

# РАЗДЕЛ 1. ВОЗДУШНОЕ СУДНО КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ.

## Тема 2 Математические модели продольного и бокового движения самолета

### ЛЕКЦИЯ № 8. УРАВНЕНИЯ БОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

#### Учебные вопросы:

**1 Математические модели изолированного бокового движения самолета.**

**2 Линеаризация уравнений бокового движения**

#### Задание на самостоятельную работу:

[1] Вавилов Ю.А., Системы автоматического управления летательных аппаратов. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2009. с.65...70.

[2] Мигунов А.И., Иванов Р.В., Серов А.Н. Системы автоматического управления полетом. Электронный учебник. ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. Л-8, тематический план, учебная программа

[3] Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. ВВИА

им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986. с. 32...38.

[7] Кичигин Е.К., Демчук В.А., Лущик А. В., Агеев А.М. Системы автоматического управления полетом. Ч. 1: Учебное пособие. -Воронеж: ВАИУ, 2011. с. 23...25.



**Вопрос №1 Математические модели  
изолированного бокового движения  
самолета**

$$\begin{cases}
 m\dot{W} = F_{x_k} \\
 mW\dot{\theta} = F_{y_k} \\
 -mW\dot{\Psi} \cos \theta = F_{z_k} \\
 J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = M_z \\
 J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = M_y \\
 J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = M_x \\
 \dot{\omega}_z = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma \\
 \omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \\
 \omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\
 \dot{x}_g = W \cos \theta \cos \Psi \\
 \dot{y}_g = W \sin \theta \\
 \dot{z}_g = -W \cos \theta \sin \Psi
 \end{cases}$$

Уловия  
изолированного  
бокового движения

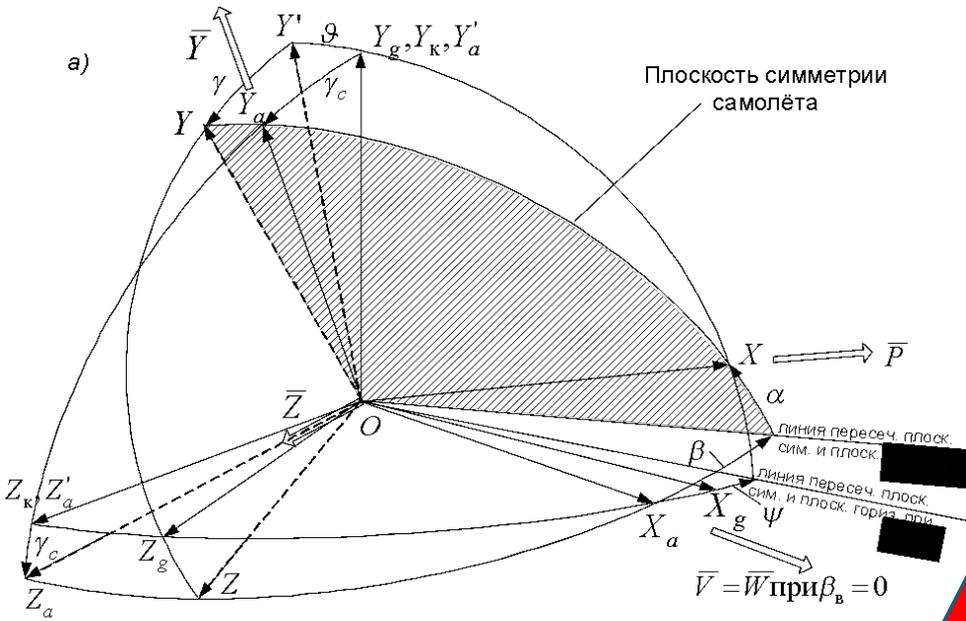
$$\begin{aligned}
 F_{x_k} &= 0 \\
 F_{y_k} &= 0 \\
 M_{z_k} &= 0 \Rightarrow \omega_z = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -mW\dot{\Psi} \cos \theta &= F_{z_k} \\
 J_x \dot{\omega}_x &= M_x \\
 J_y \dot{\omega}_y &= M_y \\
 \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\
 \omega_y &= \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \\
 \dot{\Psi}_g &= -V_0 \cos \theta \sin \theta \\
 \psi &= \Psi + \beta - \beta_0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



**Вопрос №2**  
**Линеаризация уравнений**  
**бокового движения**

Определим правую часть первого уравнения. Сила  $F_{z_K}$  является суммой проекций сил тяги  $P$  и аэродинамических сил  $Y$  и  $Z$ , которые можно получить из анализа рисунка



$$R_{x_K} = Y \sin \gamma_c + Z \cos \gamma_c$$

$$P_{X_a Z_a} = P \cos \alpha$$

$$P_{y_a} = P \sin \alpha$$

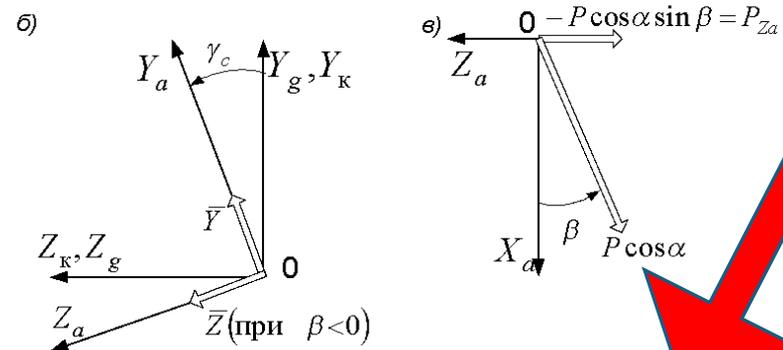
$$P_{z_a} = -P \cos \alpha \sin \beta$$

Перейдем от скоростной СК к траекторной, для этого обратимся к углу  $\gamma_c$

$$P_{z_K} = P \sin \alpha \sin \gamma_c - P \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_c$$

Подставляя полученные ур-ия в правую часть первого уравнения системы, получим

$$-mW \Psi \cos \theta = Y \sin \gamma + Z \cos \gamma + P(\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)$$



Условия линеаризации уравнений бокового движения:

прямолинейный горизонтальный полет в спокойной атмосфере без крена и скольжения ( $\psi=0, \gamma_0=0, \beta_0=0, \theta_0=0, U_z=0$ ).

Уравнение движения центра масс в приращениях имеет такой вид:

$$-mV_0\dot{\Delta\Psi} = Y_0\Delta\gamma + Z^\beta\Delta\beta + \Delta P(\sin\alpha_0\sin\gamma_0 - \cos\alpha_0\sin\beta_0\cos\gamma_0) + P_0\Delta(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma). \quad \ll 0 \gg$$

$$P_0(\sin\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\gamma - \cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta\beta + \cos\alpha_0\sin\beta_0\sin\gamma_0\Delta\gamma) = P_0\sin\alpha_0\Delta\gamma - P_0\cos\alpha_0\Delta\beta \quad (2)$$

Подставив в исходное уравнение получим:

$$-mV_0\dot{\Delta\Psi} - (Y_0 + P_0\sin\alpha_0)\Delta\gamma + (P_0\cos\alpha_0 - Z^\beta)\Delta\beta = 0 \quad (3)$$

$$a_z^\beta = \frac{P_0\cos\alpha_0 - Z^\beta}{mV_0}$$

$$a_z^\gamma = -\frac{P_0\sin\alpha_0 + Y_0}{mV_0}$$

$$-\Delta\dot{\Psi} + a_z^\beta\Delta\beta + a_z^\gamma\Delta\gamma = 0$$

$$-\Delta\Psi + a_z^\beta \Delta\beta + a_z^\gamma \Delta\gamma = 0$$

Размерность уравнения  $c^{-1}$ , и оно описывает процесс изменения скорости поворота траектории в плоскости горизонта при нарушении боковой балансировки.

- первая составляющая создается в результате появления угла скольжения и зависит от силы тяги и боковой аэродинамической силы,
- вторая – в результате появления крена самолета и возникновения боковой силы, обусловленной действием подъемной силы и силы тяги.

*При линеаризации уравнений моментов системы уравнений основные факторы, определяющие  $M_x$  и  $M_y$ .*

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(V, H, \beta, \omega_x, \omega_y, \delta_\varepsilon, \delta_H) \\ M_y &= M_y(V, H, \beta, \omega_x, \omega_y, \delta_\varepsilon, \delta_H) \end{aligned} \quad (4)$$

Приращения  $M_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= M_x^\beta \Delta\beta + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y + M_x^{\delta_\varepsilon} \Delta\delta_\varepsilon + M_x^{\delta_H} \Delta\delta_H \\ \Delta M_y &= M_y^\beta \Delta\beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\delta_\varepsilon} \Delta\delta_\varepsilon + M_y^{\delta_H} \Delta\delta_H \end{aligned} \quad (5)$$

## Осуществим линеаризацию кинематических уравнений

$$\Delta \omega_x = \Delta \gamma \boxtimes + \Delta \psi \boxtimes \sin \vartheta_0 + \psi \boxtimes_0 \cos \vartheta_0 \Delta \vartheta$$

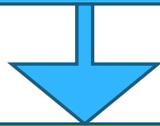
$$\Delta \omega_y = \Delta \psi \boxtimes_0 \cos \vartheta_0 - \psi \boxtimes_0 \cos \gamma_0 \sin \vartheta_0 \Delta \vartheta + \Delta \vartheta \sin \gamma_0 + \vartheta_0 \cos \gamma_0 \Delta \gamma$$

$$\Delta \dot{\Psi}_T = -W \cos \theta_0 \sin \Psi_0 + W_0 \sin \theta_0 \sin \Psi_0 \Delta \theta - W_0 \cos \theta_0 \cos \Psi_0 \Delta \Psi$$

$$\Delta \psi = \Delta \Psi + \Delta \beta - \beta_B \quad (6)$$

Если учесть малость угла  $\vartheta_0$  и **отсутствие** в невозмущенном движении  $\Psi_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\vartheta_0$  и ветра  $\Delta W = \Delta V$  и  $W_0 = V_0$ , то

$$\Delta \omega_x = \Delta \dot{\gamma}; \quad \Delta \omega_y = \Delta \dot{\psi}; \quad \Delta \dot{\Psi} = -V_0 \Delta \theta; \quad \Delta \psi = \Delta \Psi + \Delta \beta - \beta_B; \quad \beta_B = -\frac{U_z}{V_0}$$



$$J_x \Delta \dot{\gamma} \boxtimes = M_x^\beta \Delta \beta + M_x^{\omega_x} \Delta \dot{\gamma} \boxtimes + M_x^{\omega_y} \Delta \dot{\psi} \boxtimes + M_x^{\delta_\vartheta} \Delta \delta_\vartheta + M_x^{\delta_H} \Delta \delta_H$$

$$J_y \Delta \dot{\psi} \boxtimes = M_y^\beta \Delta \beta + M_y^{\omega_x} \Delta \dot{\gamma} \boxtimes + M_y^{\omega_y} \Delta \dot{\psi} \boxtimes + M_y^{\delta_\vartheta} \Delta \delta_\vartheta + M_x^{\delta_H} \Delta \delta_H$$

(7)

Разделим правую и левую части на соответствующие моменты инерции:

$$\Delta\ddot{\gamma} = \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\dot{\gamma} + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\dot{\psi} + \frac{M_x^{\delta_\varnothing}}{J_x} \Delta\delta_\varnothing + \frac{M_x^{\delta_H}}{J_x} \Delta\delta_H \quad (8)$$

$$\Delta\ddot{\psi} = \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\dot{\gamma} + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \Delta\dot{\psi} + \frac{M_y^{\delta_\varnothing}}{J_y} \Delta\delta_\varnothing + \frac{M_y^{\delta_H}}{J_y} \Delta\delta_H$$

$a_{mx}^{\delta_\varnothing}, a_{my}^{\delta_H}$  - коэффициенты, характеризующие эффективность отклонения рулевых органов самолета

Оба уравнения имеют размерность  $c^{-2}$  и описывают процессы развития угловых ускорений по крену и рысканию при нарушении боковой балансировки.

# Система линеаризованных уравнений изолированного бокового движения

$$-\Delta\Psi + a_z^\beta \Delta\beta + a_z^\gamma \Delta\gamma = 0;$$

$$\Delta\gamma + a_{mx}^{\omega_x} \Delta\gamma + a_{mx}^{\omega_y} \Delta\psi + a_{mx}^\beta \Delta\beta = a_{mx}^{\delta_\varepsilon} (-\Delta\delta_\varepsilon) + a_{mx}^{\delta_H} \Delta\delta_H;$$

$$\Delta\psi + a_{my}^{\omega_y} \Delta\psi + a_{my}^{\omega_x} \Delta\gamma + a_{my}^\beta \Delta\beta = a_{my}^{\delta_H} (-\Delta\delta_H) + a_{my}^{\delta_\varepsilon} \Delta\delta_\varepsilon;$$

(9)

$$\Delta\psi - \Delta\Psi - \Delta\beta = -\beta_B;$$

$$\Delta\gamma = -V_0 \Delta\Psi.$$