Лекция 3
ОСНОВЫ ЛОГИКИ
Логические операции

ФОРМЫ МЫШЛЕНИЯ

- **ЛОГИКА** — это наука о формах и законах человеческого мышления и, в частности, о законах доказательных рассуждений.
- Логика изучает мышление как средство познания объективного мира. Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира.
- Формальная логика связана с анализом наших обычных содержательных умозаключений, выражаемых разговорным языком. Математическая логика изучает только умозаключения со строго определенными объектами и суждениями, для которых можно однозначно решить, истинны они или ложны.
- Идеи и аппарат логики используется в кибернетике, вычислительной технике и электротехнике (построение компьютеров основано на законах математической логики).
- В основе логических схем и устройств ПК лежит специальный математический аппарат, использующий законы логики. Математическая логика изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем. Знание логики необходимо при разработке алгоритмов и программ, так как в большинстве языков программирования есть логические операции.

Основные формы мышления

Основными формами мышления являются: ПОНЯТИЯ, СУЖДЕНИЯ, УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ.

ПОНЯТИЕ - форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного объекта или класса однородных объектов. Примеры: *портфель, трапеция, ураганный ветер.*

Понятие имеет две стороны: *содержание* и *объем.*

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков объекта. Чтобы раскрыть содержание понятия, следует найти признаки, необходимые и достаточные для выделения данного объекта из множества других объектов. Например, содержание понятия «персональный компьютер» можно раскрыть следующим образом: «Персональный компьютер — это универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя».

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется. Объем понятия «персональный компьютер» выражает всю совокупность (сотни миллионов) существующих в настоящее время в мире персональных компьютеров.

СУЖДЕНИЕ – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается об объектах, их свойствах и отношениях.

Суждениями обычно являются повествовательными предложениями, которые могут быть или истинными или ложными.

«Берн — столица Франции»,

«Река Кубань впадает в Азовское море»,

«2>9», «3×5=10»

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких истинных суждений, называемых посылками, мы по определенным правилам вывода получаем новое суждение (заключение).

Все металлы - простые вещества. Литий - металл.→ Литий - простое вещество.

Один из углов треугольника равен 90º. → Этот треугольник прямоугольный.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- В основе работы логических схем и устройств персонального компьютера лежит специальный математический аппарат - математическая логика. Математическая логика изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем. Знание логики необходимо при разработке алгоритмов и программ, так как в большинстве языков программирования есть логические операции.

- Английский математик **Джордж Буль (1815 — 1864 г.)** создал логическую алгебру, в которой высказывания обозначены буквами. Сочинение Джорджа Буля, в котором подробно исследовалась эта алгебра, было опубликовано в 1854 г. Оно называлось «Исследование законов мысли» («Investigation of the Laws of Thought»). Отсюда ясно, что Буль рассматривал свою алгебру как инструмент изучения законов человеческого мышления, то есть законов логики.
  Алгебру логики иначе называют алгеброй высказываний. В математической логике суждения называются высказываниями.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ - это повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно или истинно или ложно.

- Например:
  Земля - планета Солнечной системы. (Истинно)
  2+8<5 (Ложно)
  5 · 5=25 (Истинно)
  Всякий квадрат есть параллелограмм (Истинно)
  Каждый параллелограмм есть квадрат (Ложно)
  2 · 2 =5 (Ложно)
- Не всякое предложение является высказыванием:
  1) Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются.
  - “Какого цвета этот дом?”
  - “Пейте томатный сок!”
  - “Стоп!”
  2) Не являются высказываниями и определения.
  “Назовем медианой отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны”.
  Определения не бывают истинными или ложными, они лишь фиксируют принятое использование терминов.
  3) Не являются высказываниями и предложения типа *“Он сероглаз”* или “*x- 4x + 3=0”* - в них не указано о каком человеке идет речь или для какого числа *x* верно равенство. Такие предложения называются ***высказывательными формами.***
- ***Высказывательная форма*** — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Высказывания могут быть ***простыми*** *и* ***сложными.***

Высказывание считается простым, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание

Некоторые высказывания можно разложить на отдельные части, при этом каждая такая часть будет самостоятельным высказыванием. Например, высказывание *"Сегодня в 4 часа дня я был в школе, а к 6 часам вечера пошел на каток"* состоит из 2 частей. Высказывание может состоять и из большего количества частей.

Высказывание, которое можно разложить на части, будем называть сложным, а неразложимое далее высказывание - простым.

Сложное высказывание получается путем объединения простых высказываний ***логическими связками* — НЕ, И, ИЛИ**. Значение истинности сложных высказываний зависит от истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок.

Например, даны простые высказывания:

На улице идет дождь.

На улице светит солнце.

На улице пасмурная погода.

Составим из них сложные высказывания:

На улице идет дождь ***и*** *на улице светит солнце.*

На улице светит солнце ***или*** *на улице пасмурная погода.*

Неверно что *на улице идет дождь.*

- В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому **высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только 0 или 1**. **Если высказывание истинно, то его значение равно 1, если ложно - 0.**
- Простые высказывания назвали ***логическими переменными*** и для простоты записи их обозначают латинскими буквами: *A, B, C…*
  Луна является спутником Земли. *A = 1*
  Москва – столица Германии. *B = 0*
- Сложные высказывания называются *логическими функциями*. Значения логической функции также может принимать значения только 0 или 1.

БАЗОВЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В алгебре высказываний, как и в обычной алгебре, вводится ряд операций. Логические связки И, ИЛИ и НЕ заменяются логическими операциями: ***конъюнкцией, дизъюнкцией и инверсией.*** Это основные логические операции, при помощи которых можно записать любую логическую функцию.

1. Логическая операция ИНВЕРСИЯ (ОТРИЦАНИЕ)

- соответствует частице НЕ
- обозначается черточкой над именем переменной или знаком ¬ перед переменной
- **Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.**

Таблица истинности инверсии имеет вид:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу ИЛИ
- обозначается знаком **V** или **+** или ‖
- **Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.**
  Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных дизъюнкцией.

  A **V** B **V** C =0, только если A=0, B=0, C=0.
  Таблица истинности дизъюнкции имеет следующий вид:

A	B	A V B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу И
- обозначается знаком & или Λ, или ·
- **Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.** Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных конъюнкцией. A & B & C=1, только если A=1, B=1, C=1. Таблица истинности конъюнкции имеет следующий вид:

A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

- Сложные высказывания можно записывать в виде формул. Для этого простые логические высказывания нужно обозначить как логические переменные буквами и связать их с помощью знаков логических операций. Такие формулы называются ***логическими выражениями.*** Например:

$$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B})$$

$$\overline{(A \vee B \,\&\, C)}$$

- Чтобы определить значение логического выражения необходимо подставить значения логических переменных в выражение и выполнить логические операции. Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:
  1. инверсия;
  2. конъюнкция;
  3. дизъюнкция;
  4. импликация и эквивалентность.

  Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Таблицы истинности

- Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить *таблицу истинности*, которая определяет истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).
- При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий:

1) записать выражение и определить порядок выполнения операций

2) определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение (определяется по формуле $Q=2^n$, где n - количество входных переменных)

3) определить количество столбцов в таблице истинности (= количество логических переменных + количество логических операций)

4) построить таблицу истинности, обозначить столбцы (имена переменных и обозначения логических операций в порядке их выполнения) и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

5) заполнить таблицу истинности, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности

Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например, построим таблицу истинности для логической функции:

$$F(A,B,C) = \overline{A} \& (B \vee C)$$

Количество входных переменных в заданном выражении равно трем *(A,B,C)*. Значит, количество входных наборов, а значит и строк $Q=2^3=8$. Количество столбцов равно 6 (3 переменные + 3 операции). Столбцы таблицы истинности соответствуют значениям исходных выражений *A,B,C*, промежуточных результатов $\overline{A}$ и (*B* V *C*), а также искомого окончательного значения сложного арифметического выражения $\overline{A} \& (B \vee C)$

A	B	C	$\bar{A}$	B V C	$\bar{A} \& (B \vee C)$

A	B	C	$\bar{A}$	B V C	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A	B	C	$\bar{A}$	B V C	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Логические функции

- Любое логическое выражение (составное высказывание) можно рассматривать как логическую функцию *F(X1,X2, ..., Xn)* аргументами которой являются логические переменные *X1, X2, ..., Xn* (простые высказывания). Сама функция как и аргументы могут принимать только два различных значения: «истина» (1) и «ложь» (0).
- Выше были рассмотрены функции двух аргументов: логическое умножение *F(A,B) = A&B,* логическое сложение *F(A,B) = AVB,* а также логическое отрицание *F(A) = ¬A,* в котором значение второго аргумента можно считать равным нулю.
- Каждая логическая функция двух аргументов имеет четыре возможных набора значений аргументов. Может существовать $N = 2^4 = 16$ различных логических функций двух аргументов.
- Таким образом, существует 16 различных логических функций двух аргументов, каждая из которых задается своей таблицей истинности :

Аргументы		Логические функции															
A	*B*	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Легко заметить, что здесь логическая функция ***F2*** является функцией логического умножения, **F8** — функцией логического сложения, **F13** — функцией логического отрицания для аргумента *А* и **F11** — функцией логического отрицания для аргумента *В.*

В обыденной и научной речи кроме базовых логических связок **«и», «или», «не»** используются и некоторые другие: **«если... то...», «... тогда и только тогда, когда...»** и др. Некоторые из них имеют свое название и свой символ, и им соответствуют определенные логические функции.

ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ).

- Импликация двух высказываний А и В соответствует союзу «ЕСЛИ…ТО». Она обозначается символом →
- Запись А → В читается как «из А следует В»
- **Импликация двух высказываний истинна всегда, кроме случая, если первое высказывание истинно, а второе ложно.**
- Таблица истинности импликации двух суждений А и В такова:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В программировании эту операцию обозначают «IMP».

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО, ФУНКЦИЯ ТОЖДЕСТВА)

- Она обозначается символами ≡ или <=>. («тогда и только тогда»).
- Запись А ≡ В читается как «А эквивалентно В».
- **Эквивалентность двух высказываний истинна только в тех случаях, когда оба высказывания ложны или оба истинны.**
- **Таблица истинности эквивалентности двух суждений А и В такова:**

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В программировании эту операцию обозначают «EQV».
В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены путём логических преобразований к трём базовым логическим операциям: инверсии, дизъюнкции и конъюнкции

Сложением по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, логическим сложением, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией)

- Она обозначается символами $x \oplus y$
- Запись читается как: «или *x,* или *y*»
- *Сложением по модулю два* (альтернативной дизъюнкцией, логическим сложением, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) двух высказываний *x* и *y* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания *x* и *y* принимают разные значения.

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Стрелка Пирса – это отрицание дизъюнкции

- Она обозначается символами. $x \downarrow y$
- Запись читается как: «ни *x*, ни *y*».

x	y	$x \downarrow y$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Штрих Шеффера – это отрицание конъюнкции.

- Она обозначается символами. $x|y$

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1