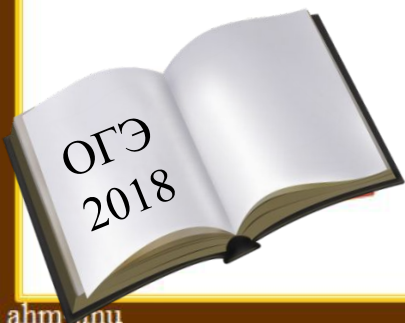




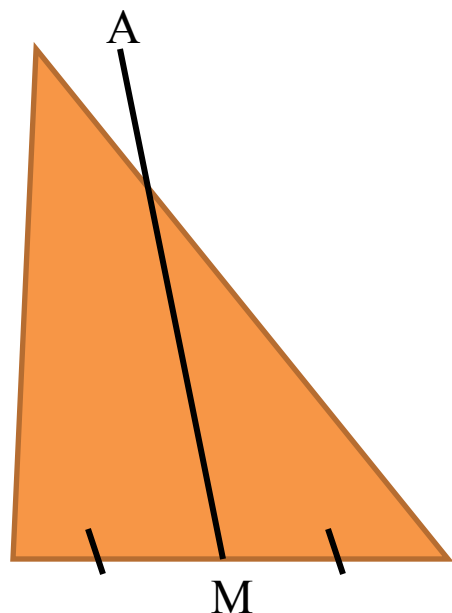
Подготовка к ГИА модуль «Геометрия» Треугольники





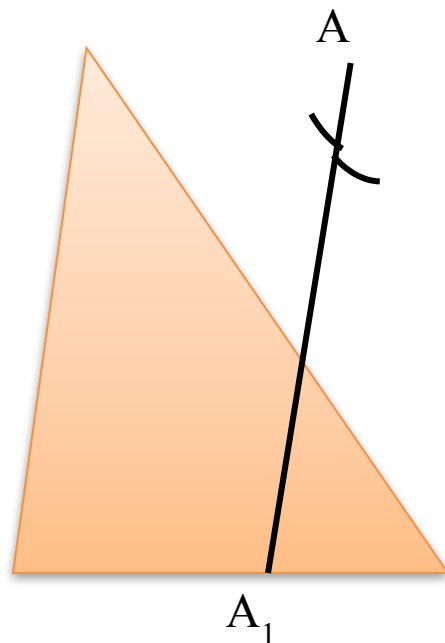
Высота, медиана, биссектриса треугольника

Отрезок, соединяющий
вершину треугольника с
серединой
противоположной
стороны, называется
медианой



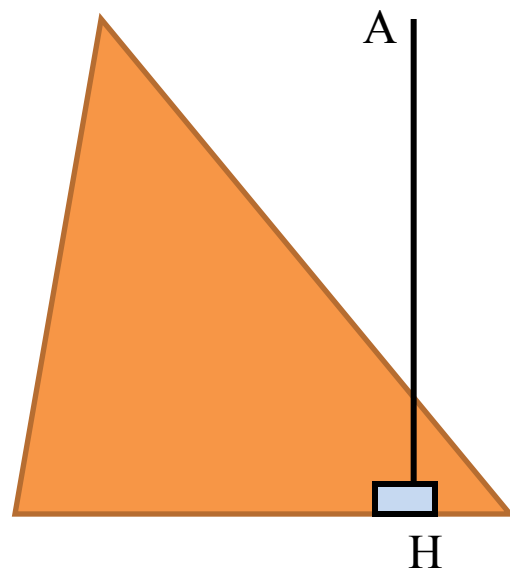
AM – медиана

Отрезок биссектрисы угла
треугольника, соединяющий
вершину треугольника с точкой
противоположной стороны,
называется биссектрисой
треугольника

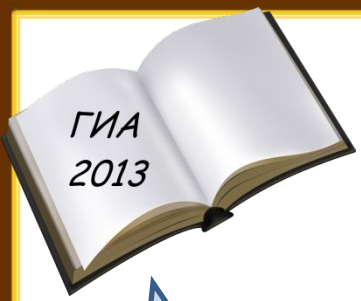


AA₁ – биссектриса

Перпендикуляр,
проведенный из
вершины треугольника к
прямой, содержащей
противоположную
сторону, называется
перпендикуляром



АН - высота



Средняя линия треугольника

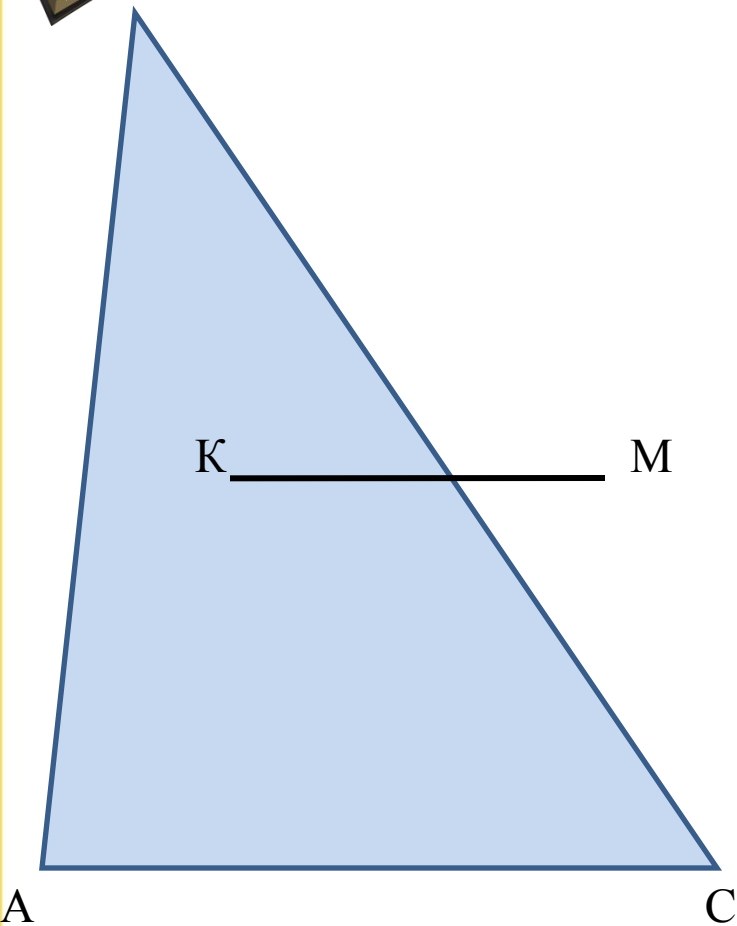
Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

КМ – средняя линия

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны

$$KM \parallel AC$$

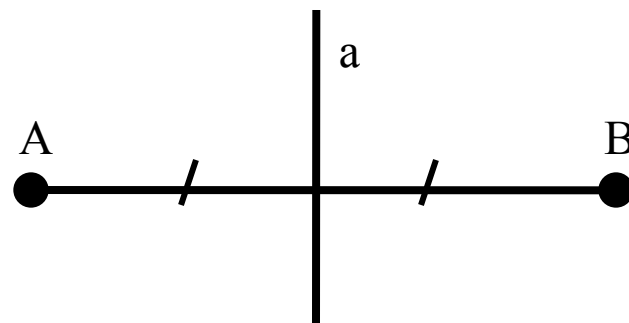
$$KM = \frac{1}{2} AC$$





Серединный перпендикуляр

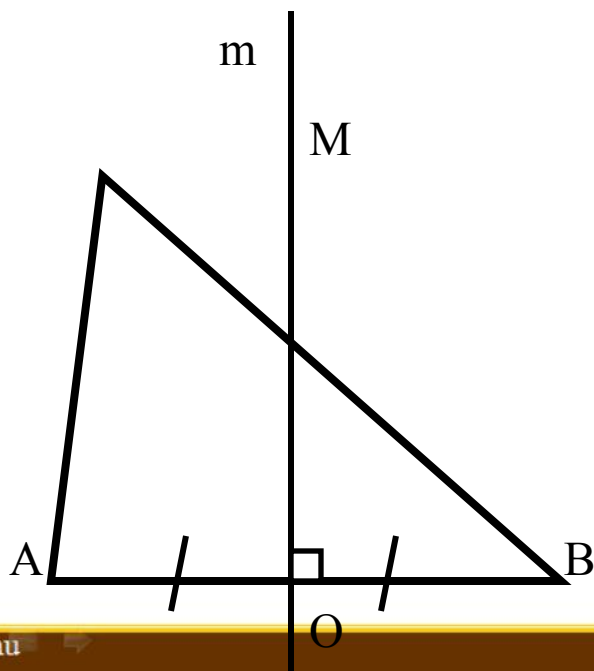
Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нему



a – серединный перпендикуляр к отрезку AB

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему

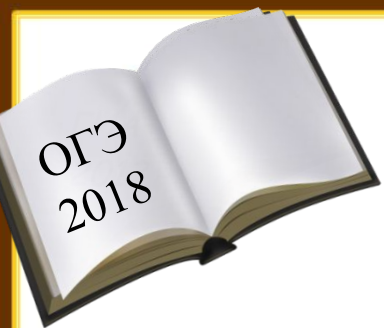


m – серединный перпендикуляр к отрезку AB ,

O – середина отрезка AB

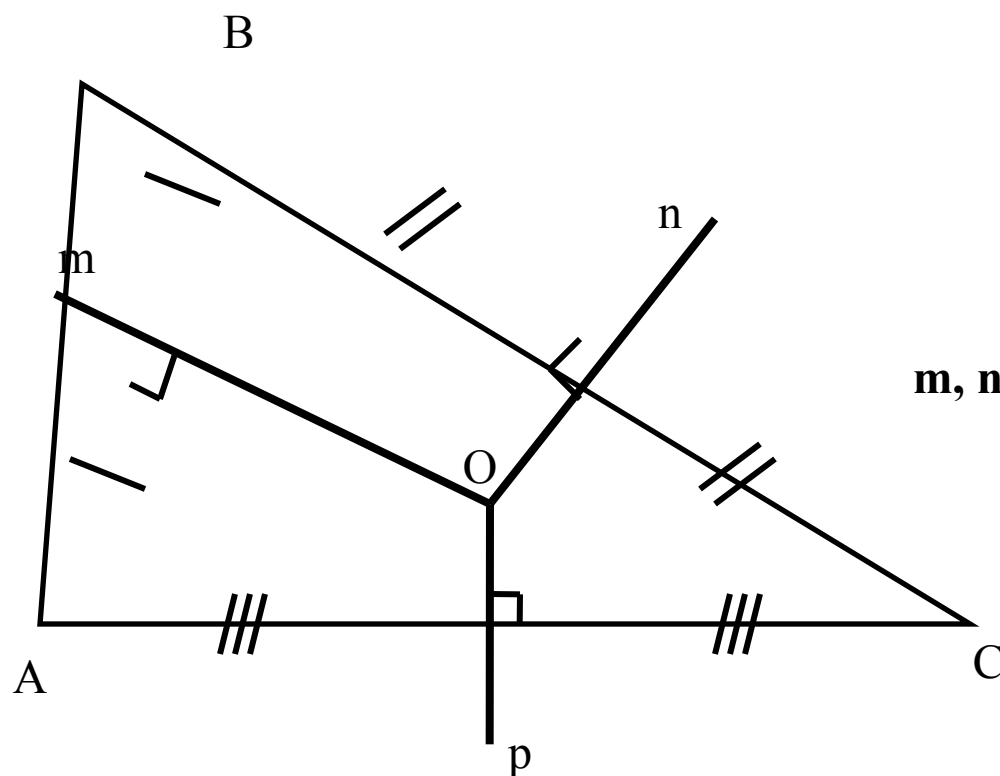
$M \in m$

$AM = BM$



Точка пересечения серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке

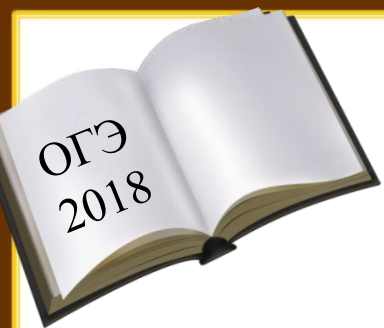


$$m \perp AB,$$

$$n \perp BC,$$

$$p \perp AC$$

m, n, p пересекаются в точке O



Точка пересечения биссектрис треугольника

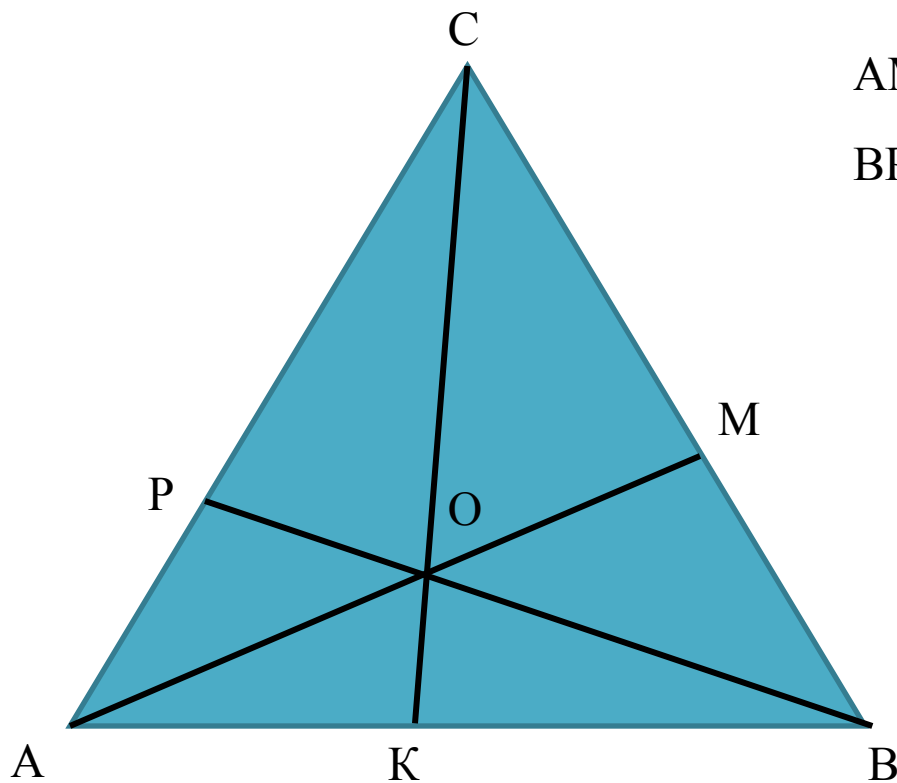
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке

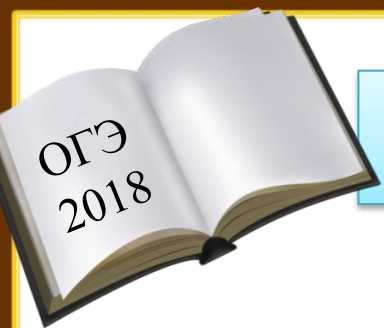
СК – биссектриса $\angle C$

АМ – биссектриса $\angle A$

ВР – биссектриса $\angle B$

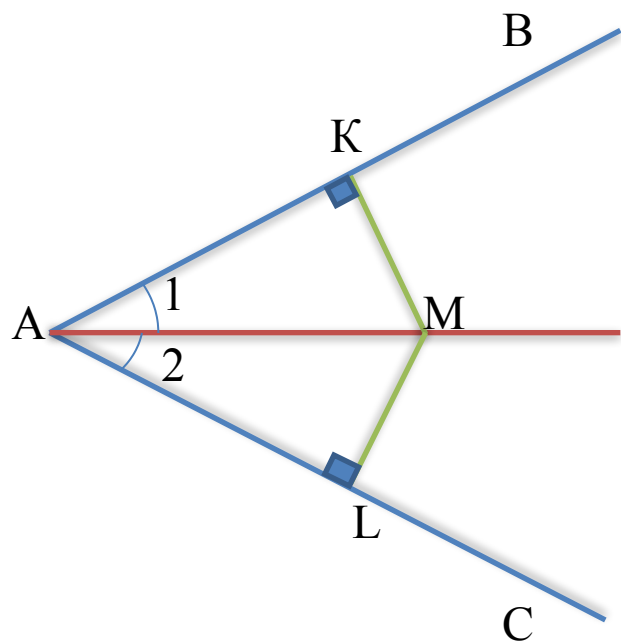
О – точка пересечения биссектрис





Свойство биссектрисы угла

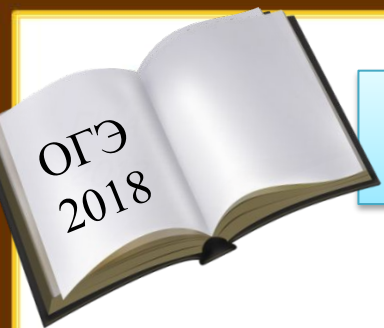
АМ-биссектриса угла ВАС



Каждая точка биссектрисы
неразвернутого угла
равноудалена от его сторон

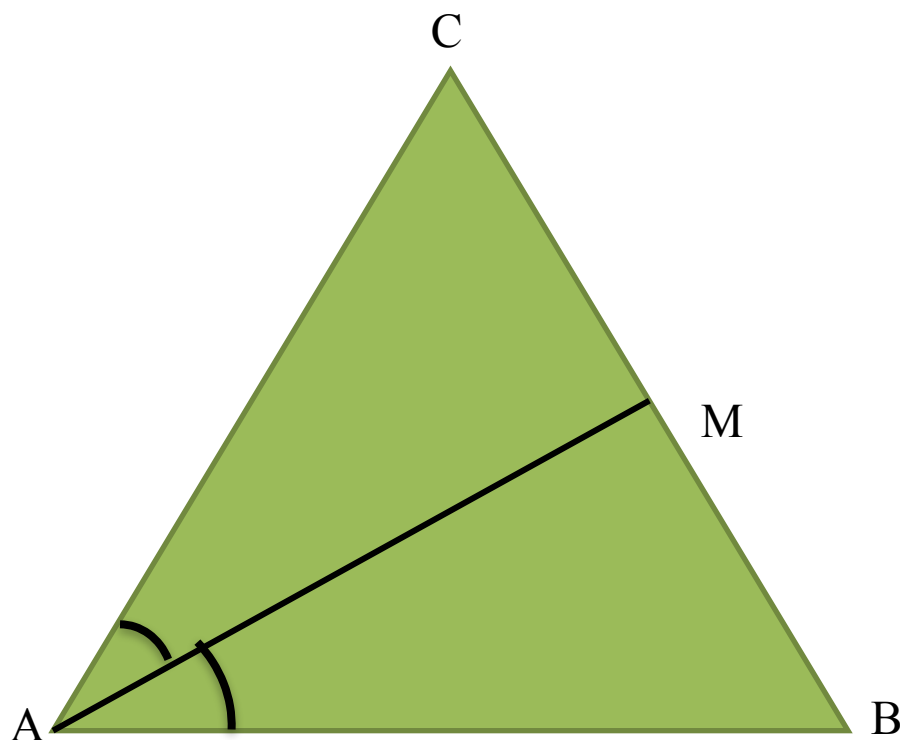
Каждая точка, лежащая
внутри угла и
равноудаленная от сторон
угла, лежит на его
биссектрисе

$$KM = LM$$

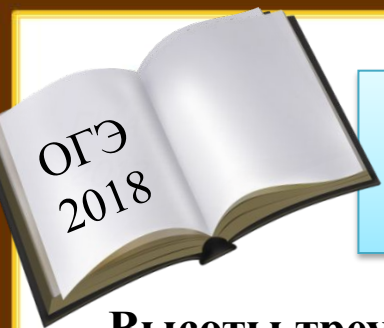


Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

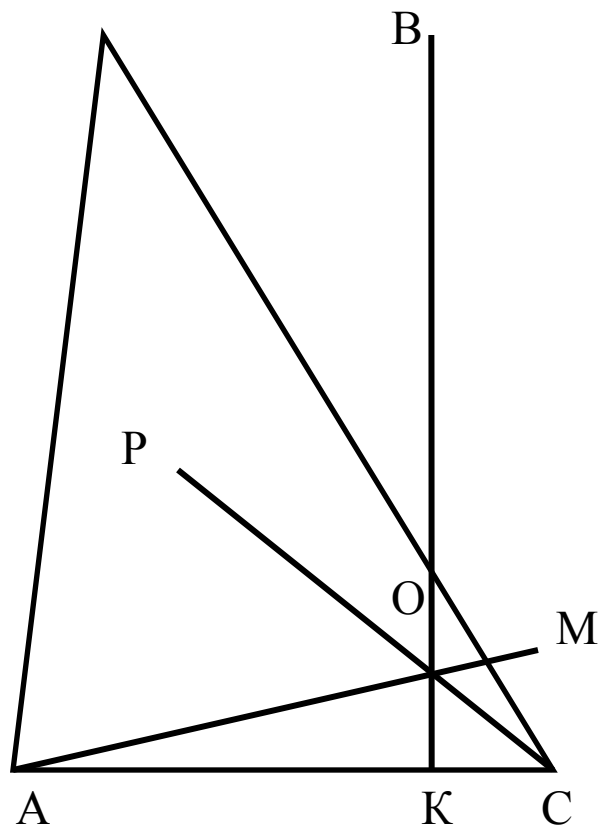


$$\frac{CM}{AC} = \frac{MB}{AB}$$



Точка пересечения высот треугольника

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке

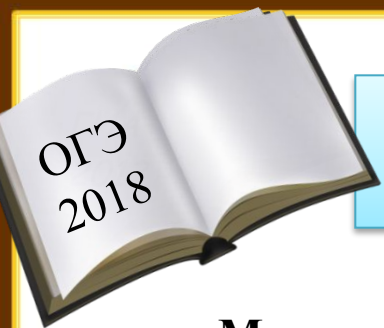


$$BK \perp AC$$

$$CP \perp AB$$

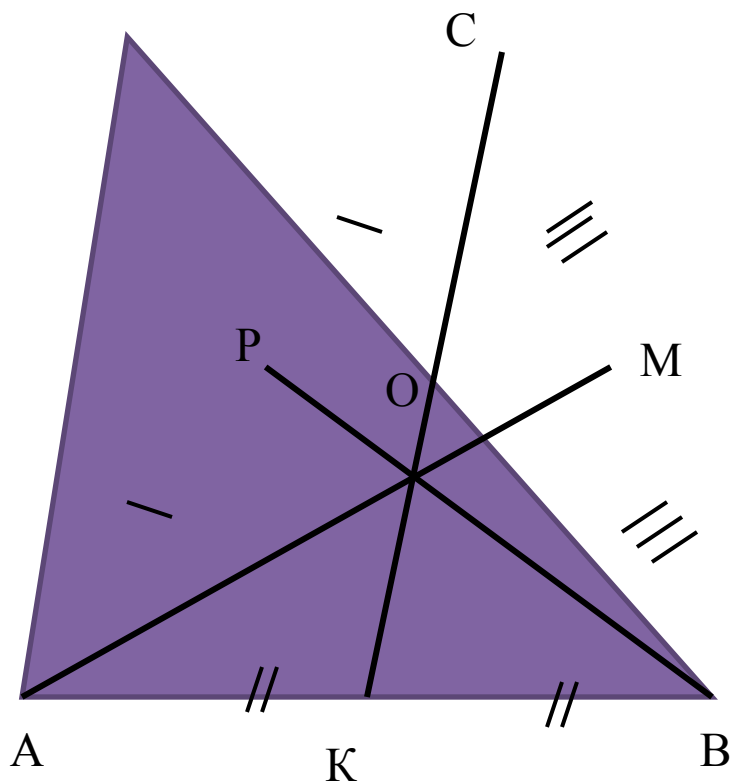
$$AM \perp BC$$

O – точка пересечения высот



Точка пересечения медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины

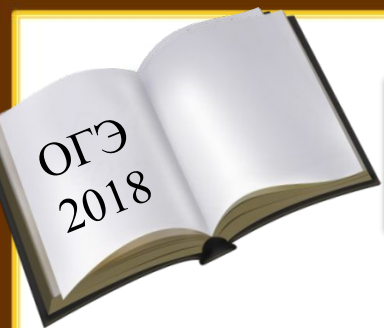


BP, CK, AM – медианы треугольника ABC
O – точка пересечения медиан

$$CO : KO = 2 : 1$$

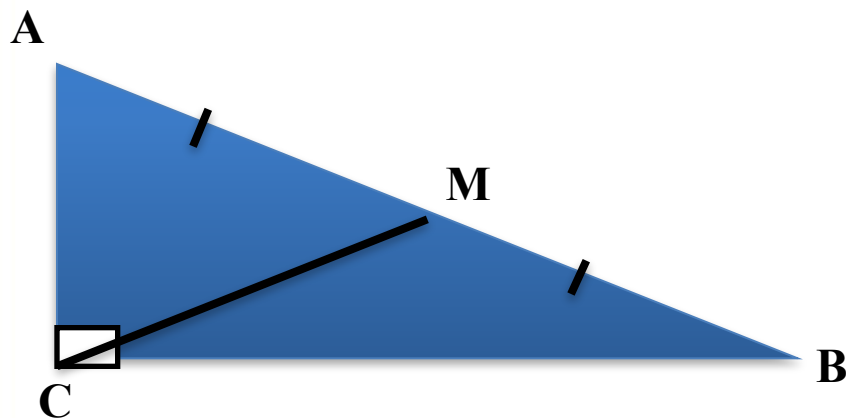
$$AO : MO = 2 : 1$$

$$BO : PO = 2 : 1$$



Теорема о медианах

$$AM=MB=CM$$



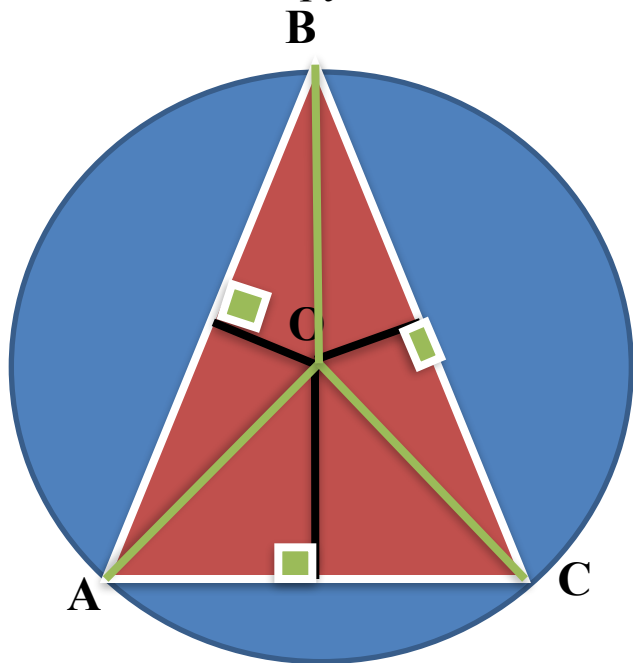
Медиана прямоугольного треугольника проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы

Если медиана треугольника равна половине стороны к которой она проведена, то треугольник прямоугольный



Описанный и вписанный треугольники

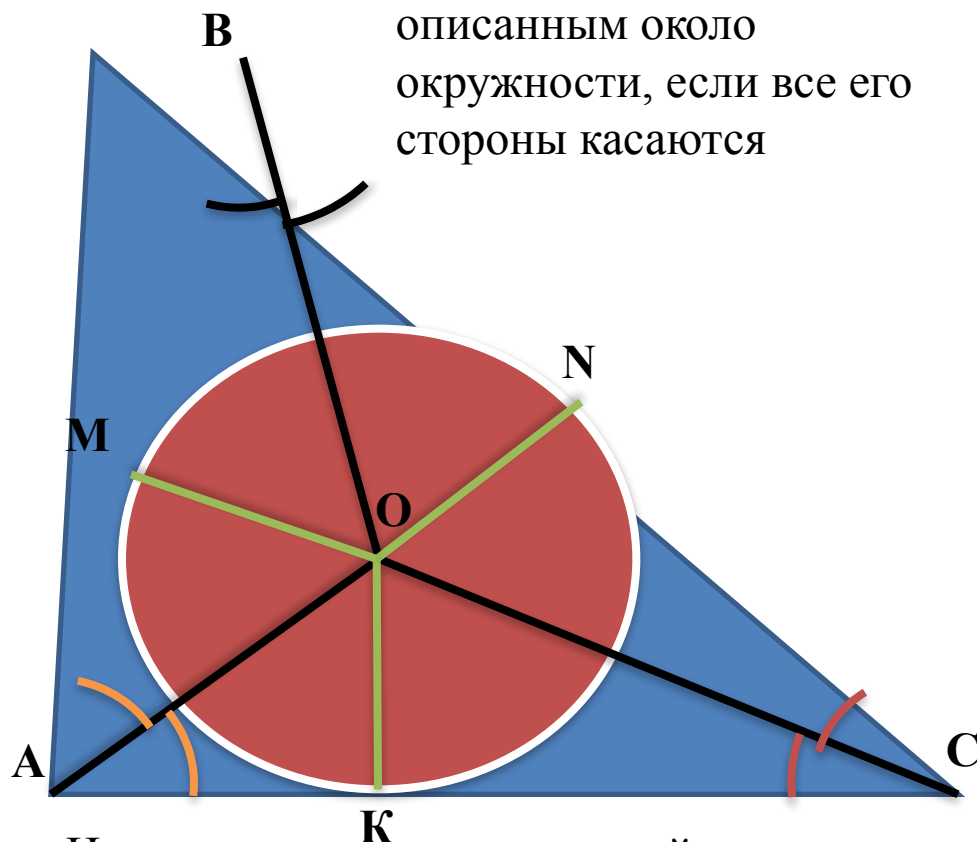
Треугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности



Центр окружности описанной около треугольника лежит на пересечении серединных перпендикуляров

$$AO = BO = CO = R$$

Треугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются

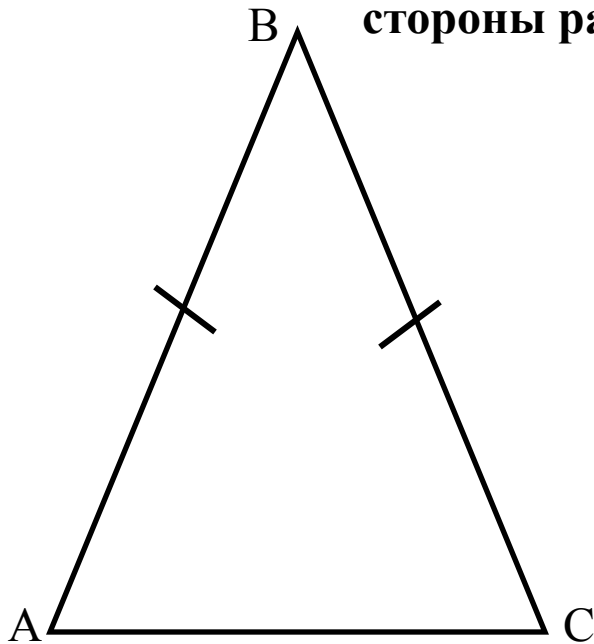


Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис

$$ON = OK = OM = r$$

Равнобедренный треугольник

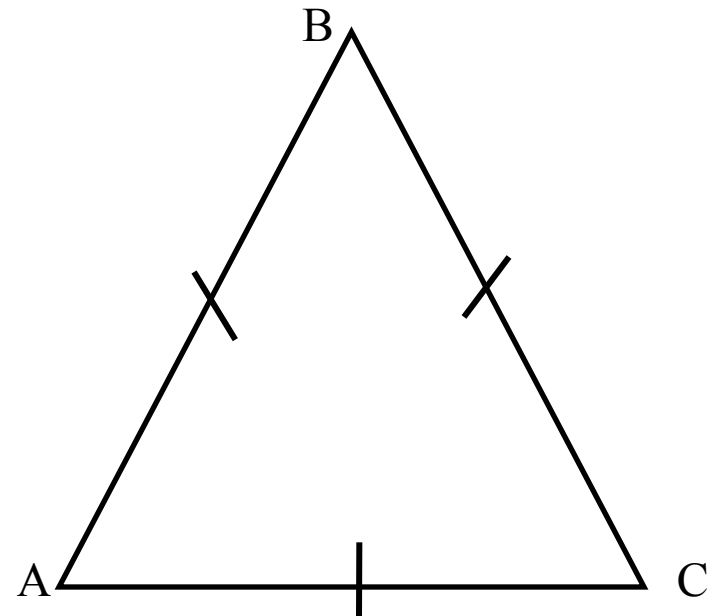
Треугольник называется
равнобедренным, если две его
стороны равны



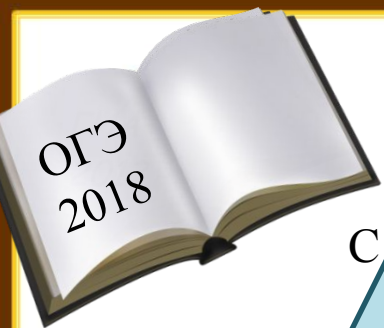
$$AB = BC$$

Равносторонний треугольник

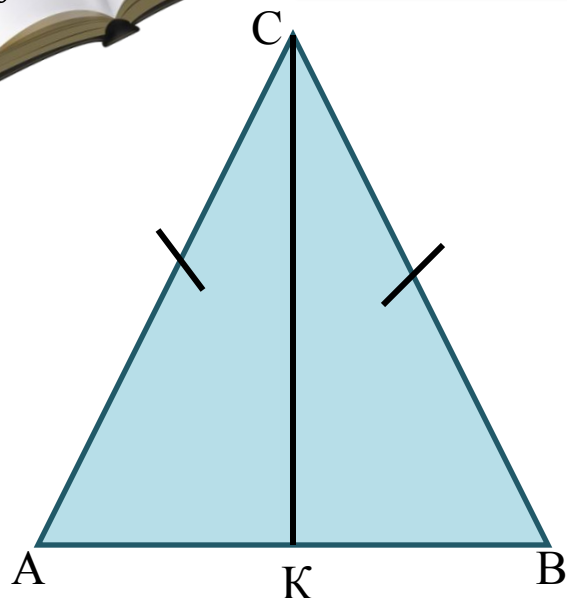
Треугольник, все стороны
которого равны, называется
равносторонним



$$AB = AC = BC$$



Свойства равнобедренного треугольника



$$AC = BC$$

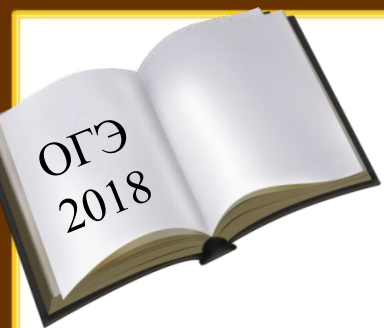
В равнобедренном треугольнике
углы при основании равны
 $\angle A = \angle B$

В равнобедренном треугольнике
биссектриса, проведенная к основанию,
является медианой и высотой

СК - биссектриса

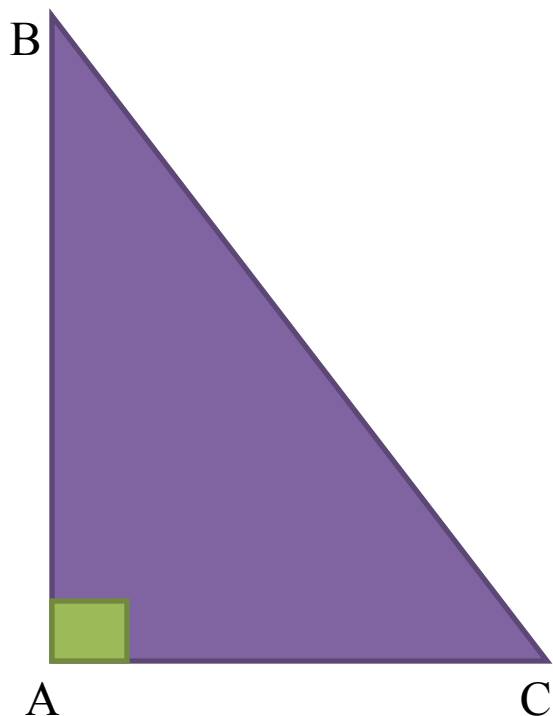
$$AK = KB, CK \perp AB$$

1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.
2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.



Прямоугольный треугольник

Треугольник, у которого один из углов прямой, называется прямоугольным

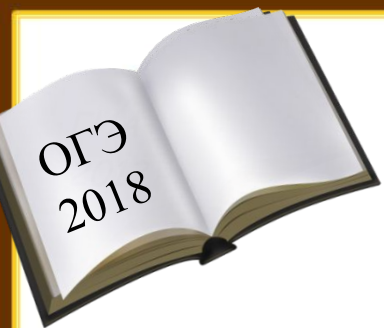


AB и AC – катеты
BC - гипотенуза

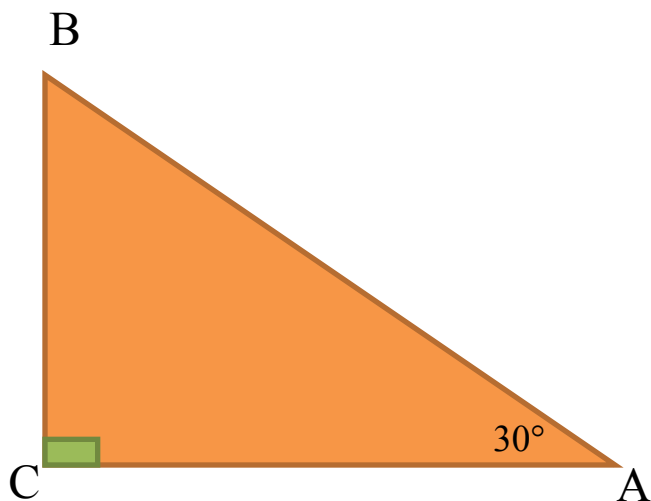
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



Свойства прямоугольного треугольника



$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle A &= 30^\circ \\ CB &= \frac{1}{2} AB\end{aligned}$$

$$\text{Если } CB = \frac{1}{2} AB, \text{ то } \angle A = 30^\circ$$

Сумма двух острых углов
прямоугольного треугольника
равна 90°

Катет прямоугольного треугольника,
лежащий против угла в 30° , равен
половине гипотенузы

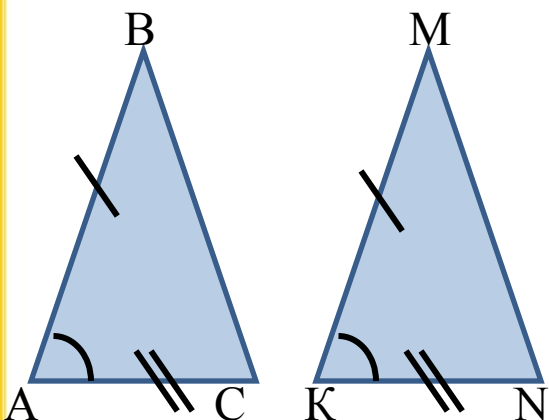
Если катет прямоугольного
треугольника равен половине
гипотенузы, то угол, лежащий
против этого катета, равен 30°



Признаки равенства треугольников

I признак

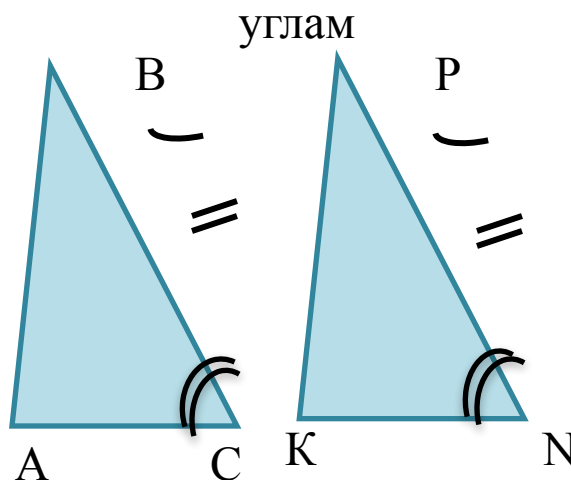
По двум сторонам и
углу между ними



Если $\angle A = \angle K$,
 $AB = KM$,
 $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

II признак

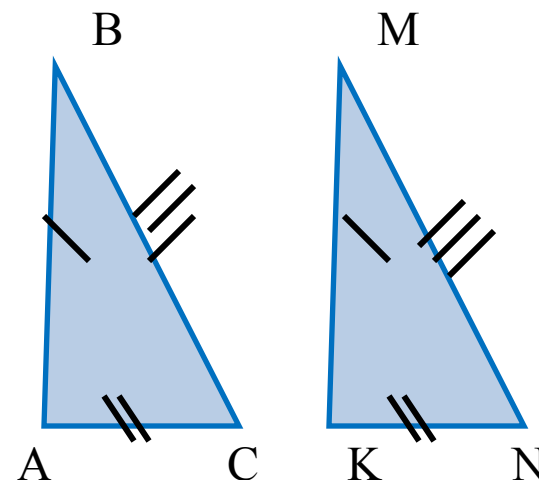
По стороне и
прилежащим к ней
углам



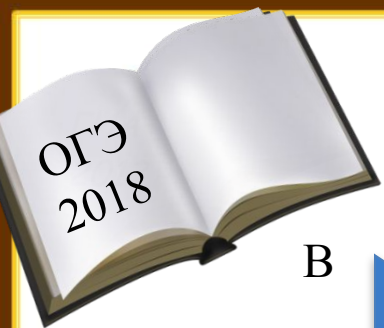
Если $\angle B = \angle P$
 $\angle C = \angle N$, $BC = PK$,
то $\triangle ABC = \triangle KPN$

III признак

По трем сторонам



Если $AB = KM$,
 $AC = KN$, $BC = MN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$



Признаки равенства прямоугольных треугольников

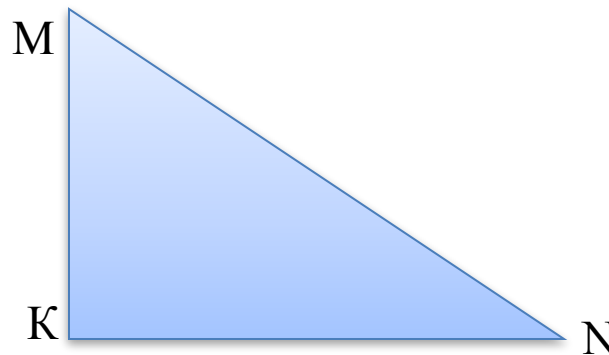


По двум катетам

Если $AB = KM$, $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

По гипотенузе и острому
углу

Если $BC = MN$, $\angle B = \angle M$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

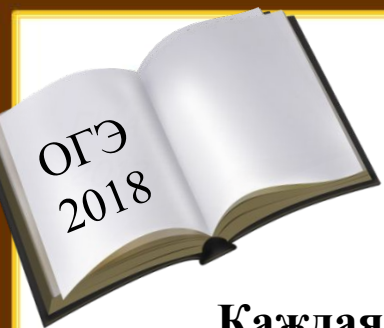


По катету и прилежащему
острому углу

Если $AB = KM$, $\angle B = \angle M$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

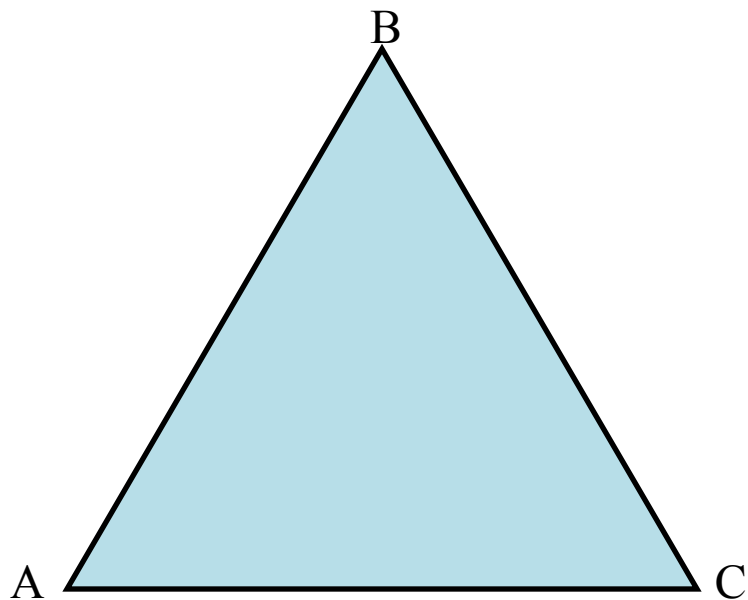
По гипотенузе и катету

Если $BC = MN$, $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$



Неравенство треугольника

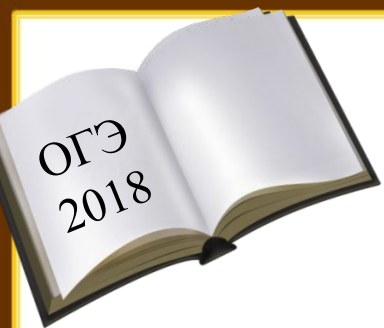
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон



$$AB < BC + AC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AB + AC$$



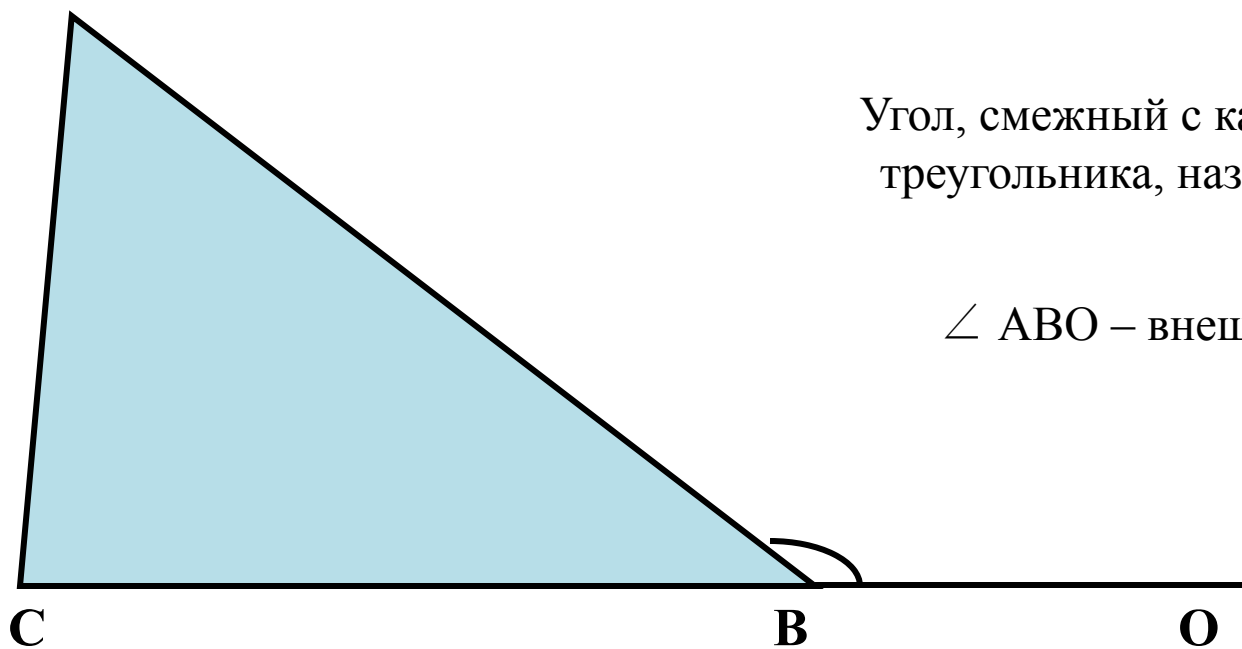
Сумма углов треугольника равна 180°

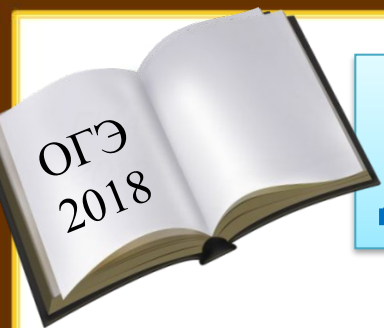
A

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

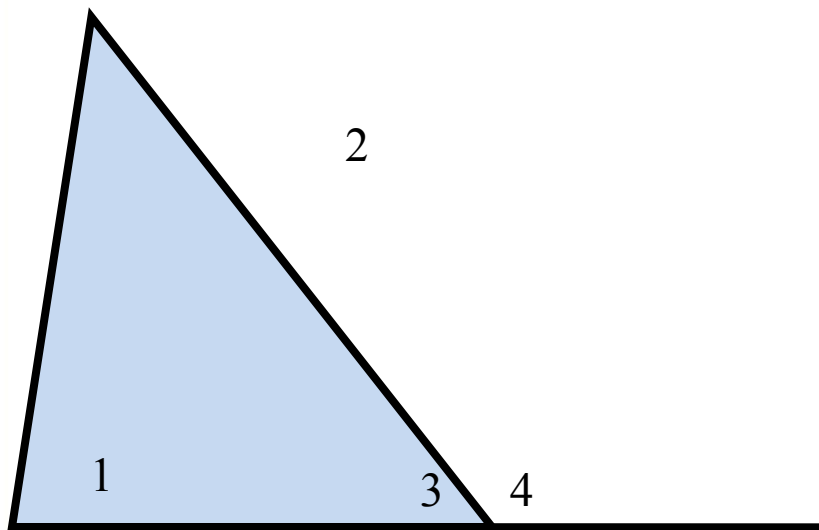
Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется внешним

$\angle ABO$ – внешний





Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним

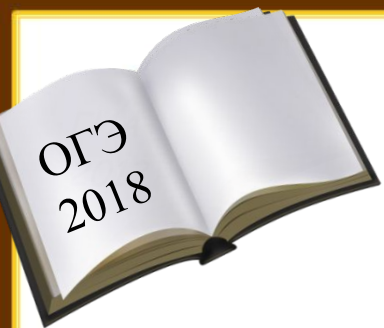


$\angle 3$ смежный с $\angle 4$

$$\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$$

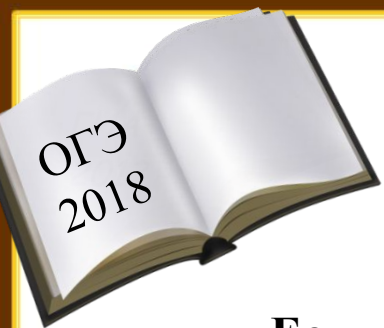


Зависимость между величинами сторон и углов треугольника

В треугольнике:

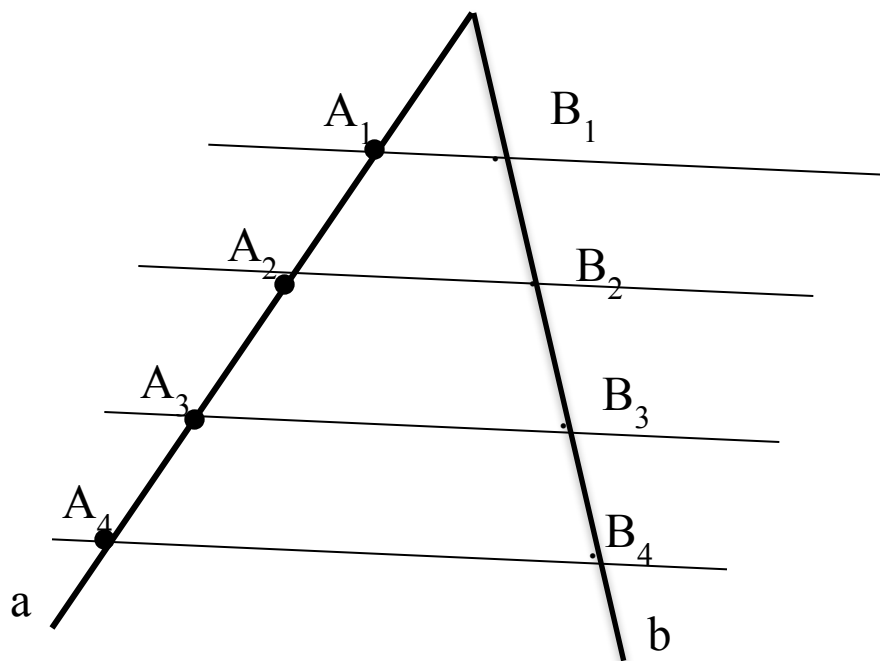
- 1) против большей стороны лежит больший угол;**
- 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона**

- 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета**
- 2. Если два треугольника равны, то треугольник равнобедренный**



Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

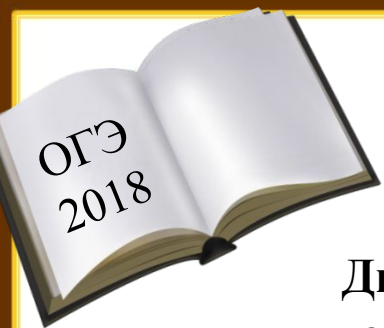


$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4$$

Проведем параллельные прямые

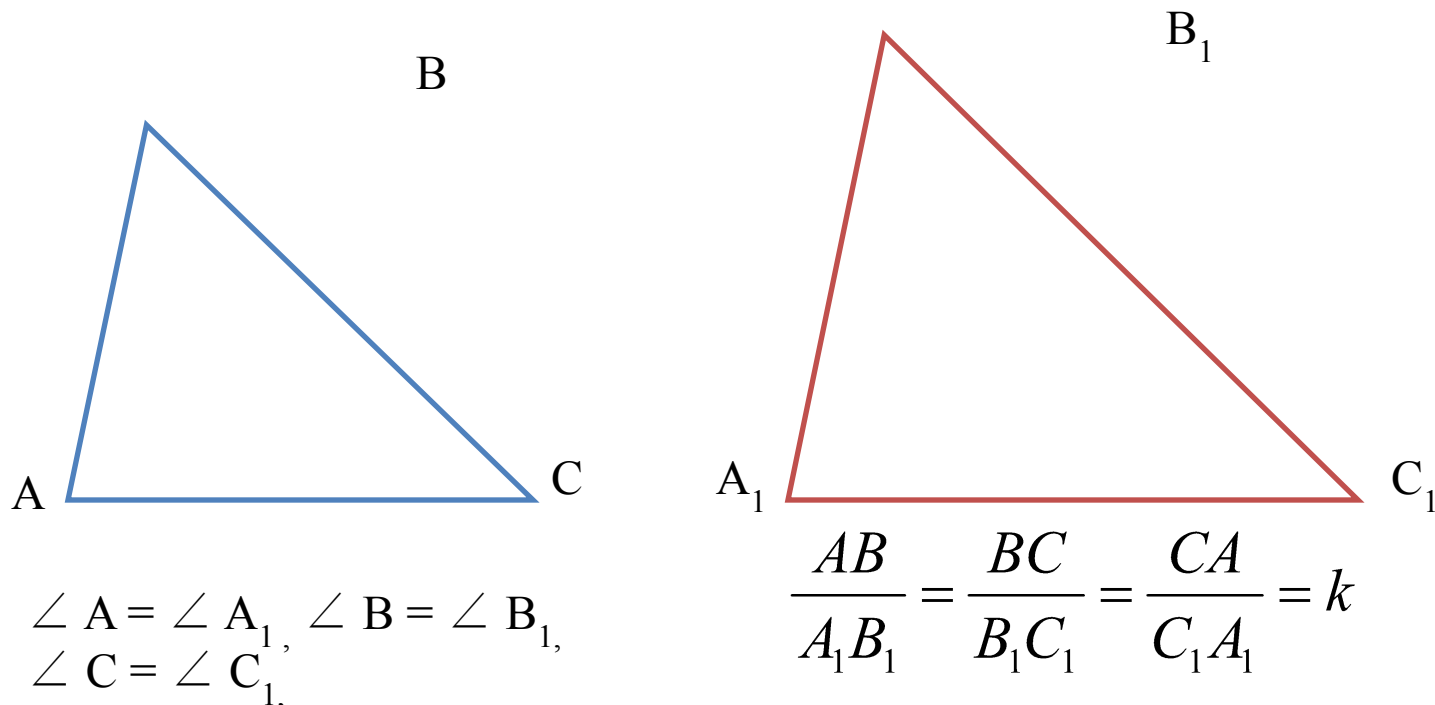
$$A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel A_3 B_3 \parallel A_4 B_4$$

$$\text{то } B_1 B_2 = B_2 B_3 = B_3 B_4$$



Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого



k – коэффициент подобия

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

В

Р

$$\frac{AB}{KP} = \frac{AC}{KM} = \frac{BC}{PM}$$

Если

$$AB : KP = AC : KM,$$

$$\angle A = \angle K,$$

$$\text{то } \triangle ABC \sim \triangle KPM$$

Если

$$\angle A = \angle K,$$

$$\angle B = \angle M,$$

$$\text{то } \triangle ABC \sim \triangle KPM$$

$$\text{то } \triangle ABC \sim \triangle KPM$$

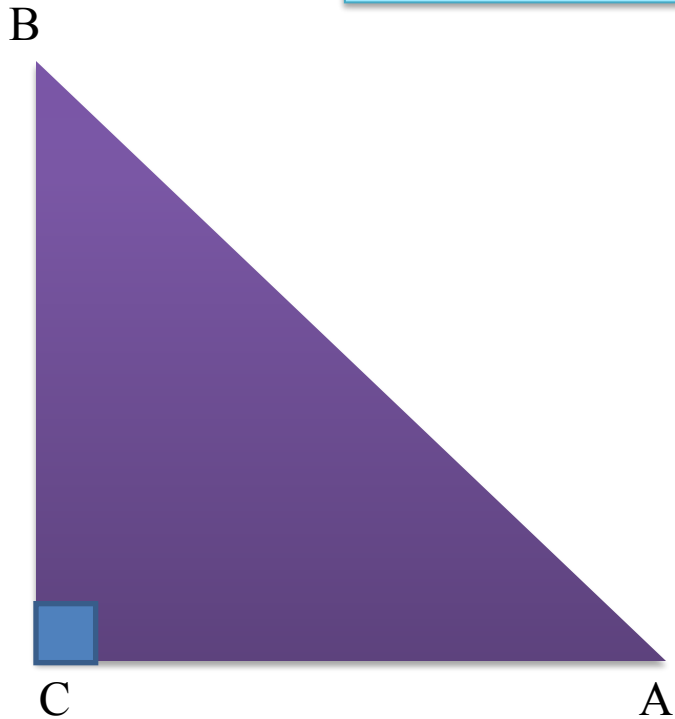
А

С

К

М

Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°



Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

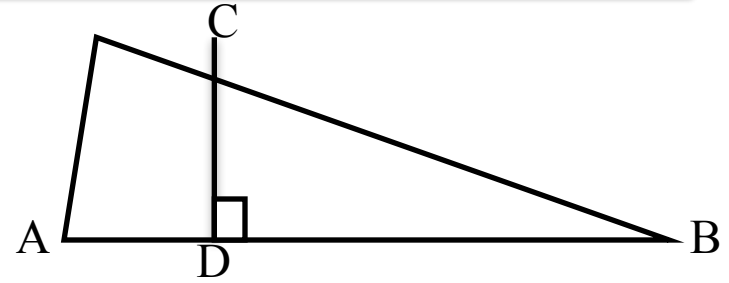
$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

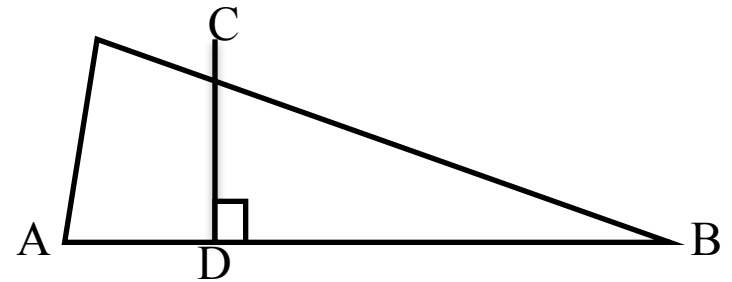
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые она делит гипотенузу.



$$CD^2 = AD \cdot DB; CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.



$$AC^2 = AD \cdot AB; AC = \sqrt{AD \cdot AB}$$

$$BC^2 = AB \cdot BD; BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$

**Отношение площадей подобных
треугольников равно квадрату
коэффициента подобия**

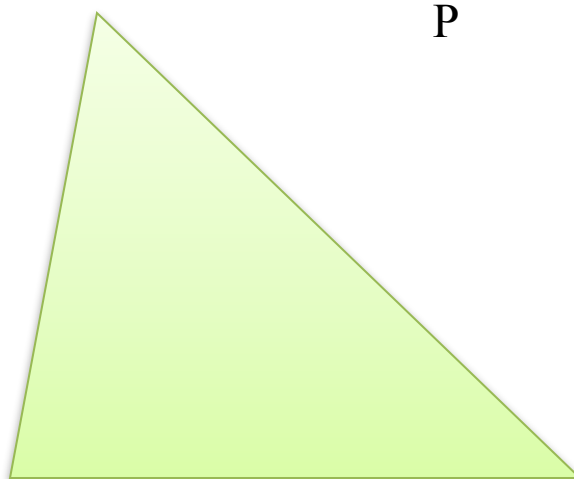
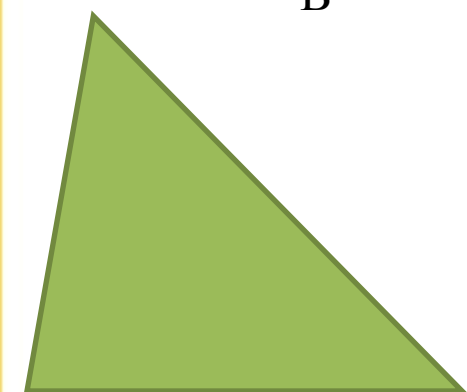
$$\frac{S_{\Delta KPM}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$$

**Отношение периметров подобных
треугольников равно коэффициенту
подобия**

$$\frac{P_{\Delta KPM}}{P_{\Delta ABC}} = k$$

В

Р



C

K

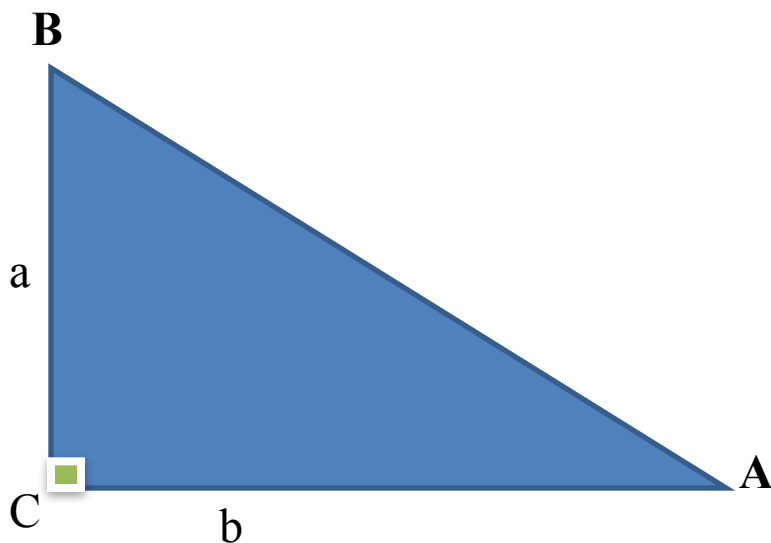
M

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Теорема о площади прямоугольного треугольника

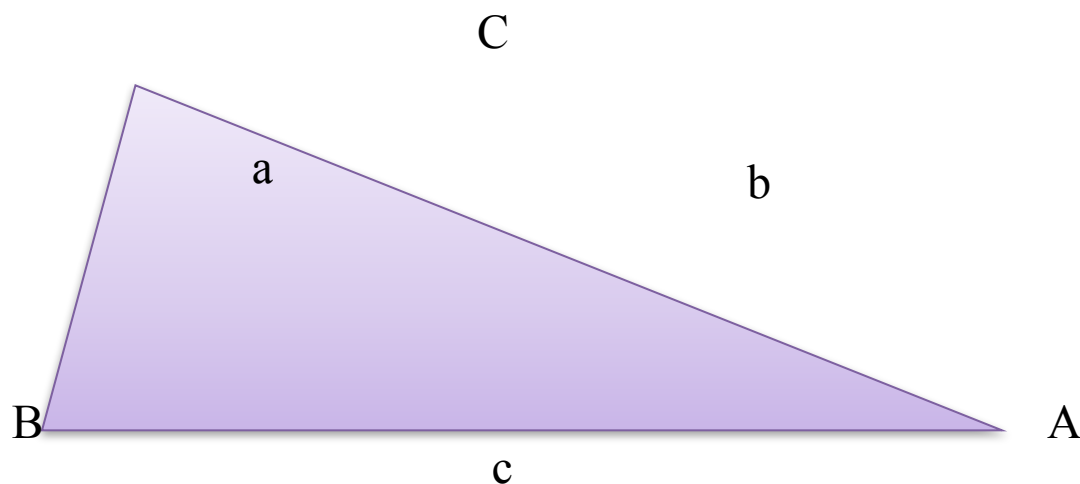
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения двух его катетов



$$S = \frac{1}{2} ab$$

Теорема синусов

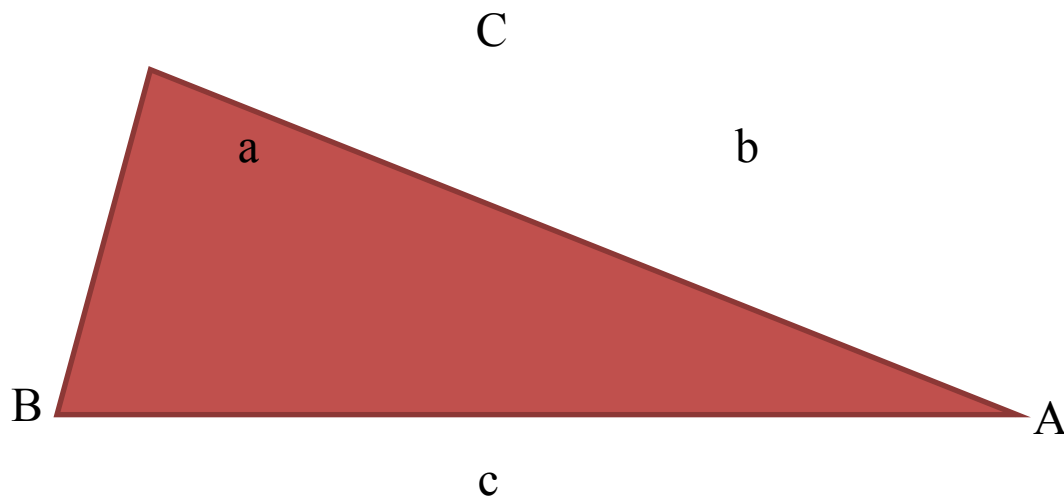
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Формулы площади треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$$

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности

$$S = \frac{P \cdot r}{2}$$

Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности

$$S = \frac{abc}{4R}$$

№13.Вар11

Укажите в ответе номера верных утверждений.

- 1) Если три угла одного треугольника соответственно равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- 2) Если один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25° , то другой угол равен 65° .
- 3) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

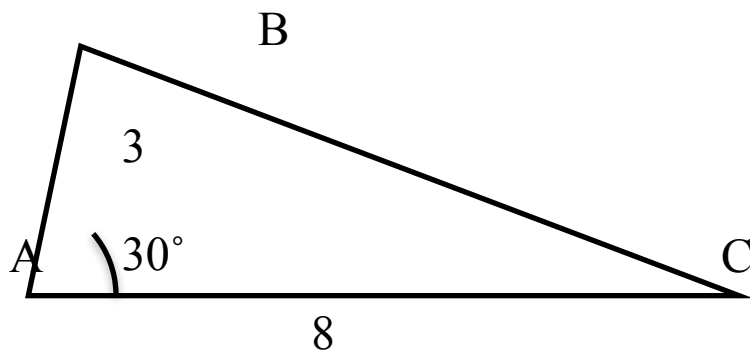
№13,Вар 16

Укажите в ответе номера верных утверждений.

- 1) В треугольнике ABC , для которого $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 55^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, сторона AC — наименьшая.
- 2) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.
- 3) В треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол.

№11. Вар:1. Две стороны треугольника 3 и 8, а угол между ними 30° .
Найдите площадь треугольника

Решение:
$$S = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin 30}{2} = 6$$



Ответ:6

№9. Один острый угол прямоугольного треугольника в два раза больше другого. Найдите меньший острый угол. Ответ дайте в градусах.

Решение: $\angle A + \angle B = 90^\circ$

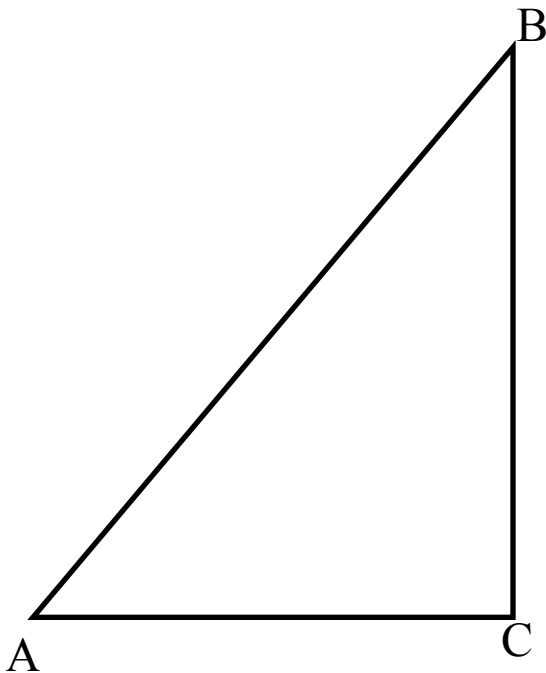
Пусть $\angle A = x$, тогда

$$\angle B = 2x$$

$$x + 2x = 90^\circ$$

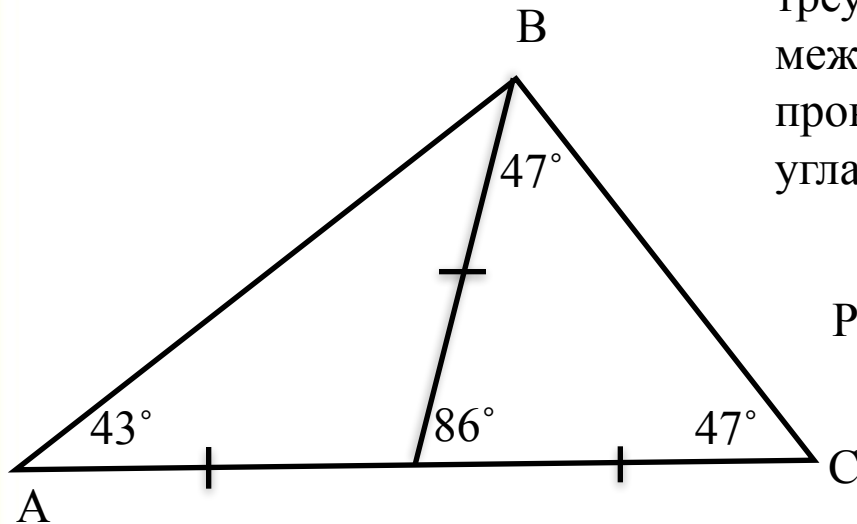
$$x = 30^\circ$$

Ответ: 30°



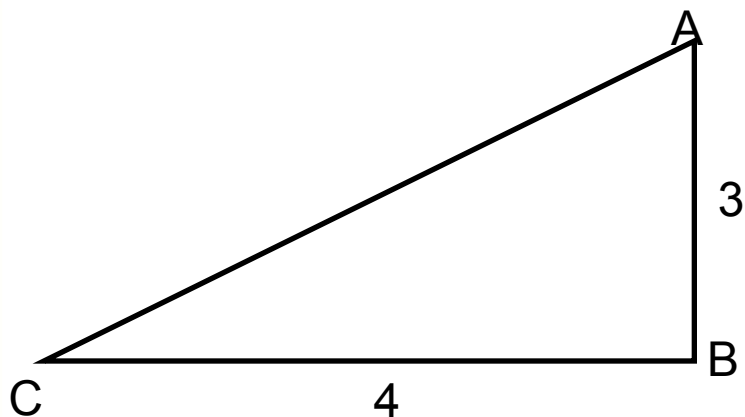
Вар16. №9

Один из углов прямоугольного треугольника равен 47° . Найдите угол между гипотенузой и медианой проведенной из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

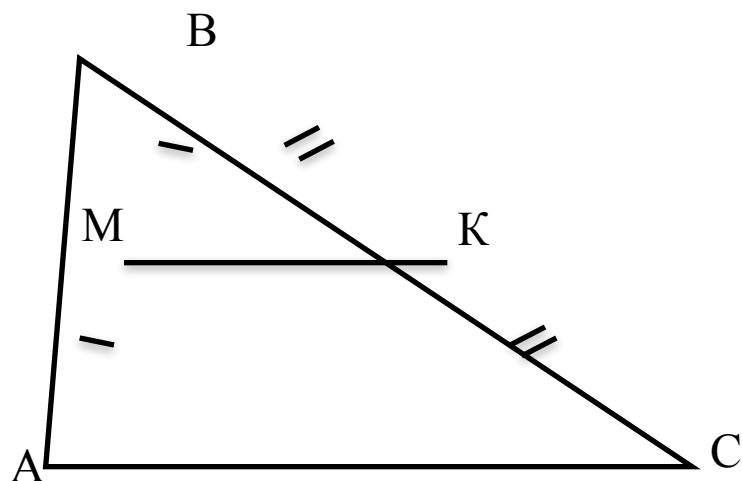


Решение:

№12. Вар 7. Найдите синус угла ВАС
треугольника ABC, изображенного на
рисунке.



$$S = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin 30}{2} = 6$$



№11. Вар 7. Средняя линия МК
треугольника ABC отсекает от
него треугольник MBK, площадь
которого равна 10 см^2 . Найдите
площадь треугольника ABC

Решение:

$\triangle ABC$ и $\triangle MBK$
подобны, $k=2$.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBK}} = k^2$$

$$S = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin 30}{2} = 6$$

$$S = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin 30}{7} = 6$$

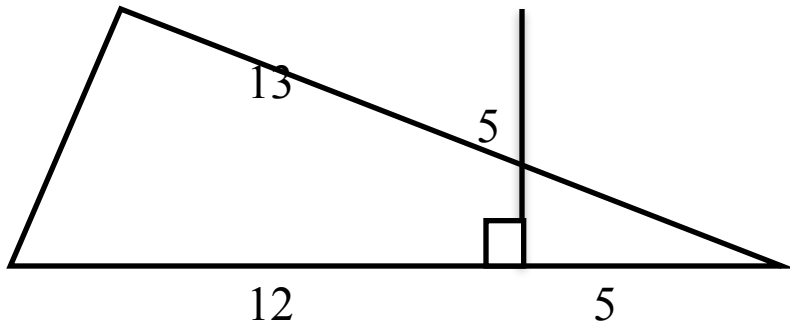
Ответ: 40

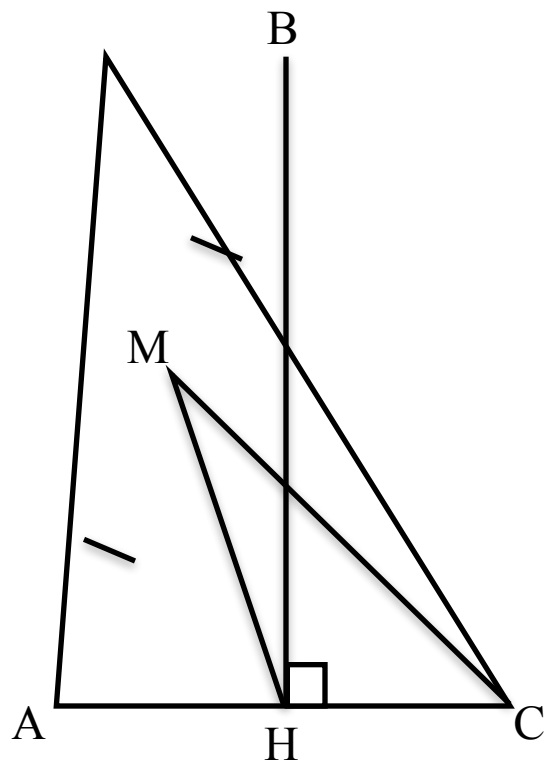
№11. Вар 3. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.

Решение:

$$S = a \cdot h / 2 = (12 + 5) \cdot 5 / 2 = 42,5$$

Ответ: 42,5





№24. Вар 8. Из треугольников ABC проведены высота и медиана CM. Найдите длину отрезка HM, если $AM=3$, $AH=HC$

1 Решение:

Так как треугольник AHB
прямоугольный, HM- медиана,
значит $AM=MB=MH$

Ответ : $MH=3$

2.Решение:

Так-как CM медиана, $AM=MB$, $AB=6$,
 $AH=HC$, поэтому треугольник ABC-
равнобедренный, то $AB=BC=6$. MH-
средняя линия треугольника, поэтому
 $MH=0,5 \cdot BC=0,5 \cdot 6=3$

Ответ: $MH=3$

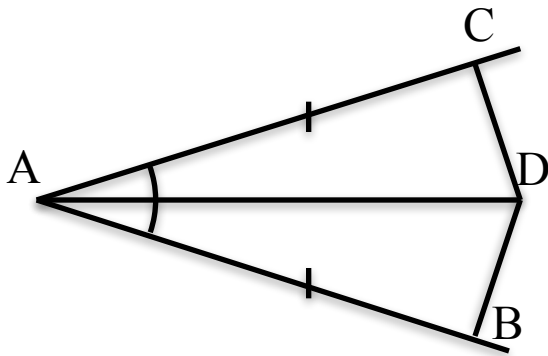
№24.Вар1. На сторонах угла ВАС, равного 20° , и на его биссектрисе отложены равные отрезки АВ, АС и АД. Определите величину угла ВDC.

Решение:

Так как, АД- биссектриса,
 $\angle CAD = \angle DAB = 10^\circ$

Треугольник САD и треугольник DAB-
равнобедренные. $(180-10)/2=85$, $\angle C =$
 $\angle B = \angle CDA = \angle BDA = 85^\circ$. $\angle CDB = 170^\circ$

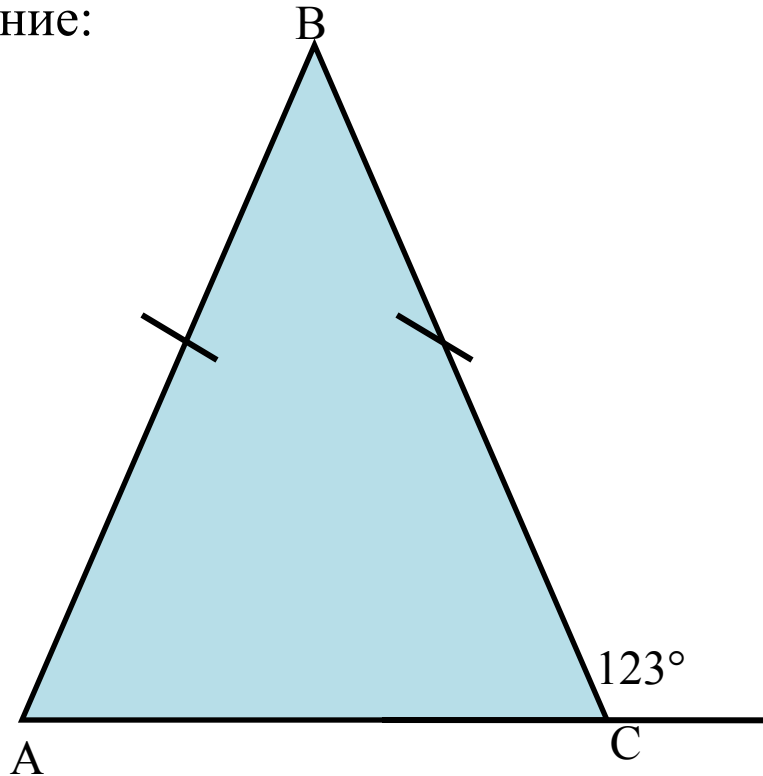
Ответ: $\angle CDB = 170^\circ$



№ 9. (демонстрационный вариант 2013 г)

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен 123° . Найдите величину угла ABC. Ответ дайте в градусах.

Решение:



Так как $\triangle ABC$ -
равнобедренный, то

$$\angle A = \angle C$$

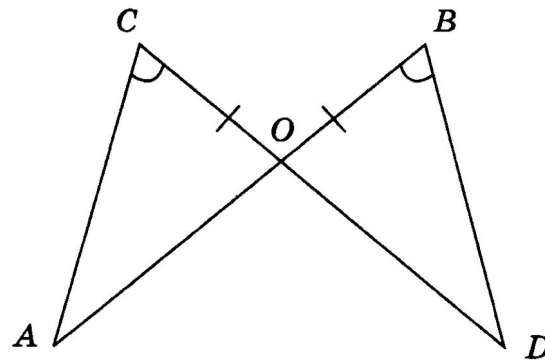
$$\angle C = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 2 \cdot 57^\circ = 66^\circ$$

Ответ: 66°

№25.Вар5

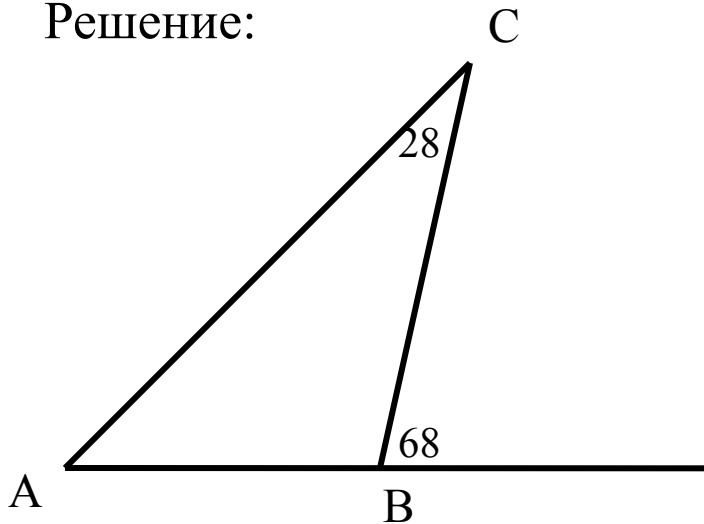
Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB .



Решение: $CO=OB$, $\angle B = \angle C$, $\angle COA = \angle BOD$ - вертикальные, поэтому равны. А $\triangle COA = \triangle BOD$ (треугольники равны по второму признаку). По стороне и прилежащим двум углам

№ 24. В треугольнике ABC угол C равен 28° . Внешний угол при вершине B равен 68° . Найдите угол A.

Решение:



I способ:

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Следовательно

$$\angle A + \angle C = 68^\circ$$

$$\angle A = 68^\circ - 28^\circ = 40^\circ$$

Ответ: 40°

II способ:

$$\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180° .

Следовательно

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 28^\circ - 112^\circ = 40^\circ$$

Ответ: 40°

№9. В треугольнике ABC AD – биссектриса, угол C равен 50° , угол CAD равен 28° . Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Решение:

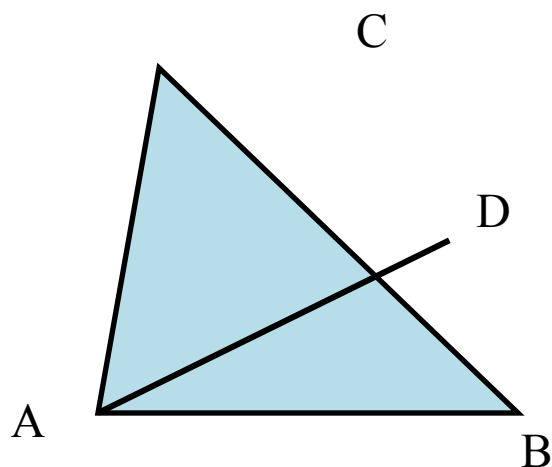
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle CAD = \angle BAD = 28^\circ$$

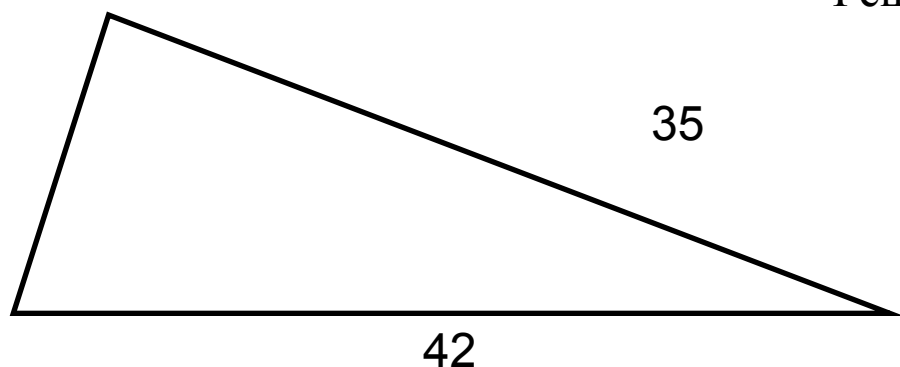
$$\angle A = 2 \cdot 28^\circ = 56^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 56^\circ - 50^\circ = 74^\circ$$

Ответ: 74°



№10. Вар 26. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 35, основание равно 42. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{56(56-35)(56-35)(56-42)}$$

$$S = 588$$

$$588 = \frac{35 \cdot 35 \cdot 42}{4 \cdot R}$$

$$R = \frac{35 \cdot 35 \cdot 42}{4 \cdot 588}$$

$$R = 21,875$$



СПАСИБО
ЗА
УРОК!!!

Использованные материалы:

Клипарт «Сова» -

<http://radikal.ru/F/i028.radikal.ru/0710/8e/d0099ff9a62f.png.html>

«Клипарт Книга» -

<http://allforchildren.ru/pictures/showimg/school4/school0451jpg.htm>