



Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар кафедрасы

Презентация

Тақырыбы: Кеңістіктегі жазықтықтың
теңдеуі. Кеңістіктегі жазықтық пен түзудің
өзара орналасуы.

Орындаған: Ибрагимова Фатима
Тобы: ФӨТҚА 06-21
Қабылдаған: Байділдаева А. С.

Жоспар

Кіріспе:

1. Жазықтықтың теңдеуі
2. Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі
3. Үш және екі нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі
4. Кеңістіктегі түзудің канондық, параметрлік теңдеулері

Қорытынды

Пайдаланылған әдебиеттер

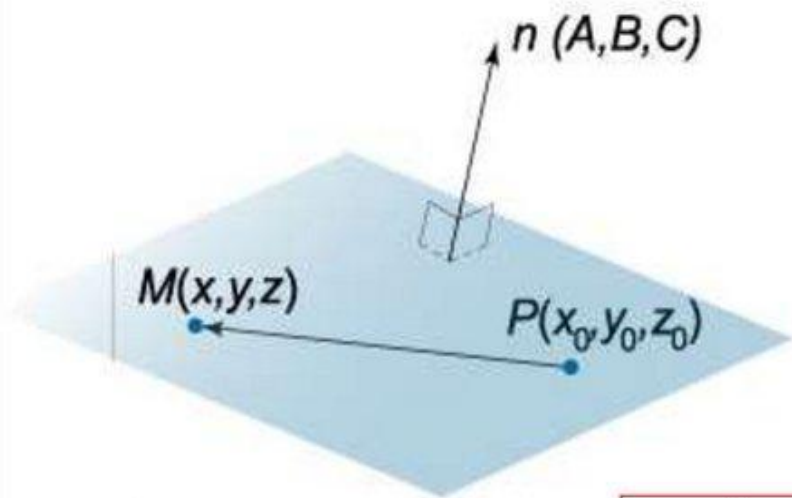
1. Жазықтықтың теңдеуі

Жазықтықта $P(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және жазықтыққа перпендикуляр болатын $n(A, B, C)$ векторы берілсін.

$M(x, y, z)$ жазықтықтың кез келген нүктесі

$$\overrightarrow{PM} \perp n \Rightarrow \overrightarrow{PM} \cdot n = 0$$

$$\overrightarrow{PM}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ n(A, B, C)$$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

(1) – берілген $P(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $n(A, B, C)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі.

Мысал. $M_0(1;2;1)$ нүктесінен өтетін және $n(2;3;-4)$ векторына перпендикуляр болып өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: (1) теңдеуді пайдалансақ

$$2(x-1)+3(y-2)-4(z-1)=0$$

$$2x+3y-4z-4=0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

теңдеуін түрлендіріп

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(2)

(2) – жазықтықтың жалпы теңдеуі, мұндағы

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Жалпы теңдеуінің кейбір дербес жағдайлары:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

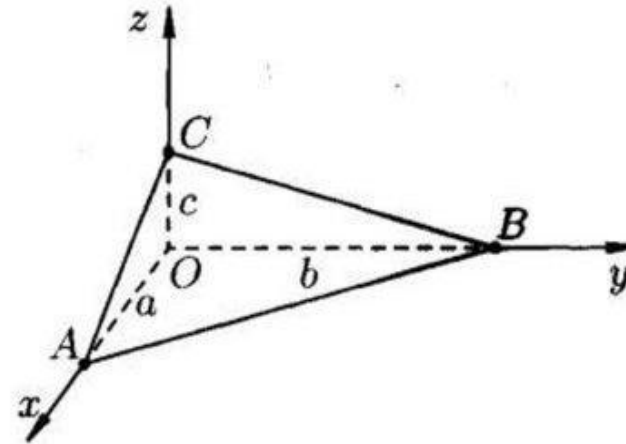
- $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ жазықтығы координата жүйесінің бас нүктесінен өтеді.
- $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ жазықтығы Oz осіне параллель болады.
- $B = 0, C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$ немесе $x = -\frac{D}{A}$ жазықтығы OYZ координаталық жазықтығына параллель болады.
- $B = 0, C = 0, D = 0 \Rightarrow Ax = 0, x = 0$ теңдеуі OYZ координаталық жазықтығының теңдеуі болады.

Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Егер $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ болса,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$



түріне келтіруге болады. Мұнда $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$

деп белгілесе,

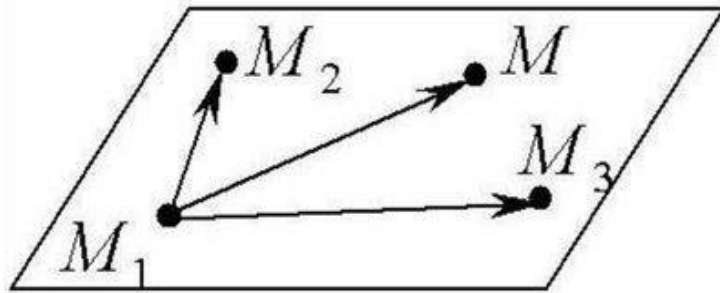
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(3)

(3) –жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі.

Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Кеңістікте $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері берілсін. Осы нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін табу үшін жазықтықта жатқан кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық. Онда $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ векторлары компланар векторлар.



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(4)

(4) - үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

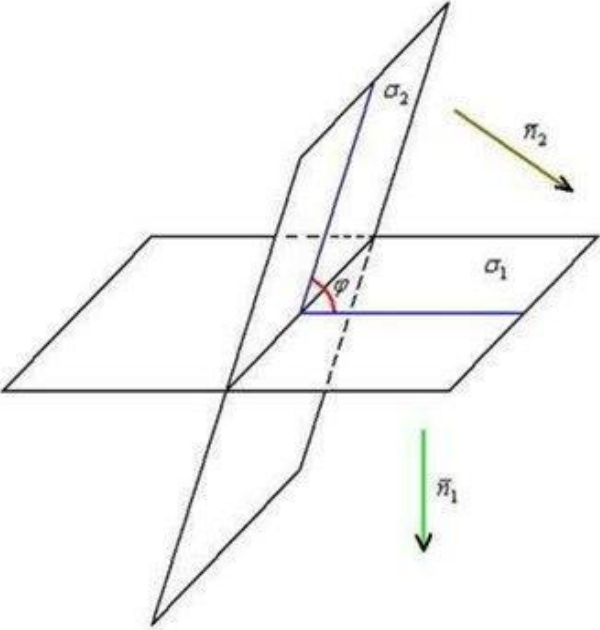
Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

Кеңістікте $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі арақашықтығын келесі формуламен табылады:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \quad (5)$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

Кеңістікте $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтарының арасындағы бұрыш келесі формуладан анықталады:


$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

Екі жазықтықтың параллельдік шарты

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Екі жазықтықтың перпендикулярлық шарты

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі

Айталық, түзде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және осы түзуге параллель $\vec{a}(m, n, p)$ векторы берілсін. $\vec{a}$ - түзудің **бағыттаушы векторы** деп аталады. Түзуден кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық. Онда



$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad \vec{a}(m, n, p)$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (7)$$

(7) - кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі.

Кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеуі

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі берілсін

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \\ \frac{z-z_0}{p} = t \end{cases} \Rightarrow$$

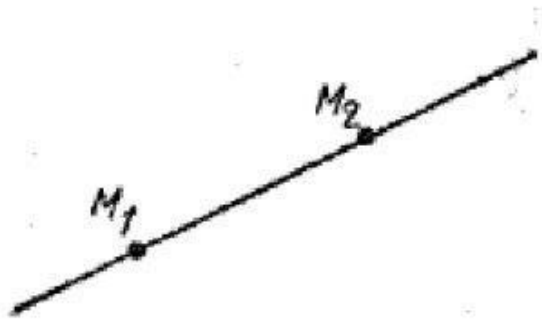
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

(8)

(8) - кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеуі

Кеңістіктегі екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Кеңістіктегі $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазайық.



$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

векторын осы түзудің бағыттаушы векторы деп алсақ, онда M_1 нүктесі арқылы өтетін теңдеуді (7) теңдеу арқылы

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

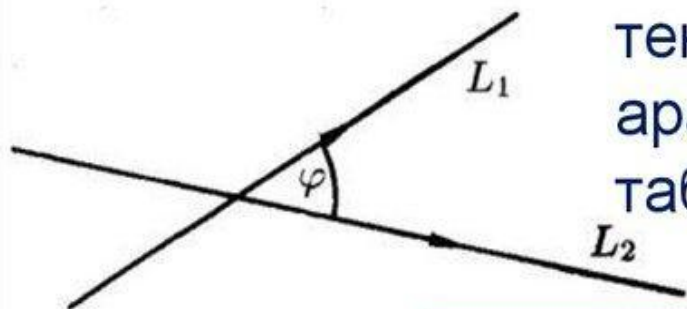
(9)

аламыз. Бұл теңдеу екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі деп аталады.

Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш

Кеңістіктегі

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{және} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$



теңдеулерімен анықталатын екі түзудің арасындағы бұрыш келесі формуладан табылады:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (10)$$

Кеңістіктегі түзулердің параллельдік шарты

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (11)$$

Кеңістіктегі түзулердің перпендикулярлық шарты

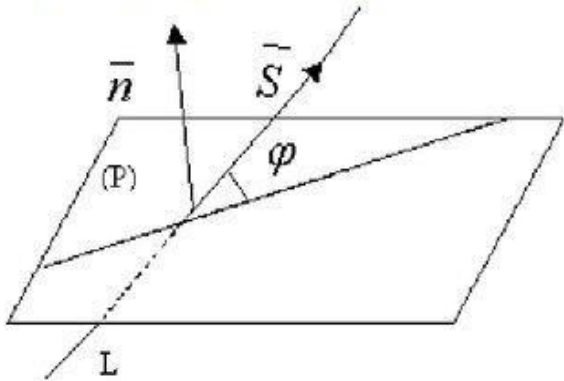
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (12)$$

Жазықтық пен түзудің арасындағы бұрыш

Кеңістікте $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуімен берілген жазықтық пен

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

теңдеуімен берілген түзудің арасындағы бұрыш келесі формула арқылы табылады:



$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

(13)

Жазықтық пен түзудің параллельдік шарты

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Жазықтық пен түзудің перпендикулярлық шарты

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Қорытынды

- Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазбас бұрын жазықтыққа перпендикуляр түзудің анықтамасын еске түсіріңіз: егер түзу осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болса, жазықтыққа перпендикуляр болады. Осы анықтамадан жазықтықтың кез-келген қалыпты векторы осы жазықтықта жатқан нөлдік емес векторға перпендикуляр екендігі шығады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1. Алматы, 2016.
2. Математика. I-бөлім: оқулық/ Қ.Ж.Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014.-144 б.
3. Э.Крофт. Математика негіздері. 1-бөлім: оқулық/ алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2013.- 391б.
4. Қ.И.Қаңлыбаев, О.С.Сатыбалдиев, С.А.Джанбердиева. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ ҚР БҒМ.-Алматы: Дәуір 2013.- 368бет.
5. Основы высшей математики и математической статистики: учебник/ И.В. Павлушков (и др.). -2-е изд., испр. – М.: ГЭОТАР – Медиа, 2012.- 432с.