



«Формула Пика»

«ФОРМУЛА ПИКА»

Учитель математики Шипилова Т М

Цели работы:

- *Выяснение существования иной, отличной от школьной программы, формулы нахождения площади решетчатого многоугольника.*
- *Области применения искомой формулы.*

Введение.

Математическое образование, получаемое в общеобразовательных школах, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека.

На данном этапе, школьная система рассчитана на одиннадцатилетнее обучение.

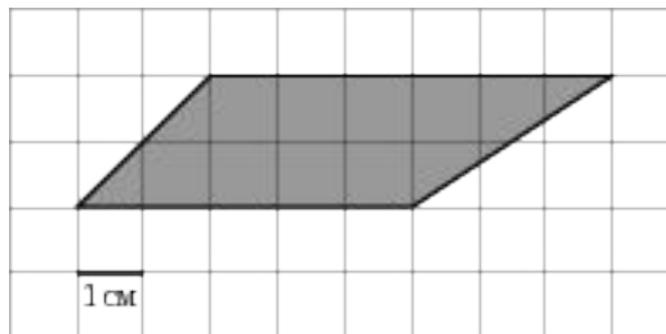
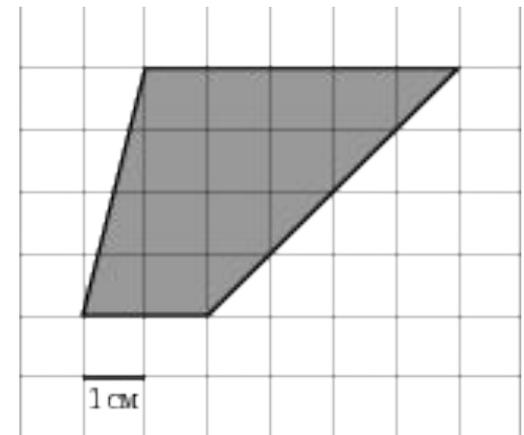
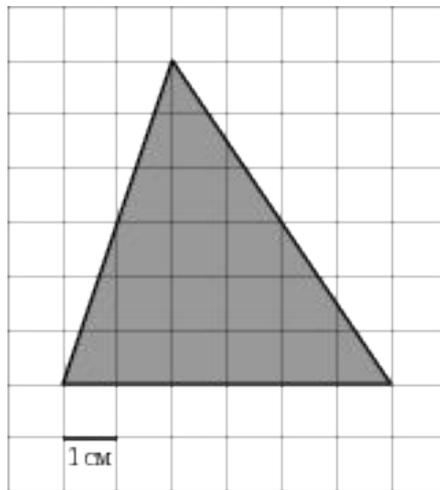
Всем учащимся в конце одиннадцатого класса предстоит сдать Единый Государственный Экзамен, который покажет уровень знаний, полученный во время учебы в школе. Но школьная программа не всегда предоставляет самые рациональные способы решения каких-либо задач .

Например, просматривая результаты ЕГЭ 2010 года видно, что многие ученики теряют баллы из-за задания В6.

Я задалась целью, как же можно сэкономить время и правильно решить это задание.

Задание В6.

На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см на 1 см изображены фигуры (см. рисунок). Найдите их площади в квадратных сантиметрах.





Итак, чтобы все-таки решить это задание мне нужно применить формулы нахождения площади, которые мы изучаем в 8 классе. Но на это уйдет очень много времени, а мне нужно ответить на поставленный вопрос как можно быстрее, ведь время на экзамене строго ограничено.

Поэтому, проведя исследования, я выяснила, что существует теорема Пика, которая в школьной программе не изучается, но которая поможет мне быстрее справиться с заданием.

Историческая справка.

Георг Александр Пик (10 августа, 1859 - 26 июля 1942) был австрийским математиком. Он умер в концлагере Терезин. Сегодня он известен из-за формулы Пика для определения площади решетки полигонов. Он опубликовал свою формулу в статье в 1899 году, она стала популярной, когда Хьюго Штейнгауз включил её в 1969 году в издание математических снимков.

Пик учился в Венском университете и защитил кандидатскую в 1880 году. После получения докторской степени он был назначен помощником Эрнеста Маха в Шерльско-Фердинандском университете в Праге. Он стал преподавателем там в 1881 году. Взяв отпуск в университете в 1884 году, стал работать с Феликсом Клейном в Лейпцигском университете. Он оставался в Праге до своей отставки в 1927 году, а затем вернулся в Вену.

Пик возглавлял комитет в(тогда) немецком университете Праги, который назначил Альберта Эйнштейна профессором кафедры математической физики в 1911 году.

Пик был избран членом Чешской академии наук и искусств, но был исключен после захвата нацистами Праги.

После ухода на пенсию в 1927 году, Пик вернулся в Вену, город, где он родился. После аншлюса, когда нацисты вошли в Австрию 12 марта 1938 года, Пик вернулся в Прагу. В марте 1939 года нацисты вторглись в Чехословакию. Георг был отправлен в концентрационный лагерь Терезин 13 июля 1942. Он умер через две недели.

Теорема Пика.

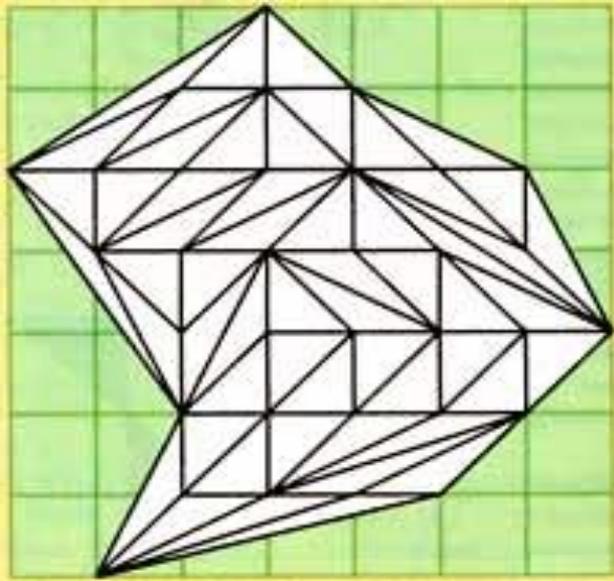
Теорема Пика — классический результат комбинаторной геометрии и геометрии чисел.

Площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна сумме

$$B + \Gamma/2 - 1,$$

где B есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Γ количество целочисленных точек на границе многоугольника.

Доказательство теоремы Пика.



любой такой многоугольник легко разбить на треугольники с вершинами в узлах решётки, не содержащие ни вершин, ни на сторонах. Можно показать, что площадь каждого из этих треугольников одинакова и равна $1/2$, а следовательно, площадь многоугольника равна половине их

количества. Чтобы найти это число, обозначим через n число вершин многоугольника, через i — число узлов внутри его и b — число узлов на сторонах, включая вершины. Тогда сумма углов всех треугольников равна πT . Теперь найдем эту сумму другим способом.

Угол при вершине с вершиной в любом внутреннем узле составляет 2π , т. е. общая сумма таких углов равна $2\pi i$; общая сумма углов при узлах на сторонах, но не в вершинах равна $(b - n)\pi$, а сумма углов при вершинах многоугольника — $(n - 2)\pi$. Таким образом, $\pi T = 2\pi i + (b - n)\pi + (n - 2)\pi$, откуда получаем выражение для площади S многоугольника, известное как формула Пика.

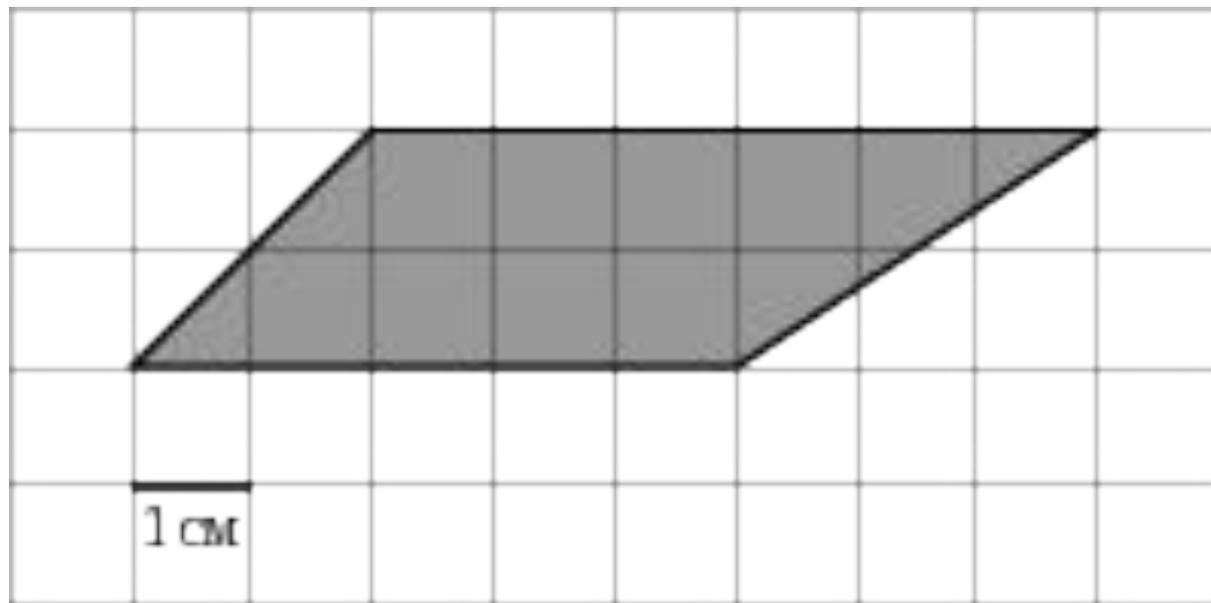
Например, на рисунке $b = 9$, $i = 24$, а следовательно, площадь многоугольника равна $27,5$.

Применение.

Итак, вернемся к заданию В6. Теперь, зная новую формулы, мы легко сможем найти площадь этого четырехугольника.

Так как $B = 5$; $G = 14$, то $5+14:2-1=11$ (см в квадрате)

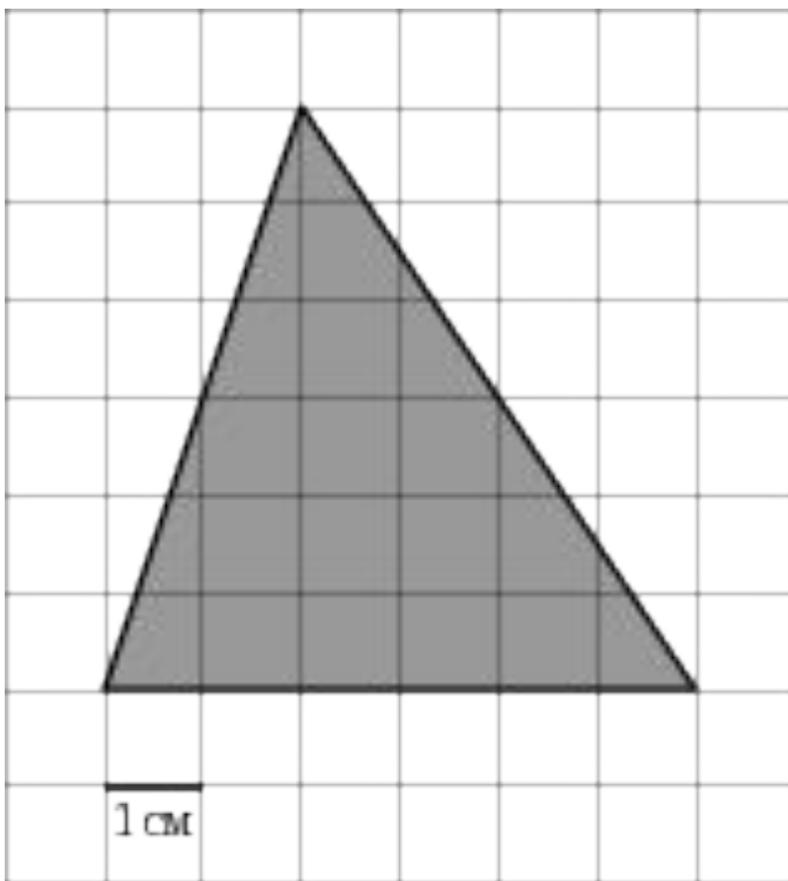
Площадь данного четырехугольника равна 11 см в квадрате.



По той же формуле мы можем найти площадь треугольника.

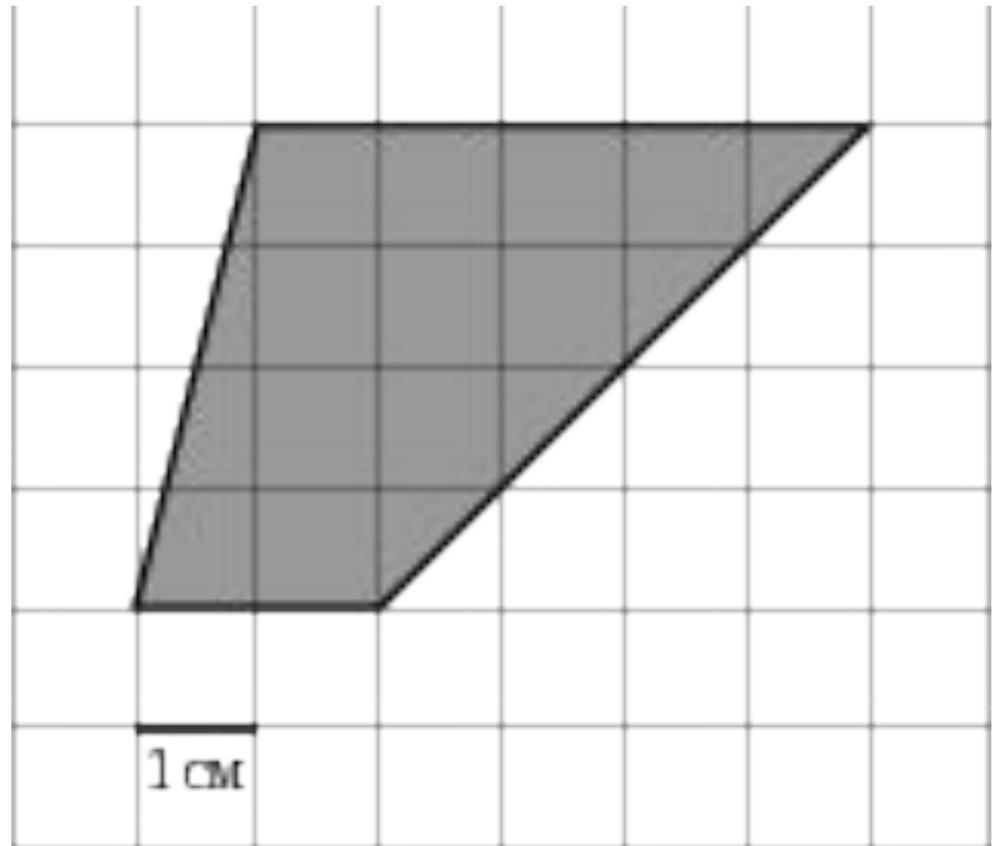
Так как В-14, Г-10, то $14+10:2-1=18$ (см в квадрате)

Площадь данного треугольника равна 18 см в квадрате.



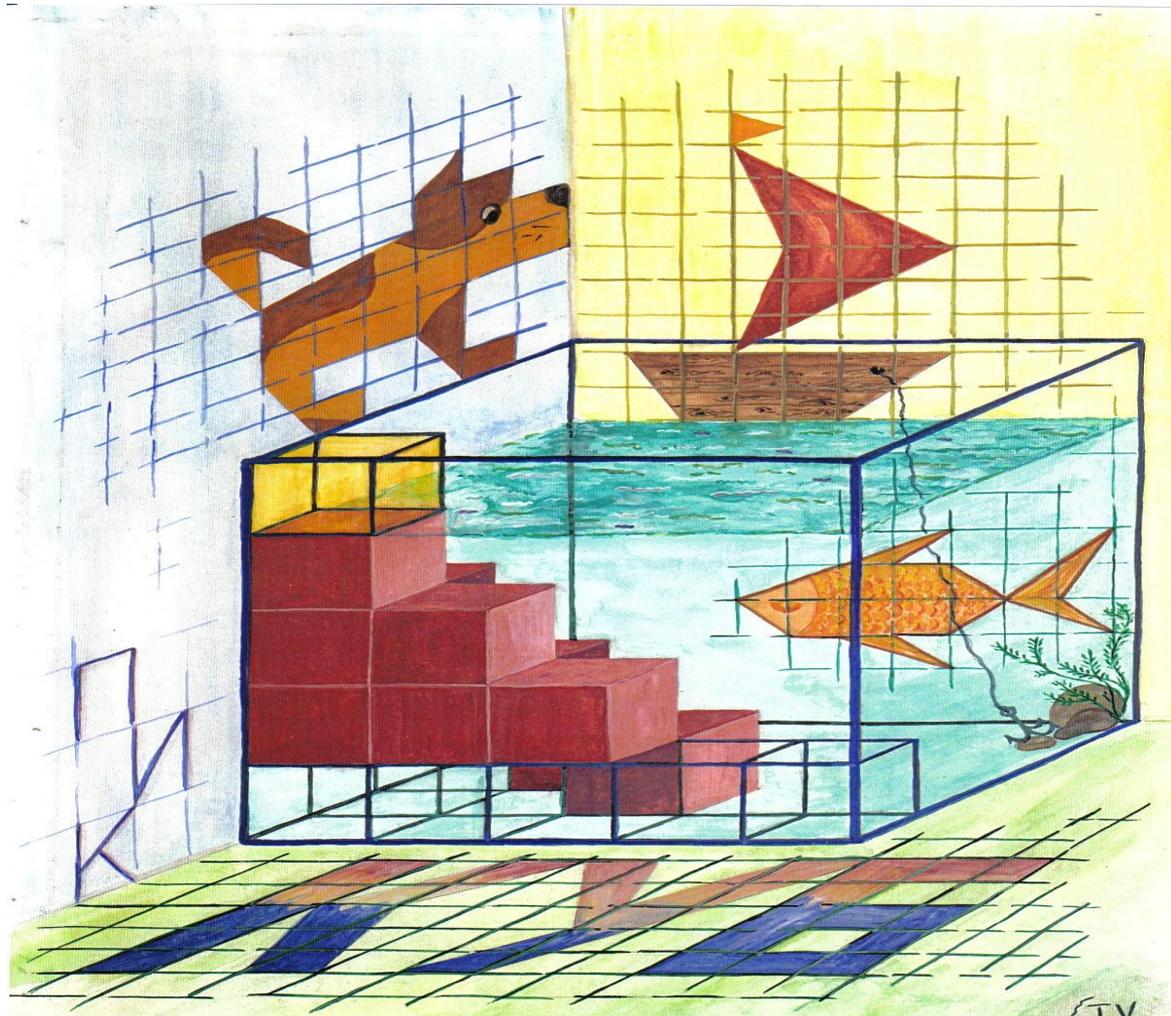
Если В-9, Г-12, тогда: $9+12:2-1=14$ (см в квадрате)

Площадь данного четырехугольника равна 14 см в квадрате.

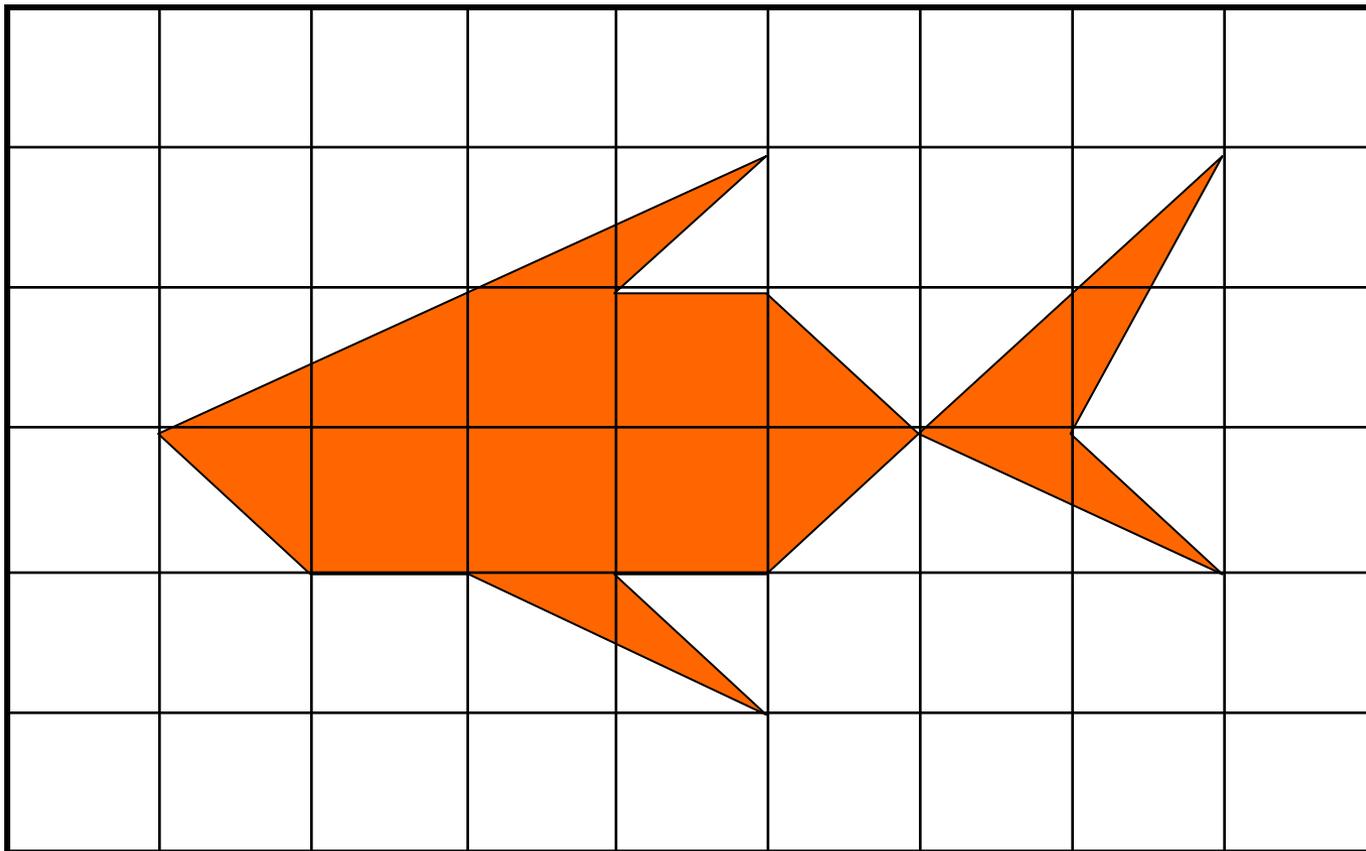


Области применения формулы.

Помимо того, что формула применяется в различного рода экзаменах, заданиях и так далее, она сопровождает весь окружающий нас мир.



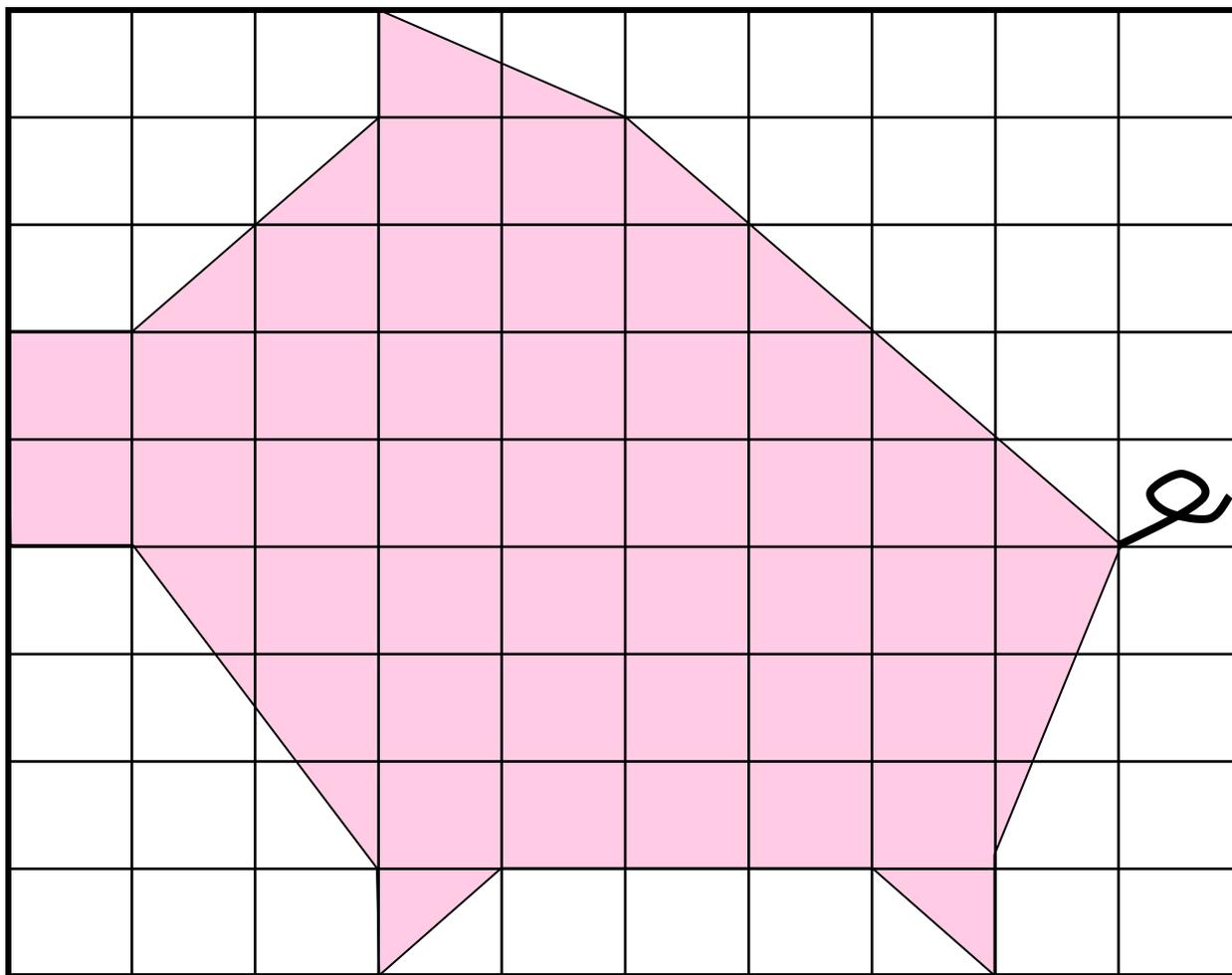
- По формуле Пика $S = B + \frac{1}{2}\Gamma - 1$
 - 1) туловище $B=9, \Gamma=26, S=9 + \frac{1}{2} \cdot 26 - 1 = 9 + 13 - 1 = \underline{21}$
 - 2) хвост $B=0, \Gamma=8, S=0 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = \underline{3}$
 - 3) $S = \underline{21} + \underline{3} = \underline{24}$



◦ По формуле Пика $S = B + \frac{1}{2}\Gamma - 1$

$$B=36, \Gamma=21$$

$$S = 36 + \frac{1}{2} \cdot 21 - 1 = 36 + 10,5 - 1 = 45,5$$



Заключение.

В итоге, я пришла к выводу, что существует много различных способов решения задач на нахождение площади, не изучаемых в школьной программе, и показала их на примере формулы Пика.

Справочник.

1. Многоугольник без самопересечений называется решётчатым, если все его вершины находятся в точках с целочисленными координатами (в декартовой системе координат).
2. Точка координатной плоскости называется целочисленной, если обе её координаты целые.