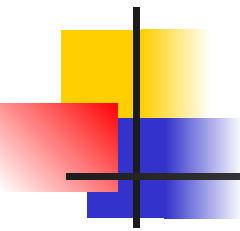
$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^3 = 0,4096$$

Закон Пуассона



Дискретная случайная величина X имеет **закон распределения Пуассона**, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ (бесконечное, но счётное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad e = 2,71828\dots$$

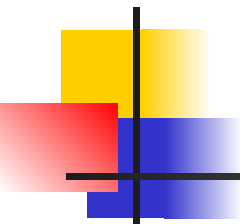


Закон Пуассона

Ряд распределения

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	e^{-a}	$a \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2}$	...	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	...

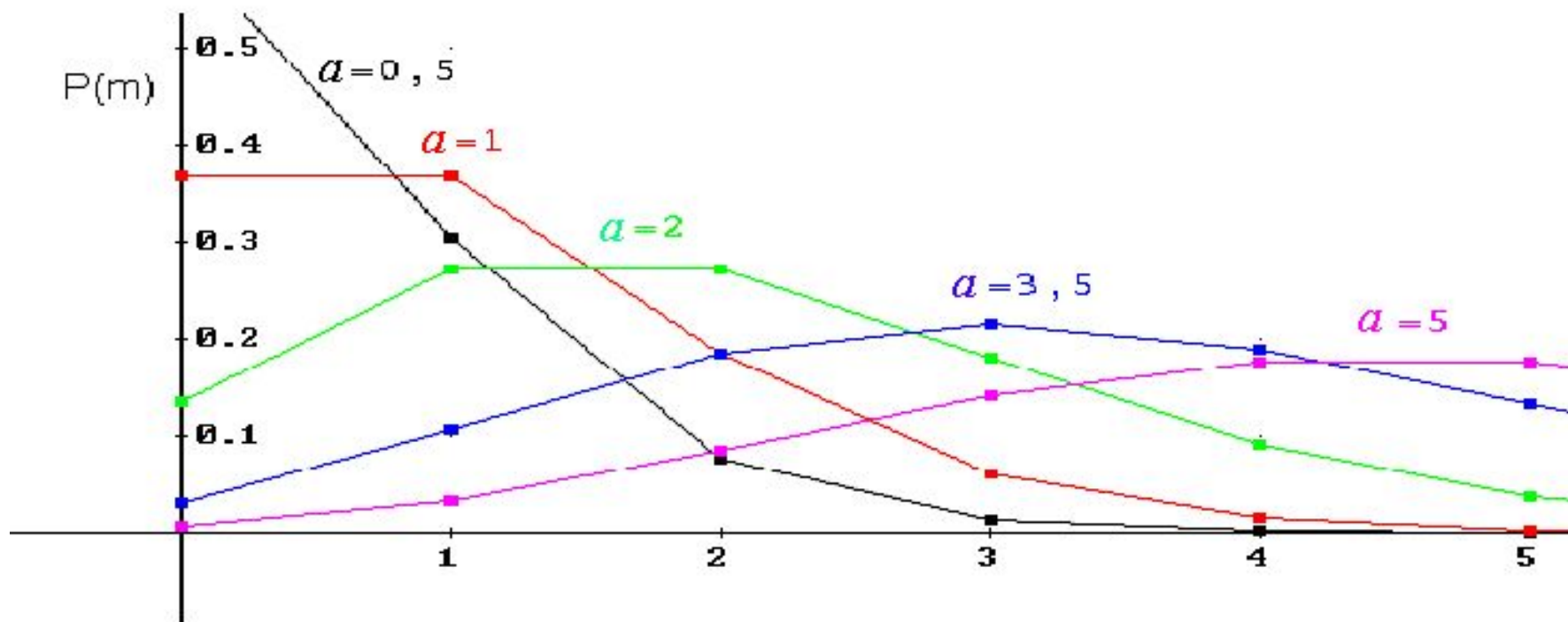
причем
$$\sum_{0}^{\infty} p_i = 1$$



Закон Пуассона

Параметры	a
Математическое ожидание	$M(X) = a$
Дисперсия	$D(X) = a$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \sqrt{a}$
Мода (наивероятнейшее число)	$a - 1 \leq Mo(X) \leq a$

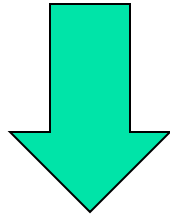
Многоугольники распределения
случайной величины X , имеющей
закон распределения Пуассона с параметром a
(для $a=0,5; 1; 2; 3,5; 5$).



Применение закона Пуассона

При больших n , малых p

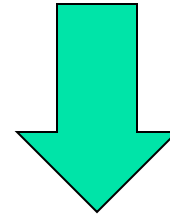
Формула
Бернулли



$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$



Формула
Пуассона



$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

$$a = np$$

Пример

Примерно 0,1%
судебных дел – это дела
по обвинению в
убийстве. Проверено
200 наудачу взятых
судебных дел.



Какова вероятность того, что среди них
дел о убийстве буде: 0, 1, 2, 3 ?

Решение

$$n = 200, \quad p = 0,001, \quad n \cdot p = 0,2$$

m	0	1	2	3	Σ
$P(m) = \frac{0,2^m}{m!} e^{-0,2}$	0,8187	0,1638	0,0164	0,0010	0,9999
$P_{200}(m) = C_{200}^m (0,001)^m (0,999)^{200-m}$	0,8186	0,1639	0,0163	0,0011	0,9999

Применение закона Пуассона

Вероятности того, что за промежуток времени длиной t наступит m событий простейшего потока

$$P_{tt}(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

$$a = \lambda \cdot t$$

λ – это среднее число событий потока, происходящих в единицу времени (интенсивность).

$$a = \lambda \cdot t$$

Пример

В дежурную часть
органов внутренних дел
за час в среднем
поступает 30 сообщений
различного характера.



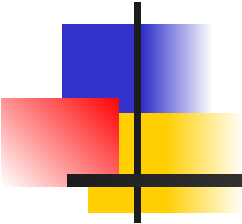
Какова вероятность, что за минуту поступит 2
сообщения?

Решение

Количество сообщений, поступающих в час $\lambda = 30$,

$$t = 1(\text{мин}) = 1/60 (\text{час}), \quad a = 30 \cdot \frac{1}{60} = 0,5$$

$$P_{1_{\text{мин.}}}(2) = \frac{0,5^2}{2} e^{-0,5} \approx 0,07$$



Равномерный закон



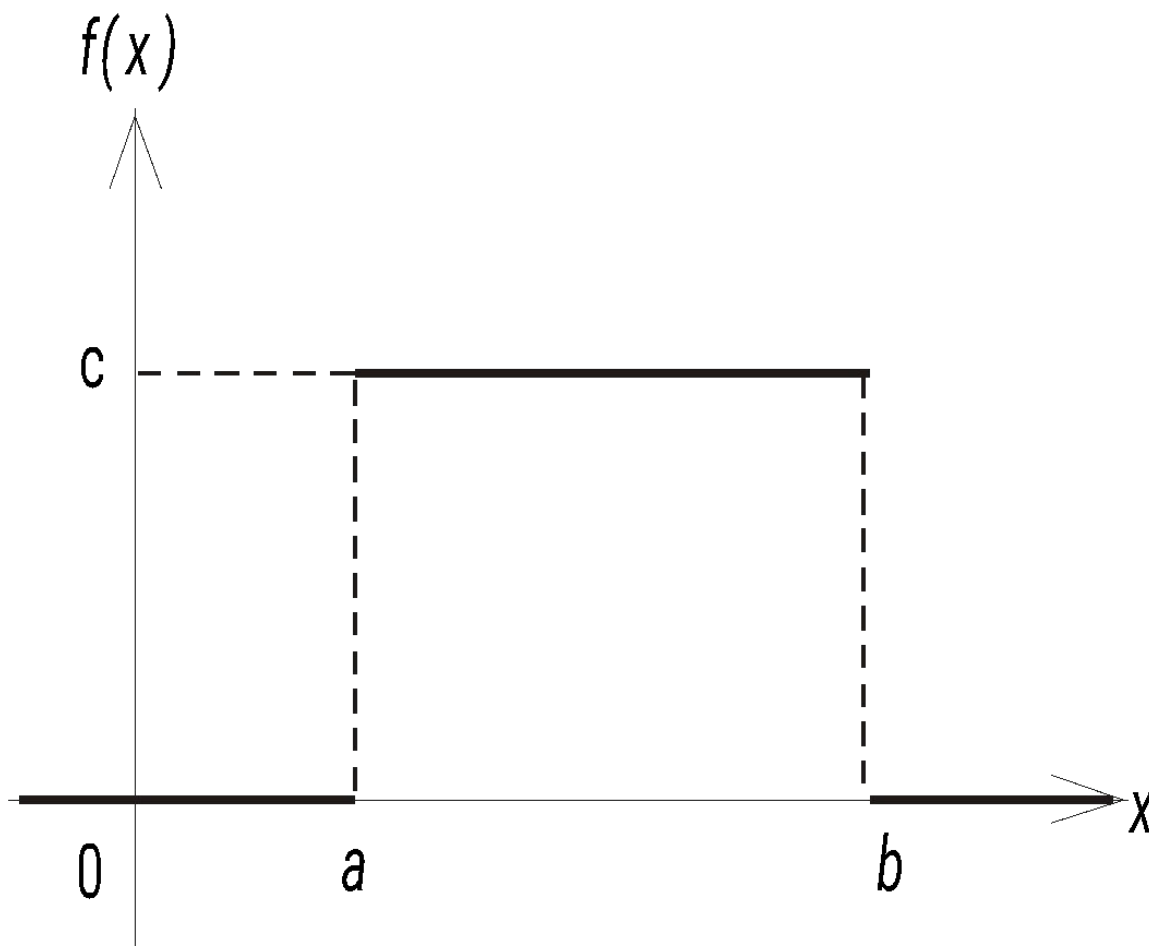
Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, т. е. если

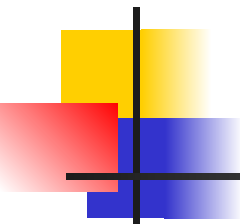
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ c & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

где $c = \frac{1}{b-a} = \text{const.}$

Равномерное распределение

Кривая распределения





Равномерный закон

Математическое ожидаие	$M(X) = \frac{b + a}{2}$
Дисперсия	$D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}$
Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha, \beta]$, ($[\alpha, \beta] \in [a, b]$)	$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

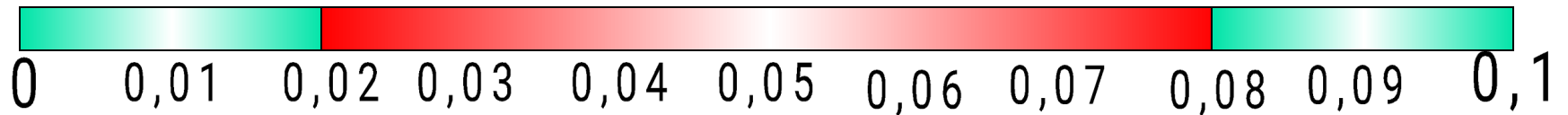
Пример

Цена деления шкалы
амперметра равна $0,1 \text{ A}$.
Показания округляют до
ближайшего целого
деления.



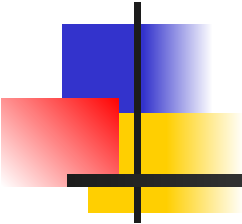
Найти вероятность того, что при отсчете будет
сделана ошибка, превышающая $0,02 \text{ A}$.

Решение



Ошибка превысит заданную точность, если
 $X \in [0,02, 0,08]$

$$P(0,02 < X < 0,08) = \frac{0,08 - 0,02}{0,1} = 0,6$$



Нормальный закон

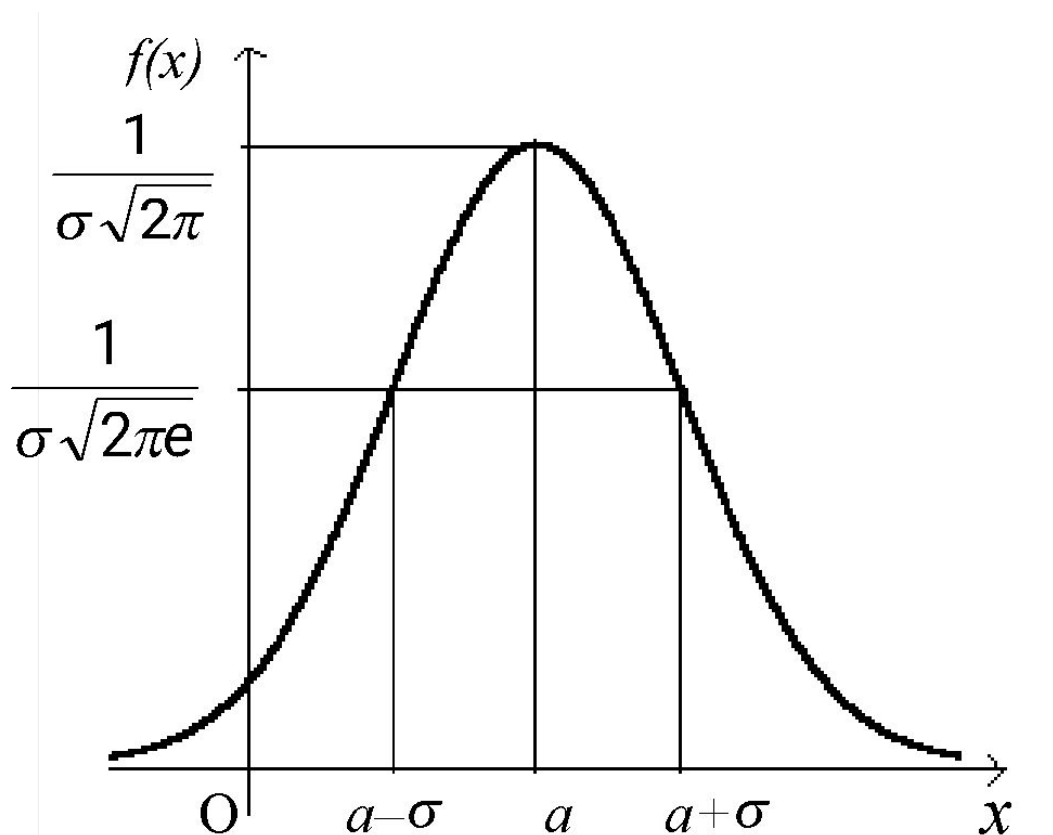


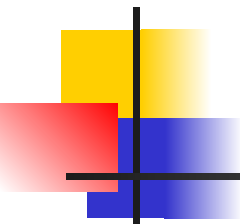
Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение*, если плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение

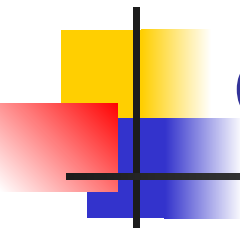
Кривая распределения





Нормальный закон

Параметры	a, σ
Математическое ожидание	$M(X) = a$
Дисперсия	$D(X) = \sigma^2$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \sigma$
Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha, \beta]$, $([\alpha, \beta] \in [a, b])$	$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$ $\Phi(x)$ – функция Лапласа

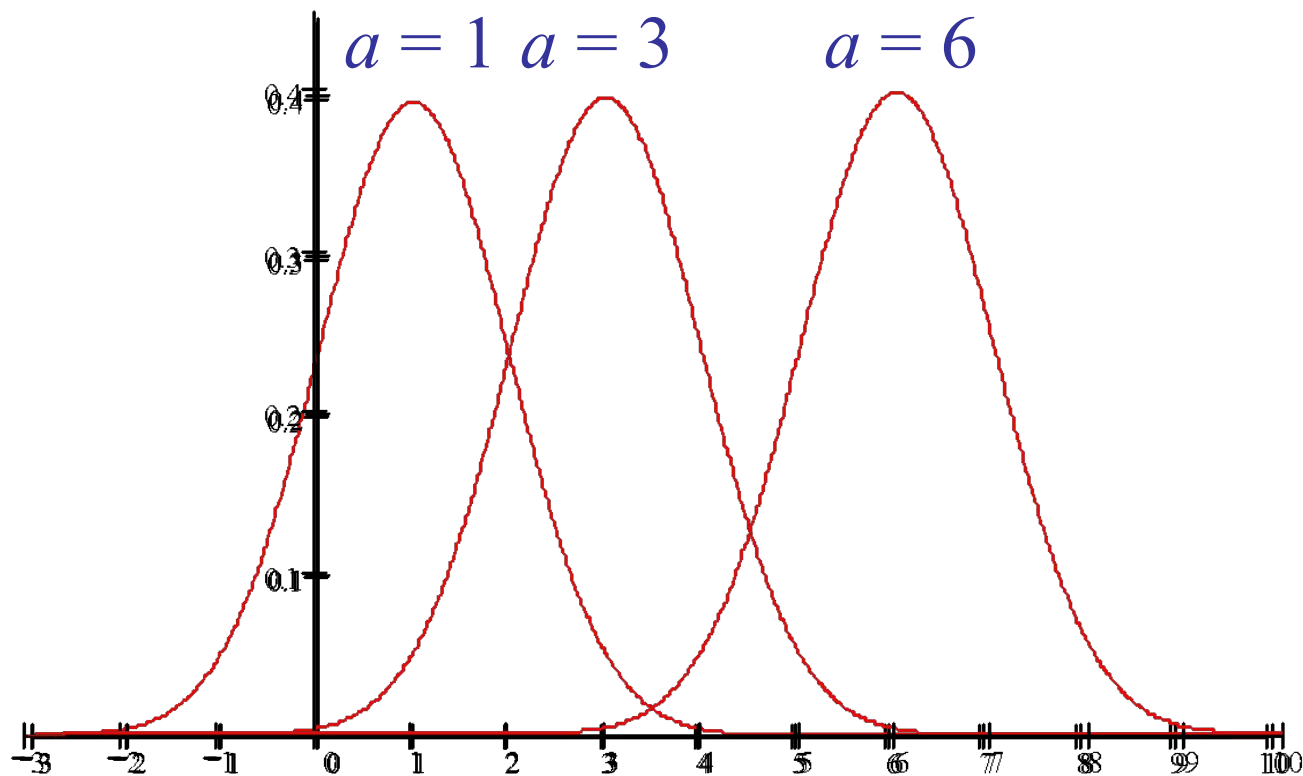


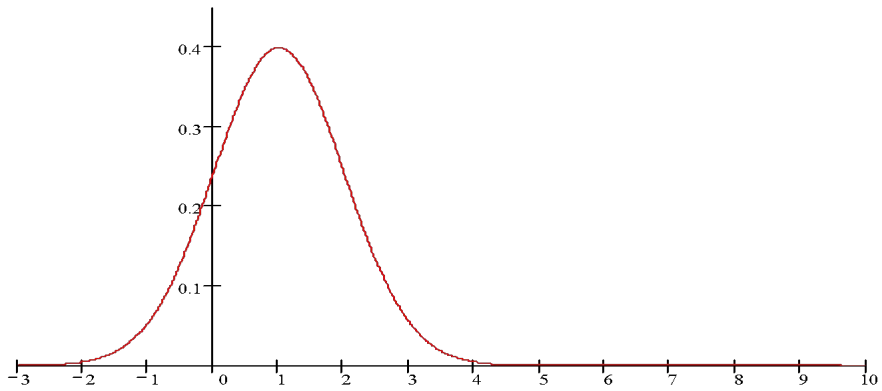
Функция Лапласа

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

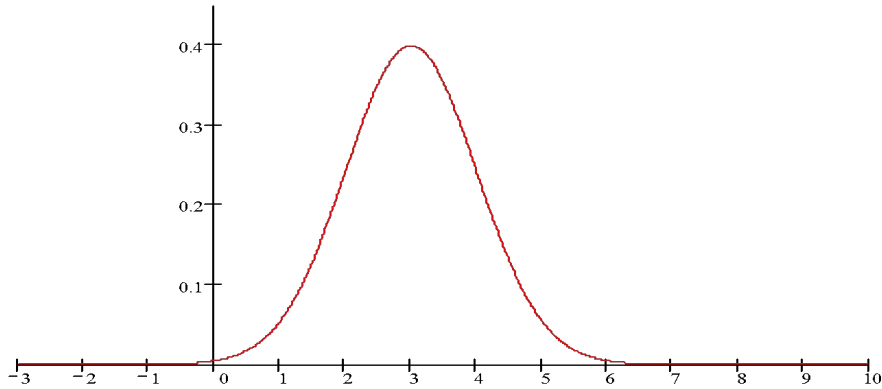
х	Φ(х)	х	Φ(х)
0,00	0,0000	0,06	0,0239
0,01	0,0040	0,07	0,0279
0,02	0,0080	0,08	0,0319
0,03	0,0120	0,09	0,0359
0,04	0,0160	0,10	0,0398
0,05	0,0199	0,11	0,0438

При изменении параметра a форма графика функции не изменяется, а происходит лишь смещение вдоль оси абсцисс вправо, если он возрастает, и влево, если убывает.

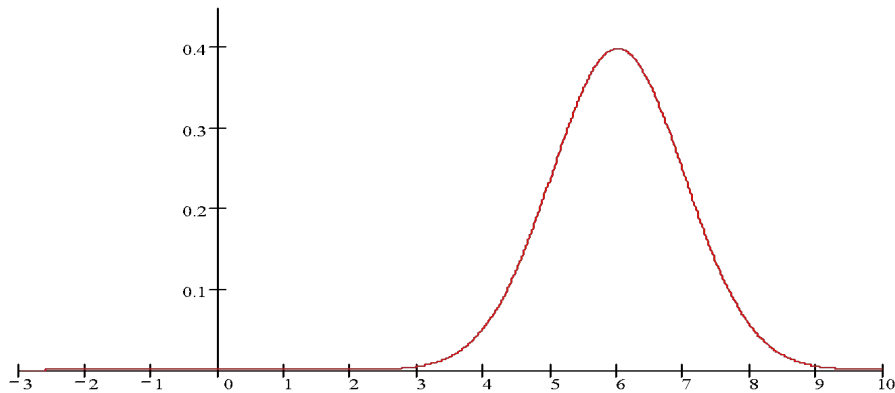




$$a = 1, \sigma = 1$$

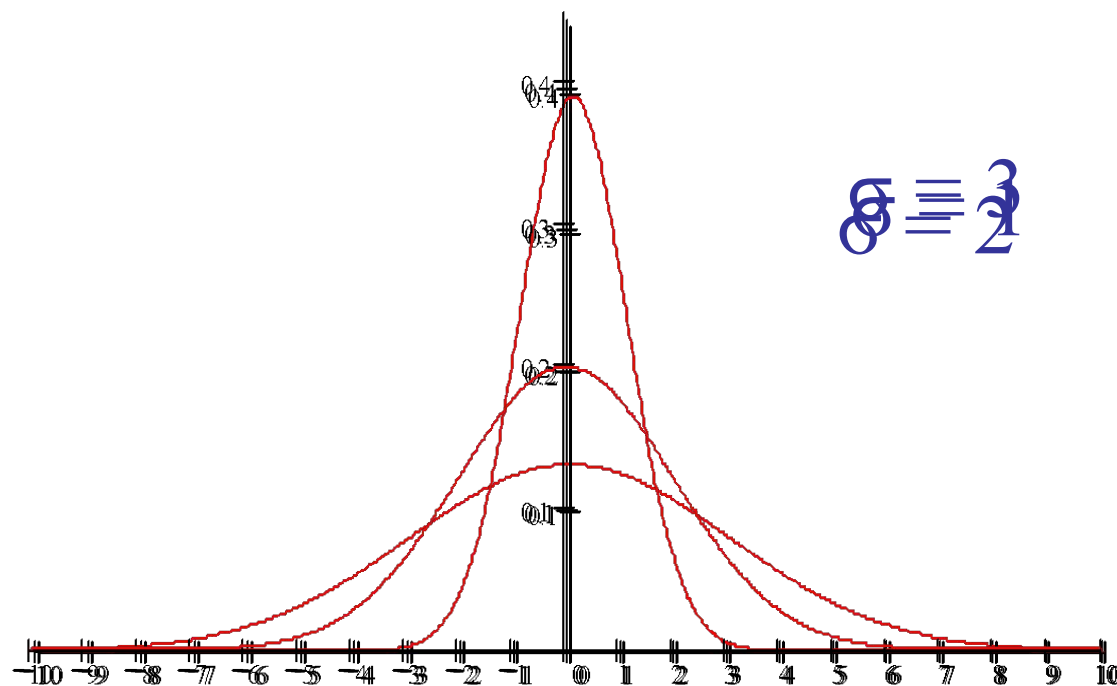


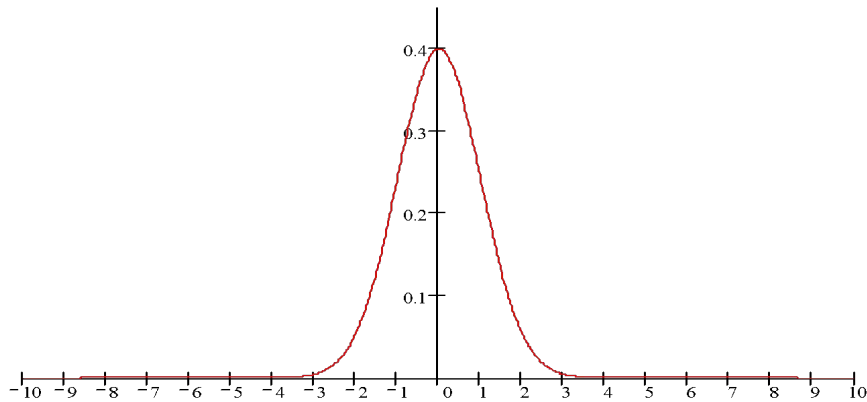
$$a = 3, \sigma = 1$$



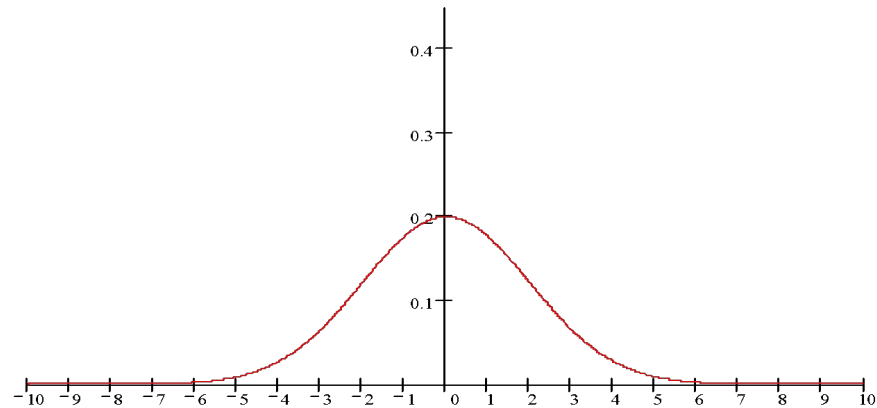
$$a = 6, \sigma = 1$$

При изменении параметра σ изменяется форма нормальной кривой. Если этот параметр убывает, то кривая становится более островершинной, если увеличивается, то кривая становится более пологой.

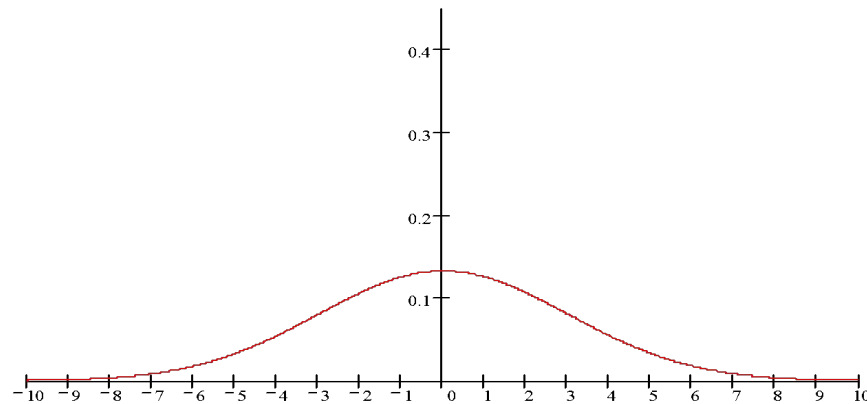




$$\sigma = 1$$

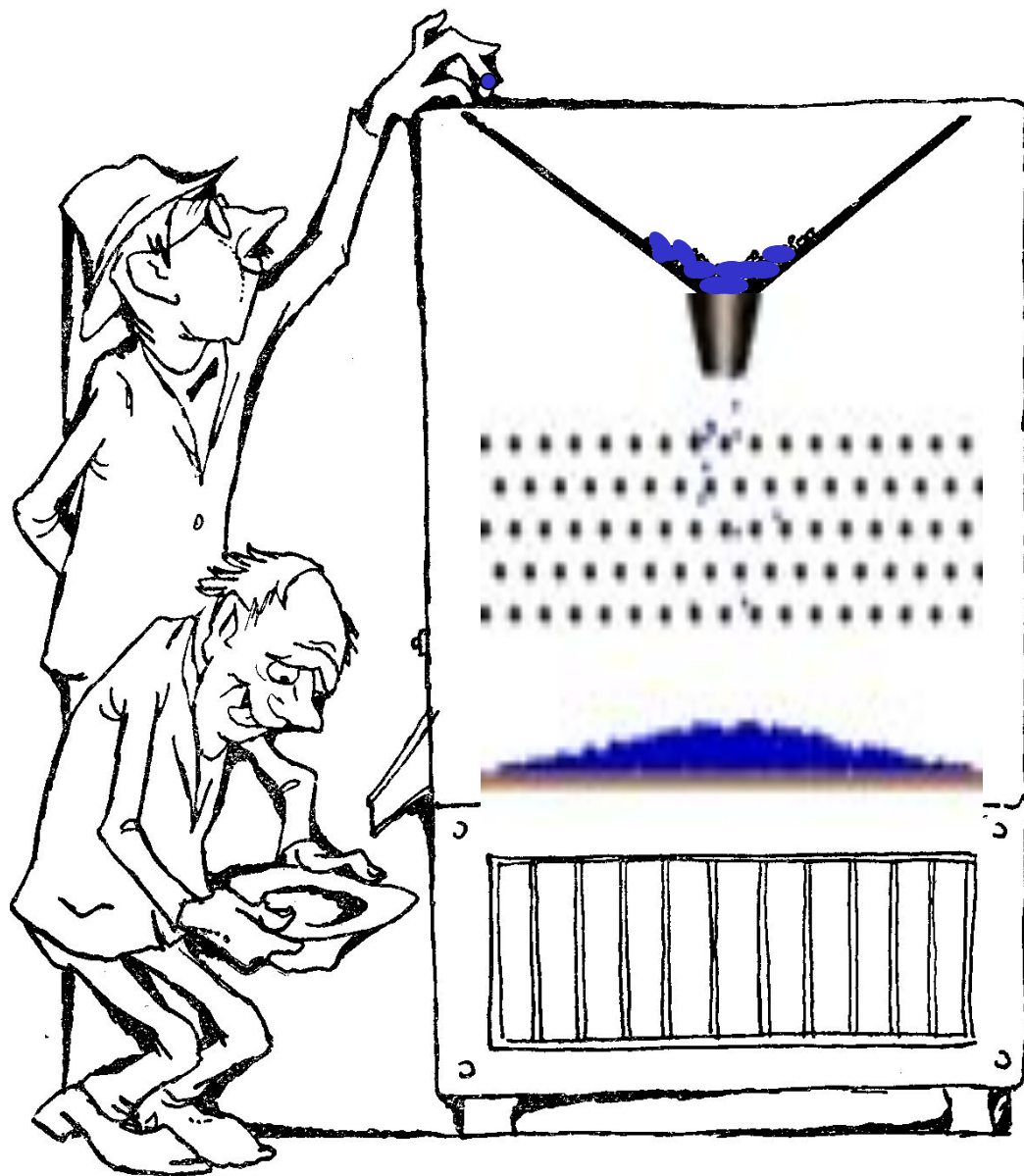


$$\sigma = 2$$

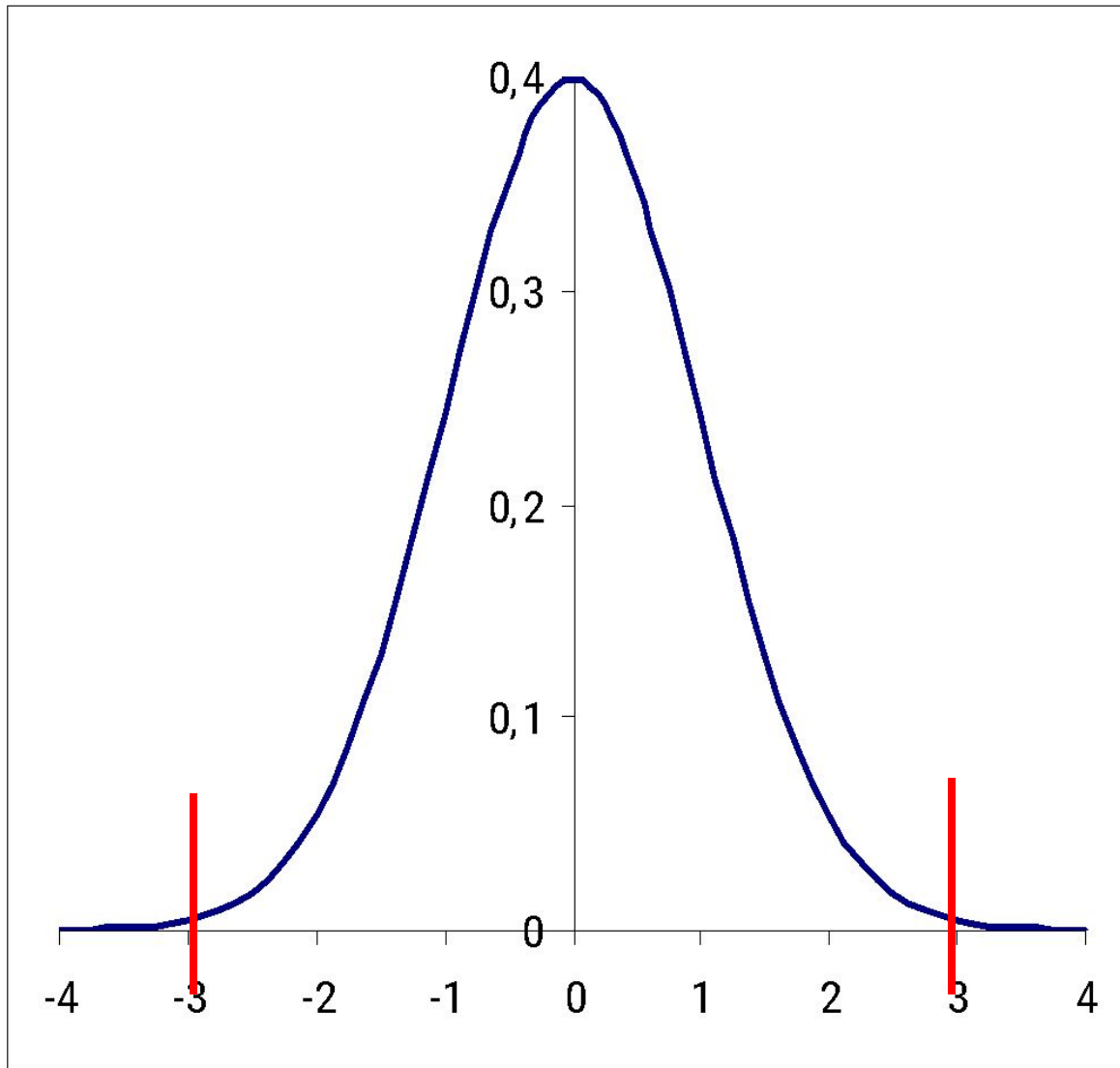


$$\sigma = 3$$

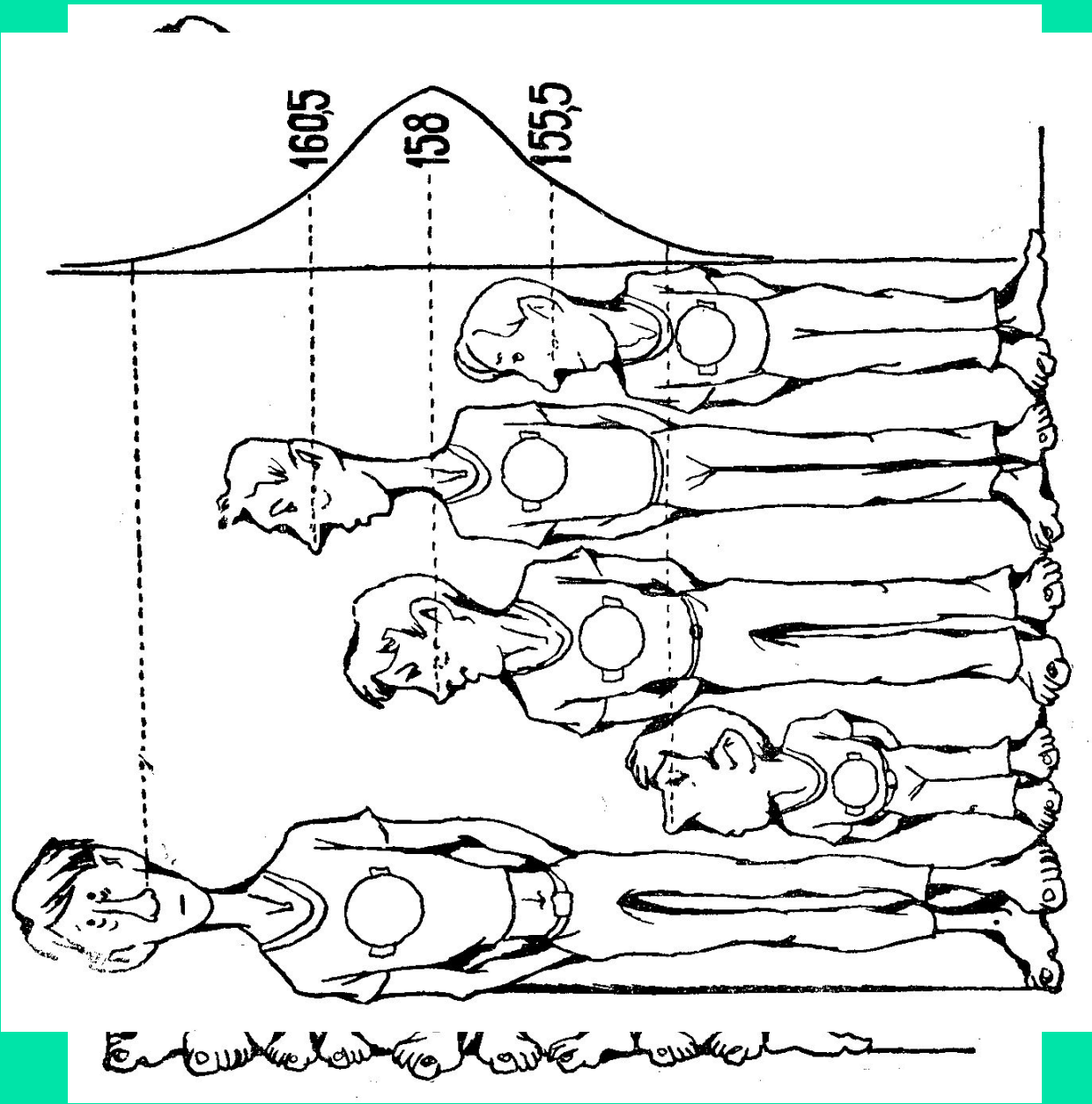
Доска Гальтона



Правило «трех сигм»



если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ , то практически достоверно, что её значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.



Показательный (экспоненциальный) закон

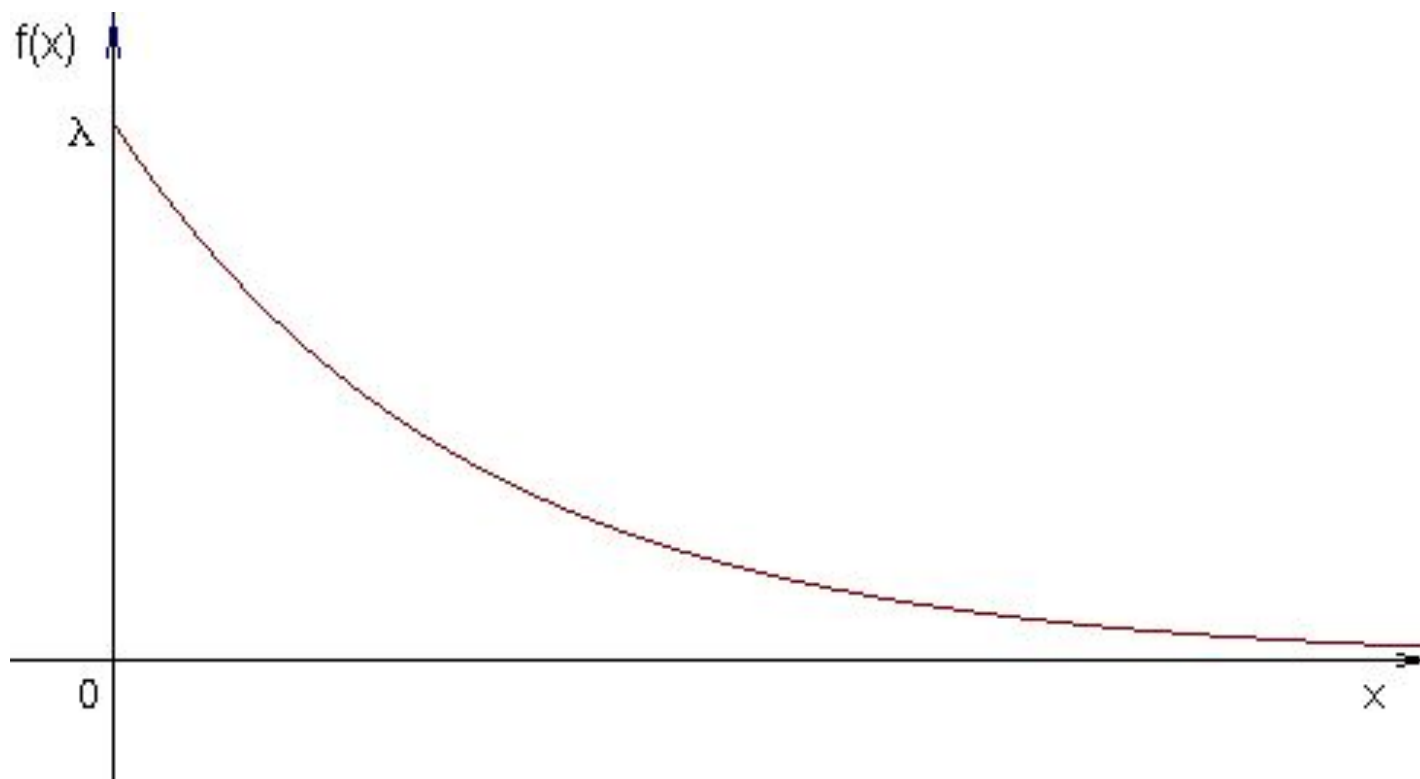


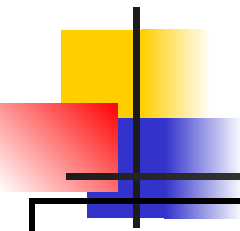
Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный (экспоненциальный) закон распределения***, если её плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Показательное распределение

Кривая распределения





Показательный закон

Параметр	λ
Математическое ожидание	$M(X) = \frac{1}{\lambda}$
Дисперсия	$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$
Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha, \beta]$, ($[\alpha, \beta] \in [a, b]$)	$P(\alpha \leq X \leq \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$

Пример

На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей.



Найти среднее время ожидания очередной машины контролером Т, – если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону

$$f(t) = 5e^{-5t}$$

Решение

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 5e^{-5t} \\ f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

$$M(T) = 1 / \lambda = 1 / 5(\text{часа}) = 12(\text{минут})$$

Спасибо за внимание!



Спасибо за внимание!

