

Динамические структуры данных (язык Си)

1. Указатели
2. Динамические массивы
3. Структуры
4. Списки
5. Стеки, очереди, деки
6. Деревья
7. Графы

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 1. Указатели

Статические данные

```
int x, y = 20;  
float z, A[10];  
char str[80];
```

- переменная (массив) имеет имя, по которому к ней можно обращаться
- размер заранее известен (задается при написании программы)
- память выделяется при объявлении
- размер нельзя увеличить во время работы программы

Динамические данные

- размер заранее неизвестен, определяется во время работы программы
- память выделяется во время работы программы
- нет имени?

Проблема:

как обращаться к данным, если нет имени?

Решение:

использовать адрес в памяти

Следующая проблема:

в каких переменных могут храниться адреса?
как работать с адресами?

Указатели

Указатель – это переменная, в которую можно записывать адрес другой переменной (или блока памяти).

Объявление:

```
char    *pC;  // адрес символа
           // (или элемента массива)
int      *pI;  // адрес целой переменной
float    *pF;  // адрес вещественной переменной
```

Как записать адрес:

```
int m = 5, *pI;
int A[2] = { 3, 4 };
pI = &m;      // адрес переменной m
pI = &A[1];   // адрес элемента массива A[1]
pI = NULL;    // нулевой адрес
```

```
scanf ("%d", &m) ;
```

Обращение к данным

Как работать с данными через указатель?

```
int m = 4, n, *pI;
pI = &m;
printf ("m = %d", *pI); // вывод значения
n = 4 * (7 - *pI);      // n = 4 * (7 - 4) = 12
*pI = 4 * (n - m);      // m = 4 * (12 - 4) = 32
printf("&m = %p", pI); // вывод адреса
```

«ВЫТАЩИТЬ» значение по адресу

Как работать с массивами?

```
int *pI, i, A[] = {1, 2, 3, 4, 5, 999};
pI = A; // адрес A[0] записывается как A
while ( *pI != 999 ) { // while( A[i] != 999 )
    *pI += 2; // A[i] += 2;
    pI++;    // i++ (переход к следующему)
}
```



Оператор `pI++` увеличивает адрес на `sizeof(int)`!

Что надо знать об указателях

- указатель – это переменная, в которой можно хранить адрес другой переменной;
- при объявлении указателя надо указать тип переменных, на которых он будет указывать, а перед именем поставить знак *;
- знак & перед именем переменной обозначает ее адрес;
- знак * перед указателем в рабочей части программы (не в объявлении) обозначает значение ячейки, на которую указывает указатель;
- для обозначения недействительного указателя используется константа **NULL** (нулевой указатель);
- при изменении значения указателя на *n* он в самом деле сдвигается к *n*-ому следующему числу данного типа, то есть для указателей на целые числа на *n*sizeof(integer)* байт;
- указатели печатаются по формату *%p*.



Нельзя использовать указатель, который указывает неизвестно куда (будет сбой или зависание)!

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 2. Динамические массивы

Где нужны динамические массивы?

Задача. Ввести размер массива, затем – элементы массива. Отсортировать массив и вывести на экран.

Проблема:

размер массива заранее неизвестен.

Пути решения:

- 1) выделить память «с запасом»;
- 2) выделять память тогда, когда размер стал известен.

Алгоритм:

- 3) ввести размер массива;
- 4) выделить память ;
- 5) ввести элементы массива;
- 6) отсортировать и вывести на экран;
- 7) удалить массив

Программа

```
#include <stdio.h>
void main()
{
    int *A, N;
    printf ("Введите размер массива > ");
    scanf ("%d", &N);
```

```
A = new int [N];
```

выделить память (C++)

```
if ( A == NULL ) {
    printf("Не удалось выделить память");
    return;
}
```

проверка

```
for (i = 0; i < N; i ++ ) {
    printf ("\nA[%d] = ", i+1);
    scanf ("%d", &A[i]);
}
```

работаем так же,
как с обычным
массивом!

```
...
delete A;
```

освободить память

```
}
```

Динамические массивы

- для выделения памяти в языке Си используются функции `malloc` и `calloc`;
- в языке C++ удобнее использовать оператор `new`;
`указатель = new тип [размер] ;`
- результат работы оператора `new` – адрес выделенного блока памяти, который нужно сохранить в указателе;
- если оператор `new` вернул нулевой указатель (`NULL`), память выделить не удалось;
- с динамическим массивом можно работать так же, как и с обычным (статическим);
- для освобождения блока памяти нужно применить оператор `delete`:
`delete указатель ;`

Ошибки при работе с памятью

Запись в «чужую» область памяти:

память не была выделена, а массив используется.

Что делать: проверять указатель на NULL.

Выход за границы массива:

обращение к элементу массива с неправильным номером, при записи портятся данные в «чужой» памяти.

Что делать: если позволяет транслятор, включать проверку выхода за границы массива.

Указатель удален второй раз:

структура памяти нарушена, может быть все, что угодно.

Что делать: в удаленный указатель лучше записывать NULL, ошибка выявится быстрее.

Утечка памяти:

ненужная память не освобождается.

Что делать: убирайте «мусор».

Динамические матрицы

Задача. Ввести размеры матрицы и выделить для нее место в памяти во время работы программы.

Проблема:

размеры матрицы заранее неизвестны.

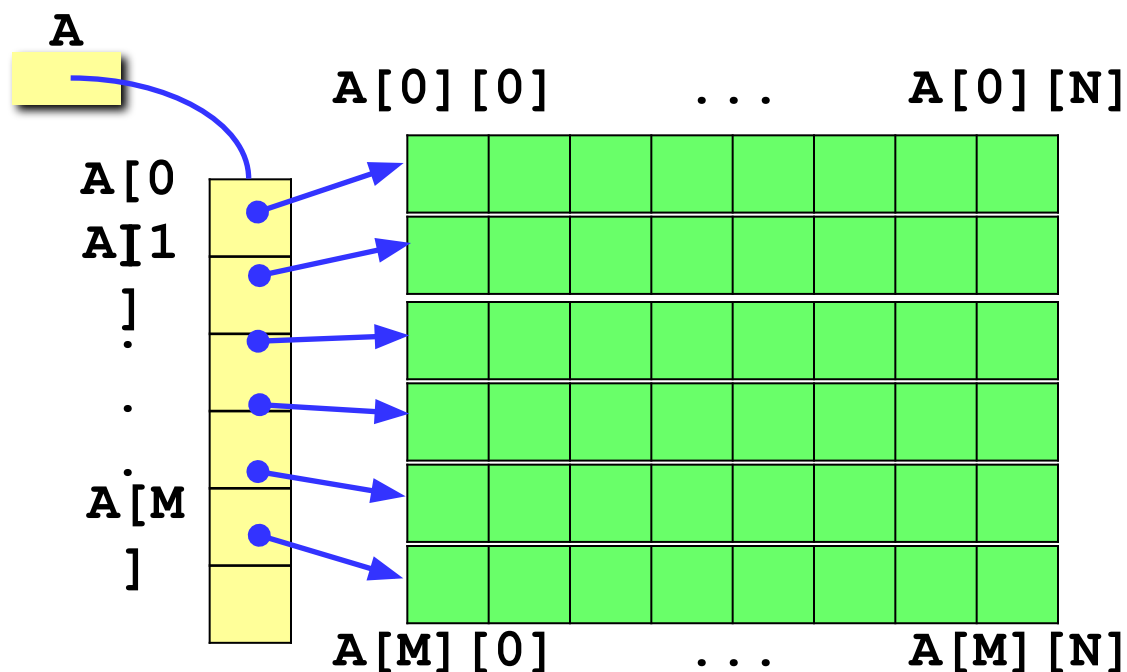
Пути решения:

- 1) выделять отдельный блок памяти для каждой строки;
- 2) выделить память сразу на всю матрицу.

Вариант 1. Свой блок – каждой строке

Адрес матрицы:

- матрица = массив строк
- адрес матрицы = адрес массива, где хранятся адреса строк
- адрес строки = указатель
- **адрес матрицы = адрес массива указателей**



Объявление динамической матрицы:

```
int **A;
```

или через объявление
нового типа данных
pInt = указатель на int

```
typedef int  
*pInt;  
pInt *A;
```

Вариант 1. Свой блок – каждой строке

```
typedef int *pInt;
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    int M, N, i;
```

```
    pInt *A;
```

```
    ... // ввод M и N
```

```
    A = new pInt[M];
```

```
    for ( i = 0; i < M; i ++ )
```

```
        A[i] = new int[N];
```

```
    ... // работаем с матрицей A, как обычно
```

```
    for ( i = 0; i < M; i ++ )
```

```
        delete A[i];
```

```
    delete A;
```

```
}
```

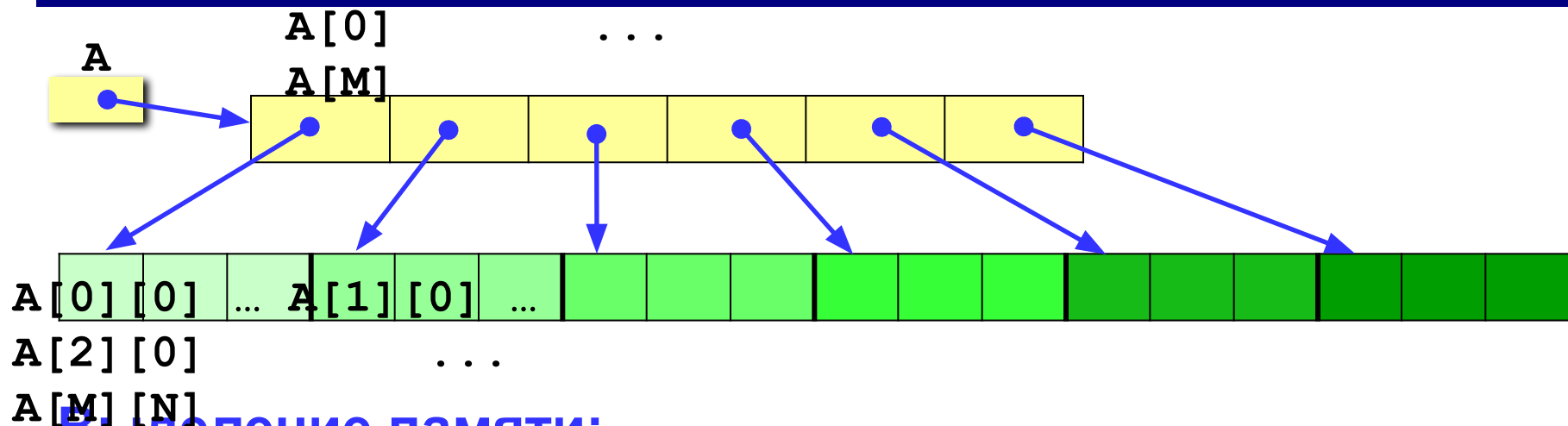
выделяем массив
указателей

выделяем массив
под каждую строку

освобождаем память
для строк

освобождаем массив
адресов строк

Вариант 2. Один блок на матрицу



Выделение памяти:

```
A = new pInt[M];
A[0] = new int [M*N];
```

Расстановка указателей:

```
for ( i=1; i<N; i++ ) A[i] = A[i-1] + N;
```

Освобождение памяти:

```
delete A[0];
delete A;
```

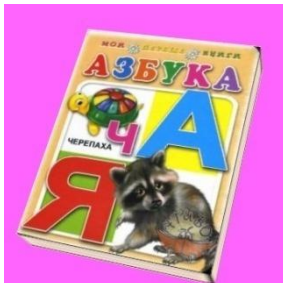


Можно ли поменять строки местами?

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 3. Структуры

Структуры



Свойства:

- автор (*строка*)
- название (*строка*)
- год издания (*целое число*)
- количество страниц (*целое число*)

Задача: объединить эти данные в единое целое

Структура – это тип данных, который может включать в себя несколько *полей* – элементов разных типов (в том числе и другие структуры).

Как ввести новый тип данных-структур?

структура

название

поля

```
struct Book {  
    char author[40]; // автор, символьная строка  
    char title[80];  // название, символьная строка  
    int year;         // год издания, целое число  
    int pages;        // количество страниц, целое число  
};
```



Память не выделяется!

Как работать со структурами?

Объявление:

```
Book b; // здесь выделяется память!  
Book b1 = { "А.С. Пушкин",  
            "Полтава", 1998, 223 };
```

Заполнение полей:

```
strcpy ( b.author, "А.С. Пушкин" );  
strcpy ( b.title, "Полтава" );  
b.year = 1998;  
b.pages = 223;
```



Для обращения
к полю структуры
используется
точка!

Ввод полей с клавиатуры:

```
printf ( "Автор " );  
gets ( b.author );  
printf ( "Название книги " );  
gets ( b.title );  
printf ( "Год издания, кол-во страниц " );  
scanf ( "%d%d", &b.year, &b.pages );
```

Копирование структур

Задача: скопировать структуру b1 в b2.

По элементам:

```
Book b1, b2;  
...    // здесь вводим b1  
strcpy ( b2.author, b1.author );  
strcpy ( b2.title, b1.title );  
b2.year = b1.year;  
b2.pages = b1.pages;
```

Копирование «бит в бит»:

```
#include <mem.h>  
...  
      куда   откуда   сколько байт  
memcpy ( &b2, &b1, sizeof(Book) );
```



Первые два параметра – адреса структур!

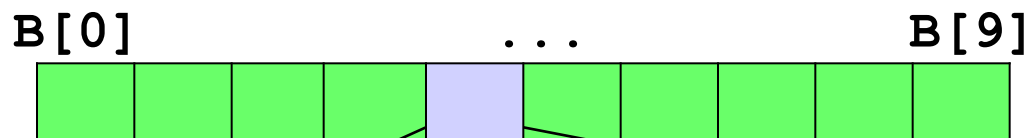
или просто так:

```
b2 = b1;
```

Массивы структур

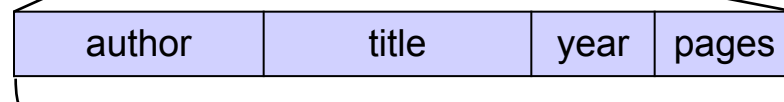
Объявление:

```
Book B[10];
```



Обращение к полям:

```
for ( i = 0; i < 10; i ++ )  
    B[i].year = 2008;
```



Book

Запись в двоичный файл:

```
FILE *f;  
f = fopen("input.dat", "wb" );  
fwrite ( B, sizeof(Book), 10, f );
```

write binary

адрес массива

размер блока

сколько
блоков

указатель
на файл

Чтение из двоичного файла:

```
f = fopen("input.dat", "rb" );  
n = fread ( B, sizeof(Book), 10, f );  
printf ( "Прочитано %d структур", n );
```



`fread` возвращает
число удачно
прочитанных
блоков!

Пример программы

Задача: в файле `books.dat` записаны данные о книгах в виде массива структур типа `Book` (не более 100). Установить для всех 2008 год издания и записать обратно в тот же файл.

```
#include <stdio.h>
```

```
struct Book { ... };
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    Book B[100];
```

```
    int i, n;
```

```
    FILE *f;
```

```
    f = fopen ( "books.dat", "rb" );
```

```
    n = fread ( B, sizeof(Book), 100, f );
```

```
    fclose ( f );
```

```
    for ( i = 0; i < n; i ++ ) B[i].year = 2008;
```

```
    fp = fopen ( "books.dat", "wb" );
```

```
    fwrite ( B, sizeof(Book), n, f );
```

```
    fclose ( f );
```

```
}
```

полное описание структуры

чтение массива
(≤ 100 структур),
размер записывается
в переменную `n`

запись
массива
(`n` структур)

Выделение памяти под структуру

```
Book *p;
```

```
p = new Book;
```

выделить память под структуру, записать ее адрес в переменную p

```
printf ( "Автор " );
```

```
gets ( p->author );
```

```
printf ( "Название книги " );
```

```
gets ( p->title );
```

```
printf ( "Количество страниц " );
```

```
scanf ( "%d", &p->pages );
```

```
p->year = 2008;
```

```
...
```

```
delete p;
```

освободить
память



Для обращения к полю структуры по адресу используется стрелка ->!

Динамические массивы структур

Задача: выделить память под массив структур во время выполнения программы.

```
Book *B;
```

в этот указатель будет
записан адрес массива

```
int n;
```

```
printf ( "Сколько у вас книг? " );
```

```
scanf ( "%d", &n );
```

```
B = new Book[n];
```

выделяем память

```
... // здесь заполняем массив B
```

```
for ( i = 0; i < n; i++ )
```

```
    printf ( "%s. %s. %d.\n",
```

```
            B[i].author, B[i].title,
```

```
            B[i].year);
```

```
delete B;
```

освобождаем память

Сортировка массива структур

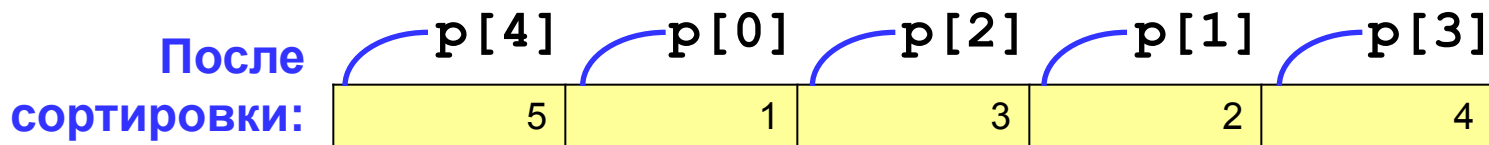
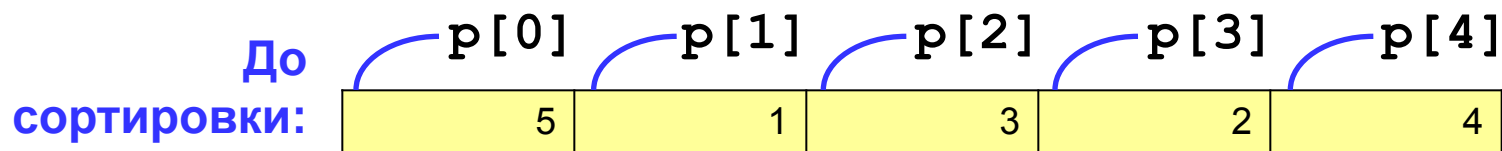
Ключ (ключевое поле) – это поле, по которому сортируются структуры.

Проблема:

как избежать копирования структур при сортировке?

Решение:

использовать вспомогательный массив указателей, при сортировке переставлять указатели.



Вывод результата:

```
for ( i = 0; i < 5; i ++ )  
    printf ("%d %s", p[i]->year, p[i]->title) ;
```

Реализация в программе

```
const N=10;
```

```
Book B[N];
```

```
Book *p[N], *temp;
```

```
int i, j;
```

```
...// здесь заполняем структуры
```

```
for ( i = 0; i < N; i++ )
```

```
    p[i] = &B[i];
```

```
for ( i = 0; i < n-1; i++ )
```

```
    for ( j = n-2; j >= i; j-- )
```

```
        if ( p[j+1]->year < p[j]->year ) {
```

```
            temp = p[j];
```

```
            p[j] = p[j+1];
```

```
            p[j+1] = temp;
```

```
        }
```

```
for ( i = 0; i < 5; i++ )
```

```
    printf("%d %s", p[i]->year, p[i]->title);
```

вспомогательные
указатели

начальная расстановка
указателей

сортировка методом
пузырька, меняем только
указатели, сами структуры
остаются на местах

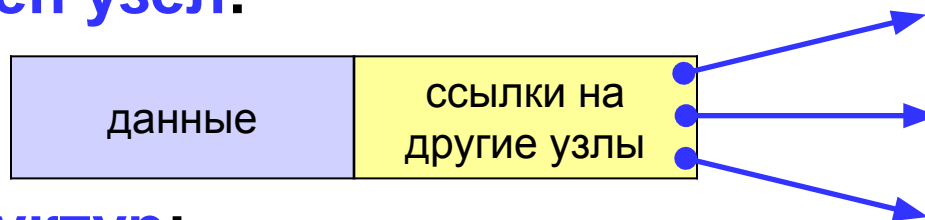
Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 4. Списки

Динамические структуры данных

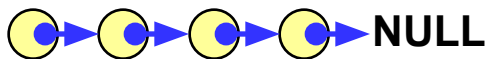
Строение: набор узлов, объединенных с помощью ссылок.

Как устроен узел:

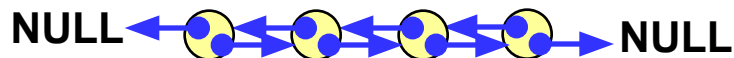


Типы структур:

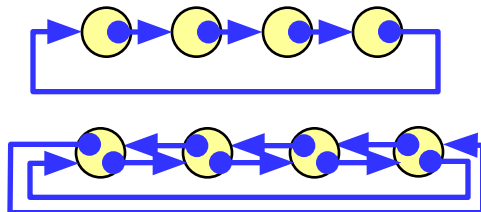
СПИСКИ
односвязный



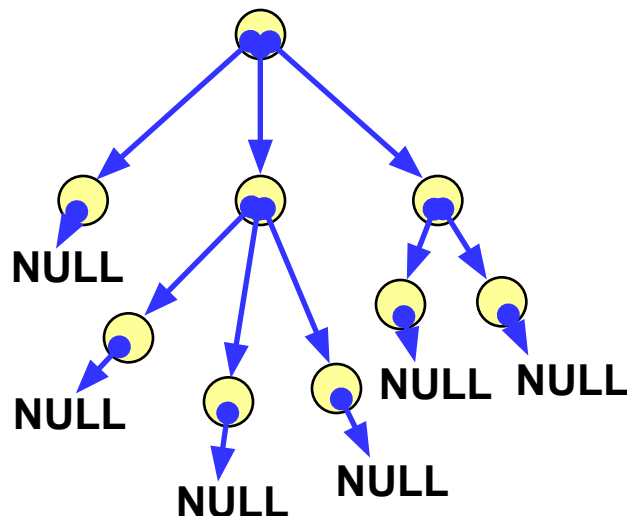
двунаправленный (двусвязный)



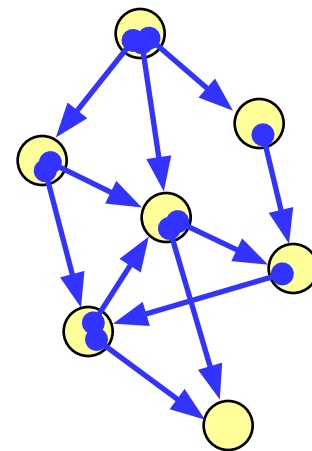
циклические списки (кольца)



деревья



графы



Когда нужны списки?

Задача (алфавитно-частотный словарь). В файле записан текст. Нужно записать в другой файл в столбик все слова, встречающиеся в тексте, в алфавитном порядке, и количество повторений для каждого слова.

Проблемы:

- 1) количество слов заранее неизвестно (~~статический массив~~);
- 2) количество слов определяется только в конце работы (~~динамический массив~~).

Решение – список.

Алгоритм:

- 3) создать список;
- 4) если слова в файле закончились, то стоп.
- 5) прочитать слово и искать его в списке;
- 6) если слово найдено – увеличить счетчик повторений, иначе добавить слово в список;
- 7) перейти к шагу 2.

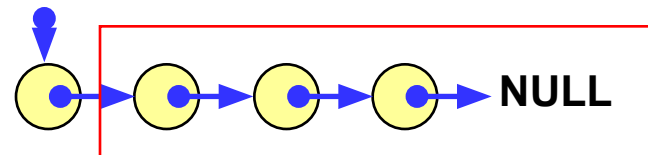
Списки: новые типы данных

Что такое список:

- 1) пустая структура – это список;
- 2) список – это начальный узел (*голова*) и связанный с ним список.



Рекурсивное определение!



Структура узла:

```
struct Node {  
    char word[40];    // слово  
    int  count;       // счетчик повторений  
    Node *next;       // ссылка на следующий элемент  
};
```

Указатель на эту структуру:

```
typedef Node *PNode;
```

Адрес начала списка:

```
PNode Head = NULL;
```



Для доступа к списку достаточно знать адрес его головы!

Что нужно уметь делать со списком?

1. **Создать** новый узел.
2. **Добавить** узел:
 - a) в начало списка;
 - b) в конец списка;
 - c) после заданного узла;
 - d) до заданного узла.
3. **Искать** нужный узел в списке.
4. **Удалить** узел.

Создание узла

Функция `CreateNode` (создать узел):

ВХОД: новое слово, прочитанное из файла;

ВЫХОД: адрес нового узла, созданного в памяти.

возвращает адрес
созданного узла

НОВОЕ СЛОВО

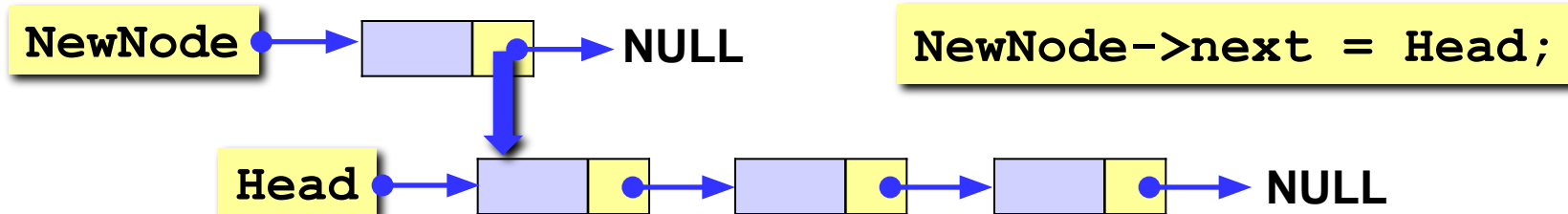
```
PNode CreateNode ( char NewWord[] )
{
    PNode NewNode = new Node;
    strcpy (NewNode->word, NewWord) ;
    NewNode->count = 1;
    NewNode->next = NULL;
    return NewNode;
}
```



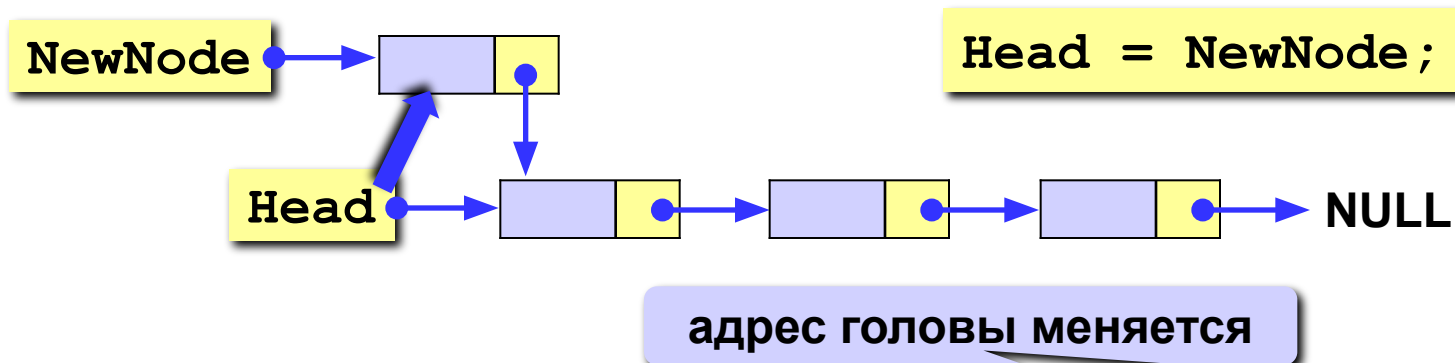
Если память
выделить не
удалось?

Добавление узла в начало списка

1) Установить ссылку нового узла на голову списка:



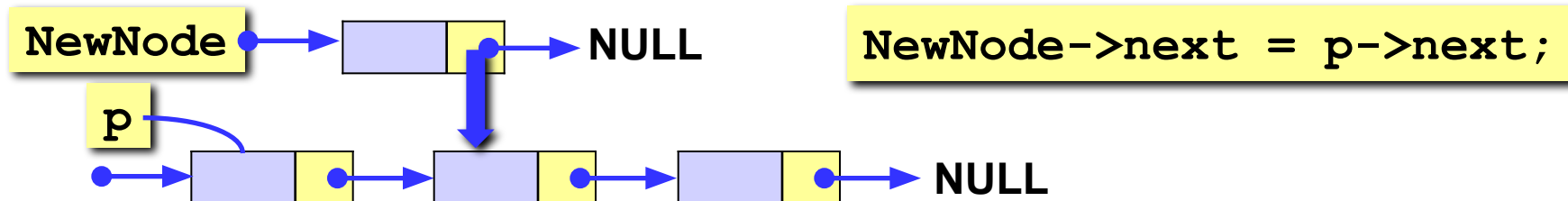
2) Установить новый узел как голову списка:



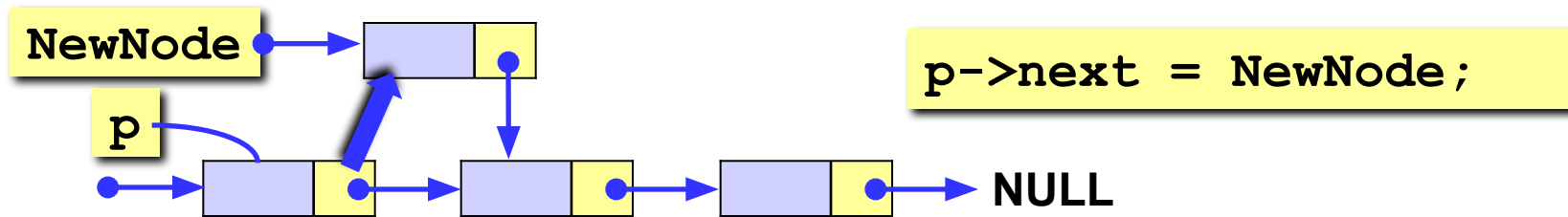
```
void AddFirst (PNode & Head, PNode NewNode)
{
    NewNode->next = Head;
    Head = NewNode;
}
```

Добавление узла после заданного

1) Установить ссылку нового узла на узел, следующий за p:



2) Установить ссылку узла p на новый узел:

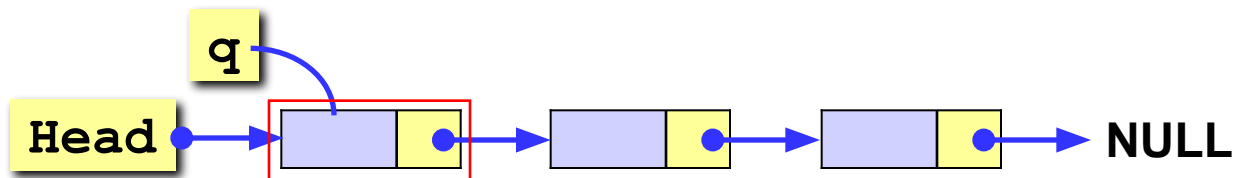


```
void AddAfter (PNode p, PNode NewNode)
{
    NewNode->next = p->next;
    p->next = NewNode;
}
```

Проход по списку

Задача:

сделать что-нибудь хорошее с каждым элементом списка.



Алгоритм:

- 1) установить вспомогательный указатель **q** на голову списка;
- 2) если указатель **q** равен **NULL** (дошли до конца списка), то стоп;
- 3) выполнить действие над узлом с адресом **q**;
- 4) перейти к следующему узлу, **q->next**.

```

...
PNode q = Head;           // начали с головы
while ( q != NULL ) {     // пока не дошли до конца
    ...                   // делаем что-то хорошее с q
    q = q->next;           // переходим к следующему узлу
}
...
  
```

Добавление узла в конец списка

Задача: добавить новый узел в конец списка.

Алгоритм:

- 1) найти последний узел **q**, такой что **q->next** равен **NULL**;
- 2) добавить узел после узла с адресом **q** (процедура **AddAfter**).

Особый случай: добавление в пустой список.

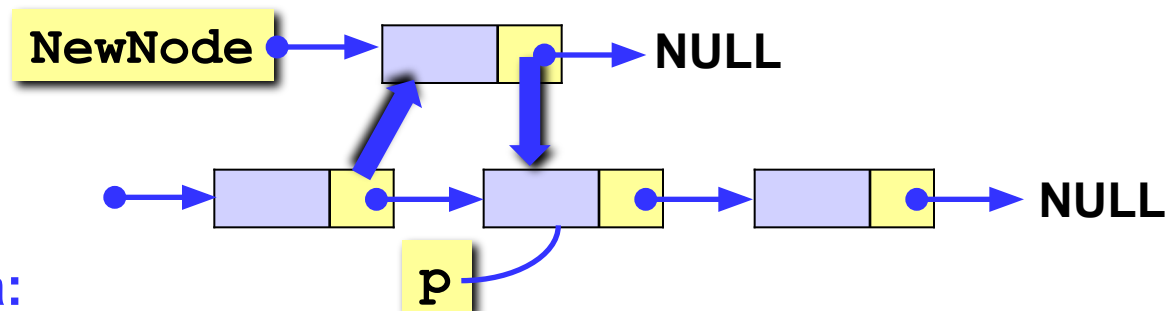
```
void AddLast ( PNode &Head, PNode NewNode )
{
    PNode q = Head;
    if ( Head == NULL ) {
        AddFirst( Head, NewNode );
        return;
    }
    while ( q->next ) q = q->next;
    AddAfter ( q, NewNode );
}
```

особый случай – добавление в
пустой список

ищем последний узел

добавить узел
после узла q

Добавление узла перед заданным



Проблема:

нужно знать адрес **предыдущего** узла, а идти назад нельзя!

Решение: найти предыдущий узел **q** (проход с начала списка).

```
void AddBefore ( PNode &Head, PNode p, PNode NewNode )
{
    PNode q = Head;
    if ( Head == p ) {
        AddFirst ( Head, NewNode );
        return;
    }
    while ( q && q->next != p ) q = q->next;
    if ( q ) AddAfter(q, NewNode);
}
```

особый случай – добавление в
начало списка

ищем узел, следующий
за которым – узел p

добавить узел
после узла q



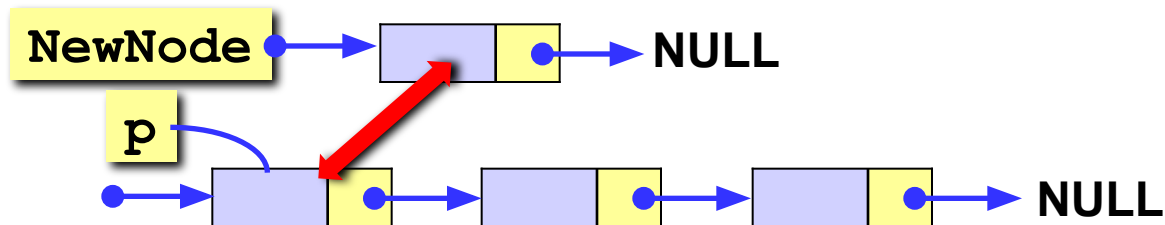
Что плохо?

Добавление узла перед заданным (II)

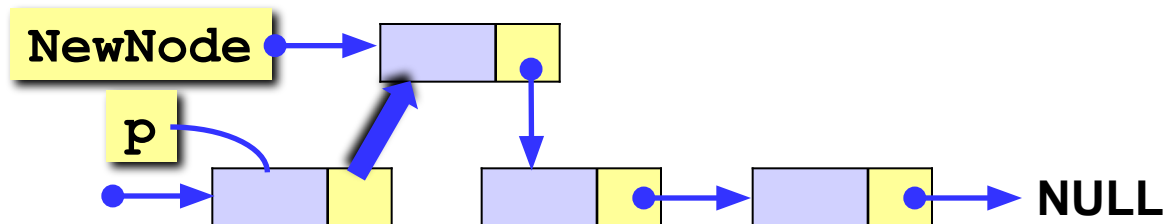
Задача: вставить узел перед заданным без поиска предыдущего.

Алгоритм:

- 1) поменять местами данные нового узла и узла **p**;



- 2) установить ссылку узла **p** на **NewNode**.



```
void AddBefore2 ( PNode p, PNode NewNode )
{
    Node temp;
    temp = *p; *p = *NewNode;
    *NewNode = temp;
    p->next = NewNode;
}
```



Так нельзя, если
p = NULL или
адреса узлов где-то
еще запоминаются!

Поиск слова в списке

Задача:

найти в списке заданное слово или определить, что его нет.

Функция Find:

ВХОД: слово (символьная строка);

ВЫХОД: адрес узла, содержащего это слово или **NULL**.

Алгоритм: проход по списку.

результат – адрес узла

ищем это слово

```
PNode Find ( PNode Head, char NewWord[] )  
{  
    PNode q = Head;  
    while ( q && strcmp ( q->word, NewWord) )  
        q = q->next;  
    return q;  
}
```

пока не дошли до
конца списка и слово
не равно заданному

Куда вставить новое слово?

Задача:

найти узел, перед которым нужно вставить, заданное слово, так чтобы в списке сохранился алфавитный порядок слов.

Функция `FindPlace`:

ВХОД: слово (символьная строка);

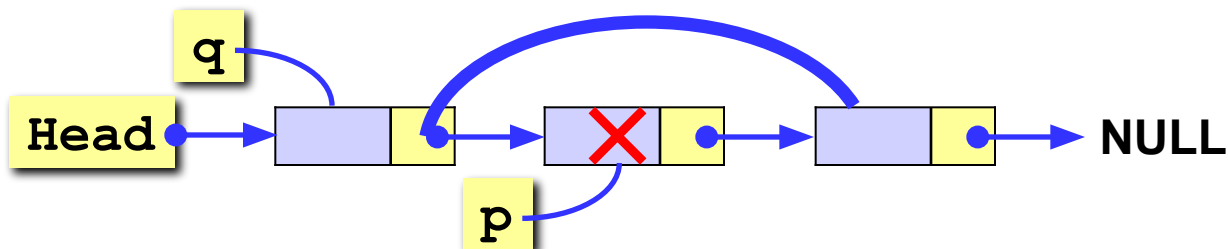
ВЫХОД: адрес узла, перед которым нужно вставить это слово или **NULL**, если слово нужно вставить в конец списка.

```
PNode FindPlace ( PNode Head, char NewWord[] )
{
    PNode q = Head;
    while ( q && strcmp(NewWord, q->word) > 0 )
        q = q->next;
    return q;
}
```

слово `NewWord` стоит по
алфавиту до `q->word`

Удаление узла

Проблема: нужно знать адрес предыдущего узла q .



```
void DeleteNode ( PNode &Head, PNode p )
```

```
{
  PNode q = Head;
```

```
  if ( Head == p )
    Head = p->next;
```

```
  else {
```

```
    while ( q && q->next != p )
      q = q->next;
```

```
    if ( q == NULL ) return;
    q->next = p->next;
```

```
  }
```

```
  delete p;
```

```
}
```

особый случай:
удаляем первый
узел

ищем предыдущий
узел, такой что
 $q->next == p$

освобождение памяти

Алфавитно-частотный словарь

Алгоритм:

- 1) открыть файл на чтение;

*read,
чтение*

```
FILE *in;  
in = fopen ( "input.dat", "r" );
```

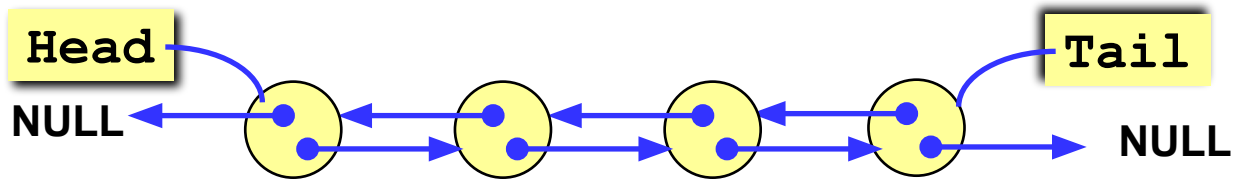
- 2) прочесть слово:

```
char word[80];  
...  
n = fscanf ( in, "%s", word );
```

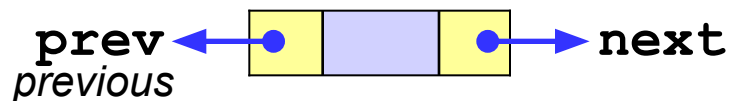
**ВВОДИТСЯ ТОЛЬКО ОДНО
слово (до пробела)!**

- 3) если файл закончился (**n!=1**), то перейти к шагу 7;
- 4) если слово найдено, увеличить счетчик (поле **count**);
- 5) если слова нет в списке, то
 - создать новый узел, заполнить поля (**CreateNode**);
 - найти узел, перед которым нужно вставить слово (**FindPlace**);
 - добавить узел (**AddBefore**);
- 6) перейти к шагу 2;
- 7) вывести список слов, используя проход по списку.

Двусвязные списки



Структура узла:



```
struct Node {
    char word[40];    // слово
    int  count;       // счетчик повторений
    Node *next;       // ссылка на следующий элемент
    Node *prev;       // ссылка на предыдущий элемент
};
```

Указатель на эту структуру:

```
typedef Node *PNode;
```

Адреса «головы» и «хвоста»:

```
PNode Head = NULL;
PNode Tail = NULL;
```



МОЖНО ДВИГАТЬСЯ В
обе стороны



нужно правильно
работать с двумя
указателями вместо
одного

Задания

- «4»:** «Собрать» из этих функций программу для построения алфавитно-частотного словаря. В конце файла вывести общее количество разных слов (количество элементов списка).
- «5»:** То же самое, но использовать двусвязные списки.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но вывести список слов в порядке убывания частоты, то есть, сначала те слова, которые встречаются чаще всего.

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 5. Стеки, очереди, деки

Стек



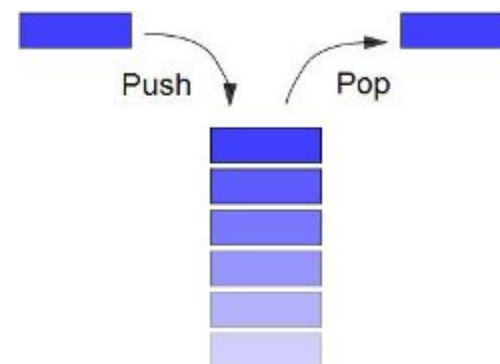
Стек – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно только с одного конца (**вершины стека**). *Stack* = кipa, куча, стопка (англ.)

LIFO = Last In – First Out

«Кто последним вошел, тот первым вышел».

Операции со стеком:

- 1) добавить элемент на вершину (*Push* = втолкнуть);
- 2) снять элемент с вершины (*Pop* = вылететь со звуком).



Пример задачи

Задача: вводится символьная строка, в которой записано выражение со скобками трех типов: `[ ]`, `{ }` и `( )`. Определить, верно ли расставлены скобки (не обращая внимания на остальные символы). Примеры:

`[ ( ) ] { }` `] [` `[ ( { ) ] }`

Упрощенная задача: то же самое, но с одним видом скобок.

Решение: счетчик вложенности скобок. Последовательность правильная, если в конце счетчик равен нулю и при проходе не разу не становился отрицательным.

(	(	)	)	(	)
1	2	1	0	1	0

(	(	)	)	)	(
1	2	1	0	-1	0

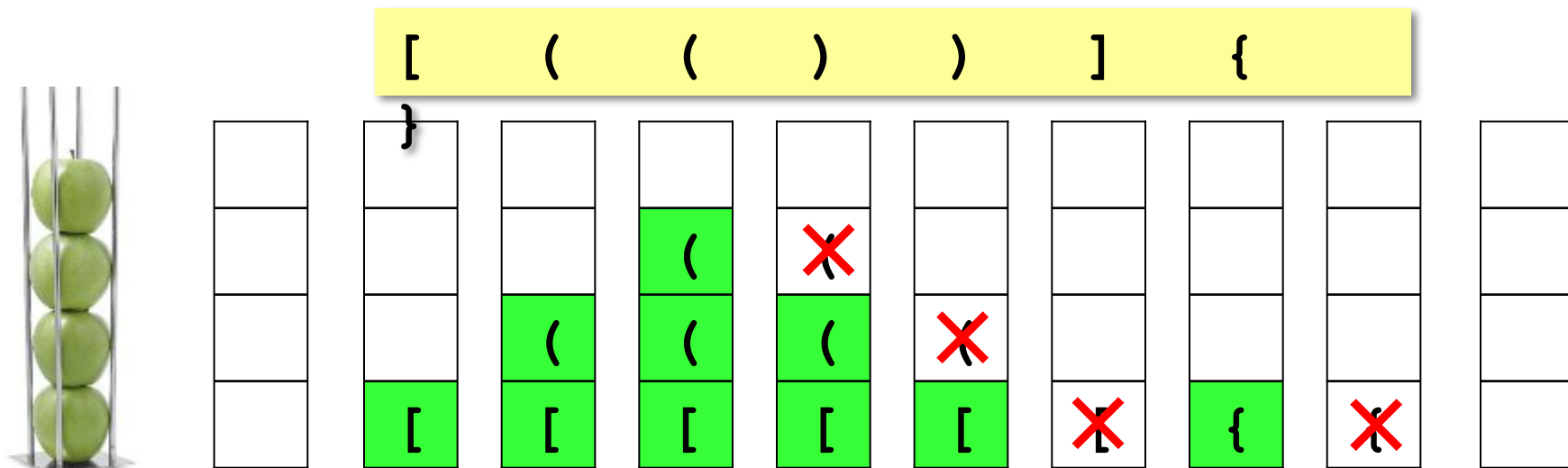
(	(	)	)	(
1	2	1	0	1



Можно ли решить исходную задачу так же, но с тремя счетчиками?

	[	(	{	)	]	}
(:	0	1		0		
[:	0	1			0	
{ :	0		1			0

Решение задачи со скобками



Алгоритм:

- 1) в начале стек пуст;
- 2) в цикле просматриваем все символы строки по порядку;
- 3) если очередной символ – открывающая скобка, заносим ее на вершину стека;
- 4) если символ – закрывающая скобка, проверяем вершину стека: там должна быть **соответствующая** открывающая скобка (если это не так, то ошибка);
- 5) если в конце стек не пуст, выражение неправильное.

Реализация стека (массив)

Структура-стек:

```
const MAXSIZE = 100;
struct Stack {
    char data[MAXSIZE]; // стек на 100 символов
    int  size;           // число элементов
};
```

Добавление элемента:

```
int Push ( Stack &S, char x )
{
    if ( S.size == MAXSIZE ) return 0;
    S.data[S.size] = x;
    S.size ++;
    return 1;
}
```

ошибка:
переполнение
стека

добавить элемент

нет ошибки

Реализация стека (массив)

Снятие элемента с вершины:

```
char Pop ( Stack &S )  
{  
    if ( S.size == 0 ) return char(255);  
    S.size --;  
    return S.data[S.size];  
}
```

ошибка:
стек пуст

Пустой или нет?

```
int isEmpty ( Stack &S )  
{  
    if ( S.size == 0 )  
        return 1;  
    else return 0;  
}
```

```
int isEmpty ( Stack &S )  
{  
    return (S.size == 0);  
}
```

Программа

```
void main()
{
    char br1[3] = { '(', '[', '{' };
    char br2[3] = { ')', ']', '}' };
    char s[80], upper;
    int i, k, error = 0;
    Stack S;
    S.size = 0;
    printf("Введите выражение со скобками > ");
    gets ( s );
    ... // здесь будет основной цикл обработки
    if ( ! error && (S.size == 0) )
        printf("\nВыражение правильное\n");
    else printf("\nВыражение неправильное\n");
}
```

открывающие
скобки

закрывающие
скобки

то, что сняли со стека

признак ошибки

Обработка строки (основной цикл)

```
for ( i = 0; i < strlen(s); i++ )  
{  
    for ( k = 0; k < 3; k++ )  
    {  
        if ( s[i] == br1[k] )    // если открывающая скобка  
        {  
            Push ( S, s[i] );    // втолкнуть в стек  
            break;  
        }  
        if ( s[i] == br2[k] )    // если закрывающая скобка  
        {  
            upper = Pop ( S );    // снять верхний элемент  
            if ( upper != br1[k] ) error = 1;  
            break;  
        }  
    }  
    if ( error ) break;  
}
```

цикл по всем символам строки s

цикл по всем видам скобок

ошибка: стек пуст или не та скобка

была ошибка: дальше нет смысла проверять

Реализация стека (список)

Структура узла:

```
struct Node {  
    char data;  
    Node *next;  
};  
typedef Node *PNode;
```

Добавление элемента:

```
void Push (PNode &Head, char x)  
{  
    PNode NewNode = new Node;  
    NewNode->data = x;  
    NewNode->next = Head;  
    Head = NewNode;  
}
```

Реализация стека (список)

Снятие элемента с вершины:

```
char Pop (PNode &Head) {
    char x;
    PNode q = Head;
    if ( Head == NULL ) return char(255);
    x = Head->data;
    Head = Head->next;
    delete q;
    return x;
}
```

стек пуст

Изменения в основной программе:

```
Stack S;
S.size = 0;
```

PNode S = NULL;

...

(S == NULL)

```
if ( ! error && (S.size == 0) )
    printf("\nВыражение правильное\n");
else printf("\nВыражение неправильное \n");
```

Вычисление арифметических выражений

Как вычислять автоматически:

$(a + b) / (c + d - 1)$

Инфиксная запись

(знак операции **между** операндами)



необходимы скобки!

Префиксная запись (знак операции **до** операндов)

$/$ $a + b$ $c + d - 1$

1

польская нотация,
[Jan Łukasiewicz](#) (1920)



скобки не нужны, можно однозначно
вычислить!

Постфиксная запись (знак операции **после** операндов)

$a + b$ $c + d - 1$

/

обратная польская нотация,
[F. L. Bauer](#) F. L. Bauer and [E. W. Dijkstra](#)

Запишите в постфиксной форме

$$(32 * 6 - 5) * (2 * 3 + 4) / (3 + 7 * 2)$$

$$(2 * 4 + 3 * 5) * (2 * 3 + 18 / 3 * 2) * (12 - 3)$$

$$(4 - 2 * 3) * (3 - 12 / 3 / 4) * (24 - 3 * 12)$$

Вычисление выражений

Постфиксная форма:

X = a b + c d + 1 - /

					d		1		
		b		c	c	c+d	c+d	c+d-1	
	a	a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	x

Алгоритм:

- 1) взять очередной элемент;
- 2) если это не знак операции, добавить его в стек;
- 3) если это знак операции, то
 - взять из стека два операнда;
 - выполнить операцию и записать результат в стек;
- 4) перейти к шагу 1.

Системный стек (*Windows – 1 Мб*)

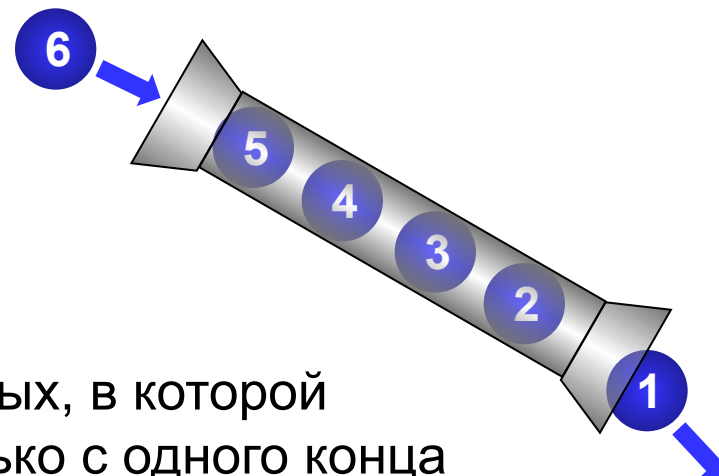
Используется для

- 1) размещения **локальных переменных**;
- 2) хранения **адресов возврата** (по которым переходит программа после выполнения функции или процедуры);
- 3) передачи **параметров** в функции и процедуры;
- 4) временного хранения данных (в программах на языке *Ассемблер*).

Переполнение стека (*stack overflow*):

- 1) слишком много локальных переменных
(**выход** – использовать динамические массивы);
- 2) очень много рекурсивных вызовов функций и процедур
(**выход** – переделать алгоритм так, чтобы уменьшить глубину рекурсии или отказаться от нее вообще).

Очередь



Очередь – это линейная структура данных, в которой добавление элементов возможно только с одного конца (**конца очереди**), а удаление элементов – только с другого конца (**начала очереди**).

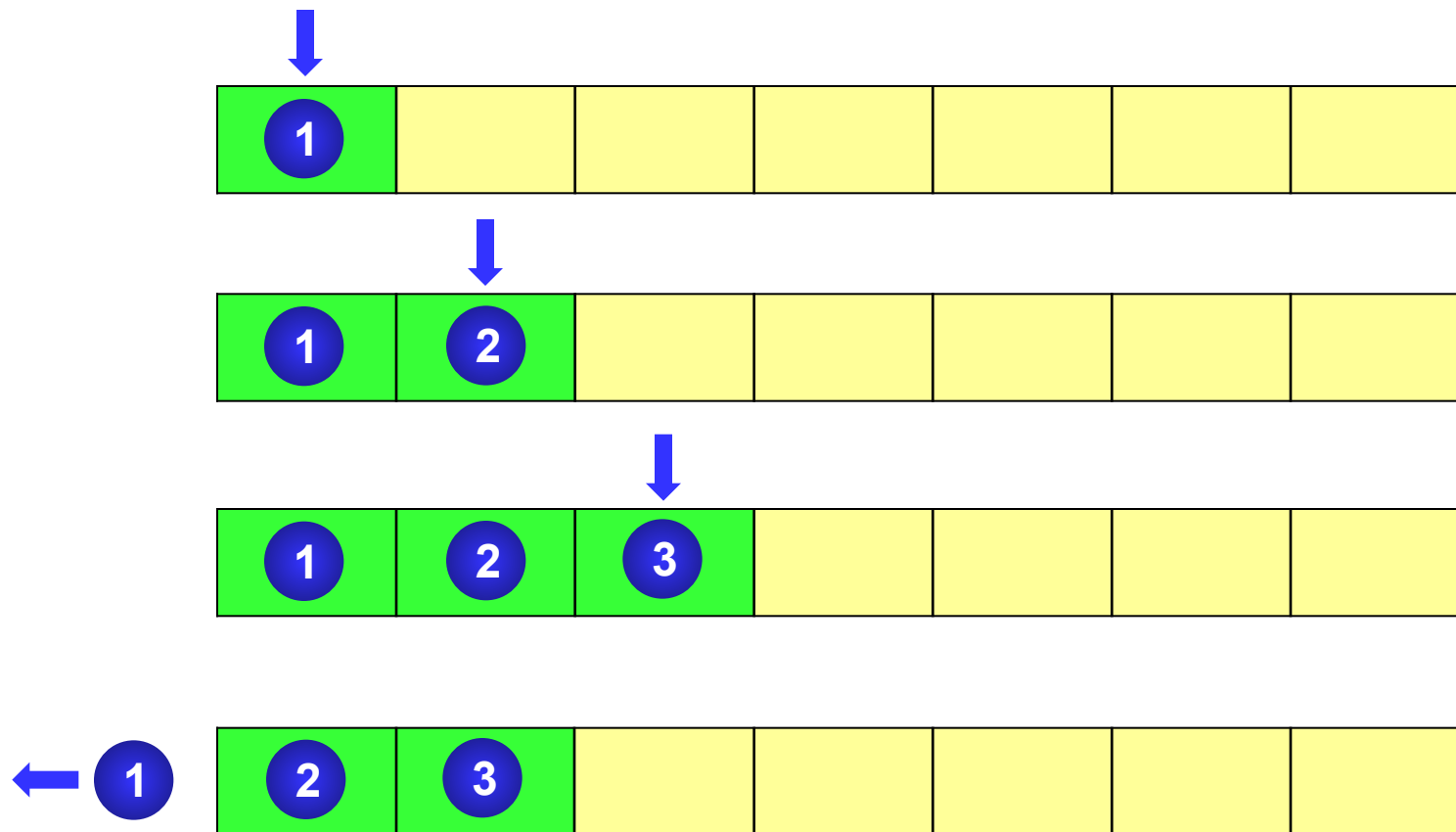
FIFO = *First In – First Out*

«Кто первым вошел, тот первым вышел».

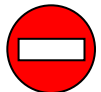
Операции с очередью:

- 1) добавить элемент в конец очереди (*PushTail* = втолкнуть в конец);
- 2) удалить элемент с начала очереди (*Pop*).

Реализация очереди (массив)

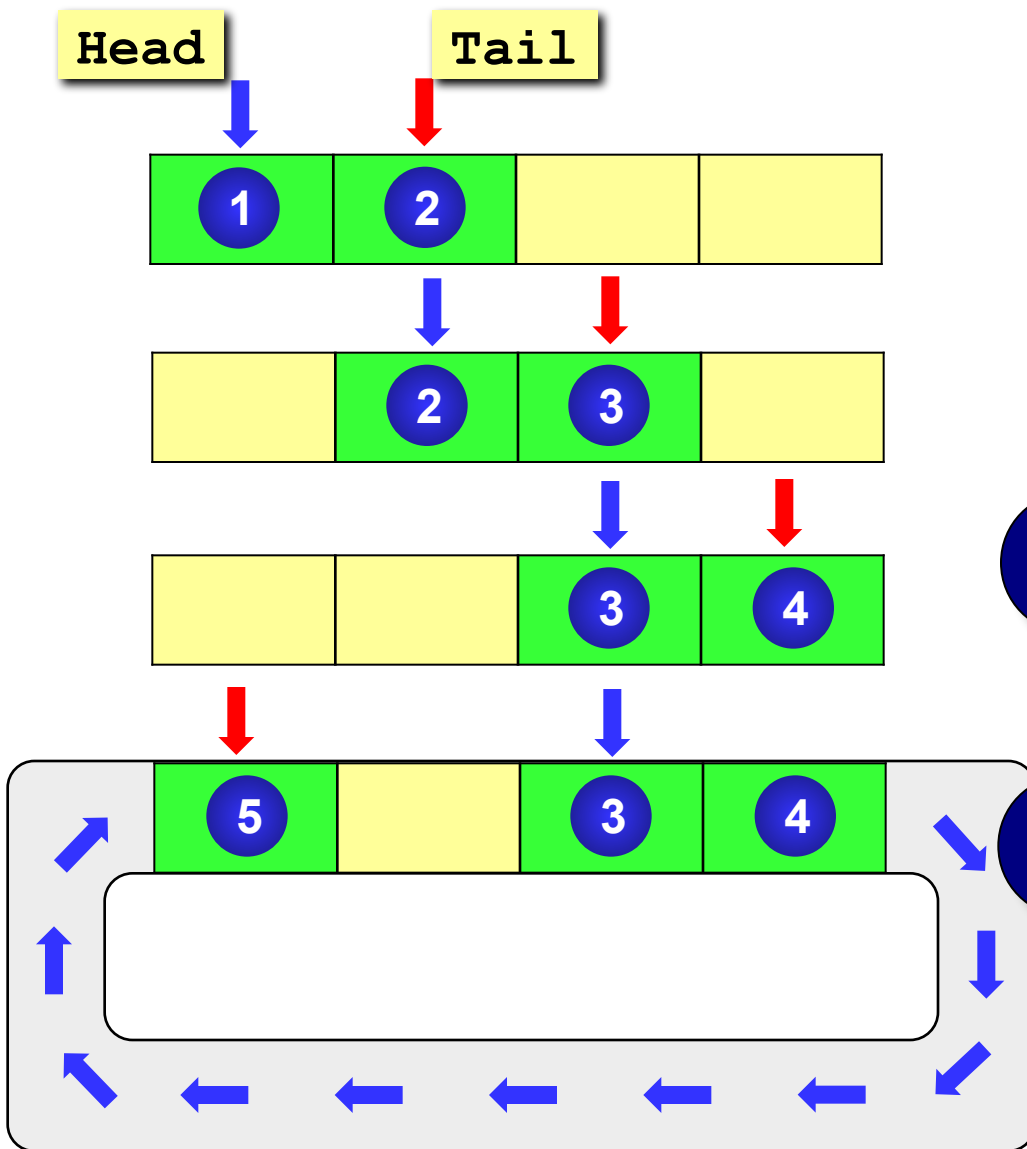


самый простой способ



- 1) нужно заранее выделить массив;
- 2) при выборке из очереди нужно сдвигать все элементы.

Реализация очереди (кольцевой массив)



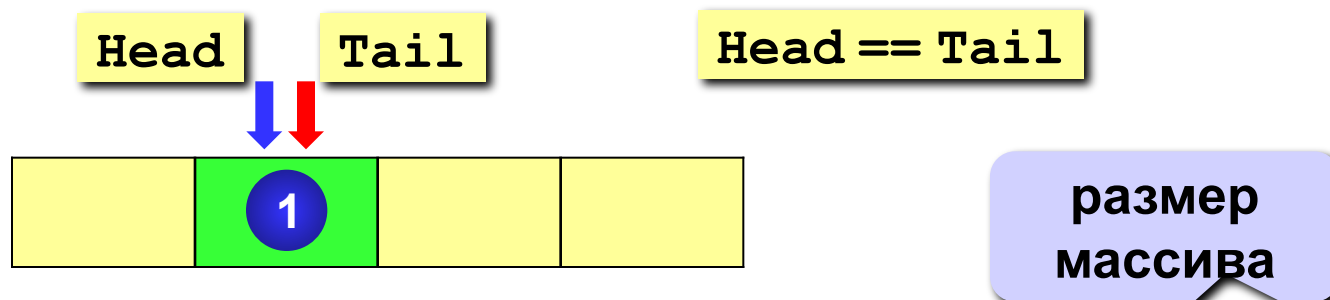
Сколько элементов можно хранить в такой очереди?



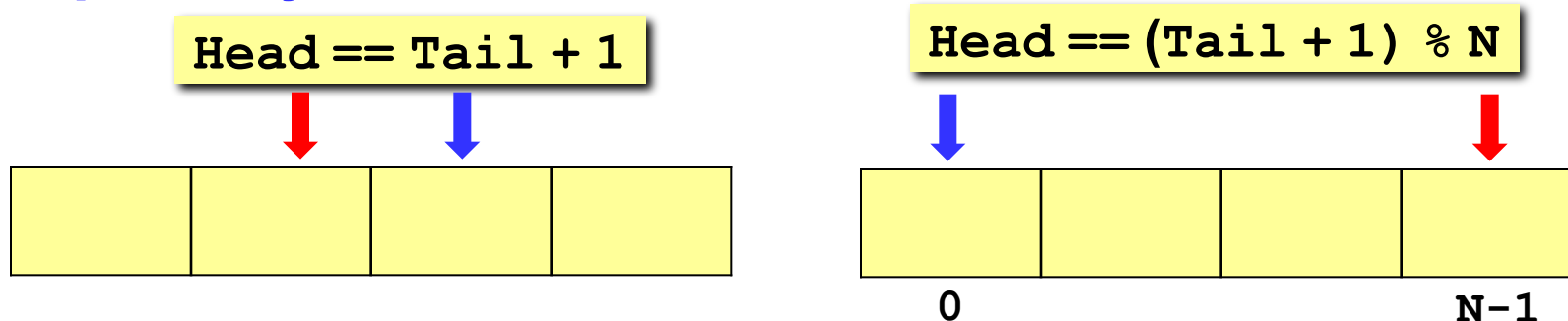
Как различить состояния «очередь пуста» и «очередь полна»?

Реализация очереди (кольцевой массив)

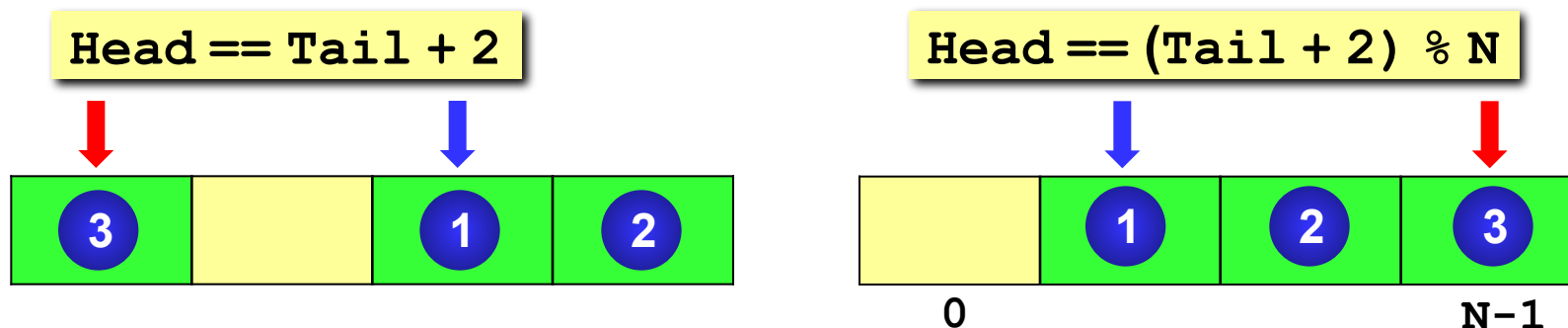
В очереди 1 элемент:



Очередь пуста:



Очередь полна:



Реализация очереди (кольцевой массив)

Структура данных:

```
const MAXSIZE = 100;  
struct Queue {  
    int data[MAXSIZE];  
    int head, tail;  
};
```

замкнуть в
кольцо

Добавление в очередь:

```
int PushTail ( Queue &Q, int x )  
{  
    if ( Q.head == (Q.tail+2) % MAXSIZE )  
        return 0;  
    Q.tail = (Q.tail + 1) % MAXSIZE;  
    Q.data[Q.tail] = x;  
    return 1;  
}
```

удачно добавили

очередь
полна, не
добавить

Реализация очереди (кольцевой массив)

Выборка из очереди:

```
int Pop ( Queue &Q )
{
    int temp;
    if ( Q.head == (Q.tail + 1) % MAXSIZE )
        return 32767;
    temp = Q.data[Q.head];
    Q.head = (Q.head + 1) % MAXSIZE;
    return temp;
}
```

очередь пуста

ВЗЯТЬ первый
элемент

удалить его из
очереди

Реализация очереди (списки)

Структура узла:

```
struct Node {  
    int  data;  
    Node *next;  
};  
  
typedef Node *PNode;
```

Тип данных «очередь»:

```
struct Queue {  
    PNode Head, Tail;  
};
```

Реализация очереди (списки)

Добавление элемента:

```
void PushTail ( Queue &Q, int x )
```

```
{
```

```
    PNode NewNode;
```

создаем
новый узел

```
    NewNode = new Node;
```

```
    NewNode->data = x;
```

```
    NewNode->next = NULL;
```

если в списке уже
что-то было,
добавляем в конец

```
    if ( Q.Tail )
```

```
        Q.Tail->next = NewNode;
```

```
    Q.Tail = NewNode;
```

```
    if ( Q.Head == NULL )
```

```
        Q.Head = Q.Tail;
```

если в списке
ничего не было, ...

```
}
```

Реализация очереди (списки)

Выборка элемента:

```
int Pop ( Queue &Q )  
{  
    PNode top = Q.Head;  
    int x;  
    if ( top == NULL )  
        return 32767;  
    x = top->data;  
    Q.Head = top->next;  
    if ( Q.Head == NULL )  
        Q.Tail = NULL;  
    delete top;  
    return x;  
}
```

если список
пуст, ...

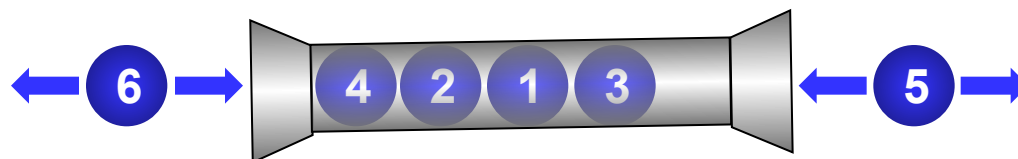
запомнили
первый элемент

если в списке
ничего не
осталось, ...

освободить
память

Дек

Дек (*deque* = ***double ended queue***, очередь с двумя концами) – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно с обоих концов.



Операции с деком:

- 1) добавление элемента в начало (*Push*);
- 2) удаление элемента с начала (*Pop*);
- 3) добавление элемента в конец (*PushTail*);
- 4) удаление элемента с конца (*PopTail*).

Реализация:

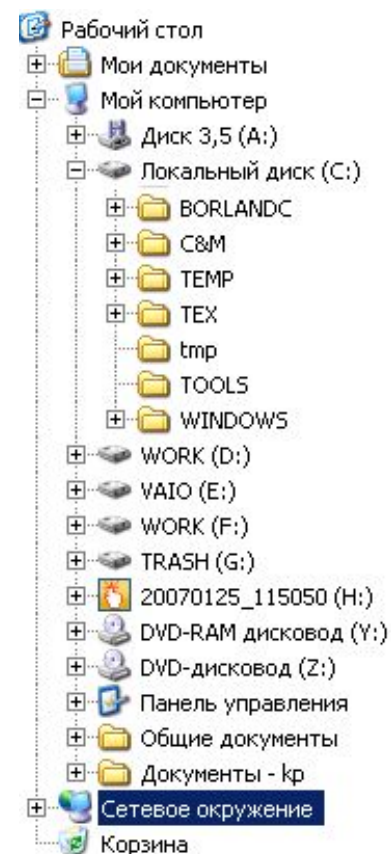
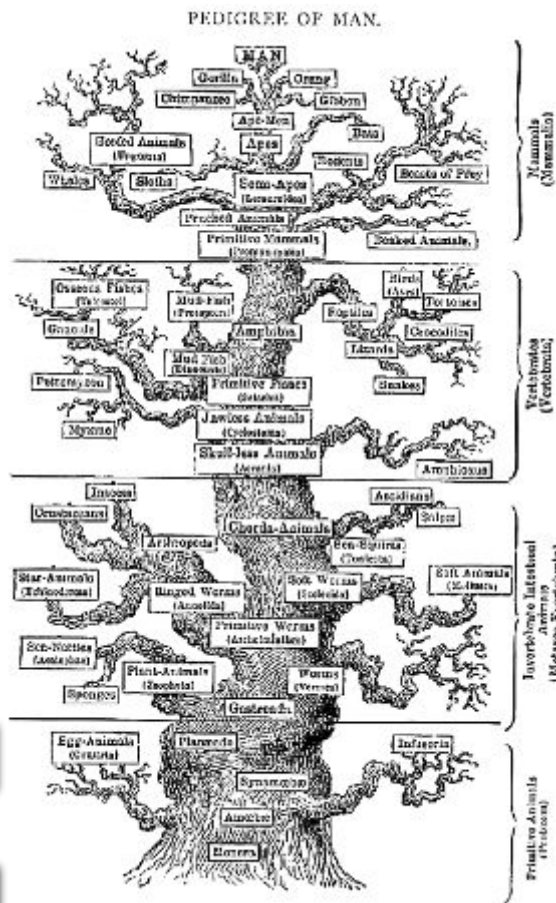
- 1) кольцевой массив;
- 2) двусвязный список.

Задания

- «4»:** В файле `input.dat` находится список чисел (или слов). Переписать его в файл `output.dat` в обратном порядке.
- «5»:** Составить программу, которая вычисляет значение арифметического выражения, записанного в постфиксной форме, с помощью стека. Выражение правильное, допускаются только однозначные числа и знаки `+`, `-`, `*`, `/`.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но допускаются многозначные числа.

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 6. Деревья



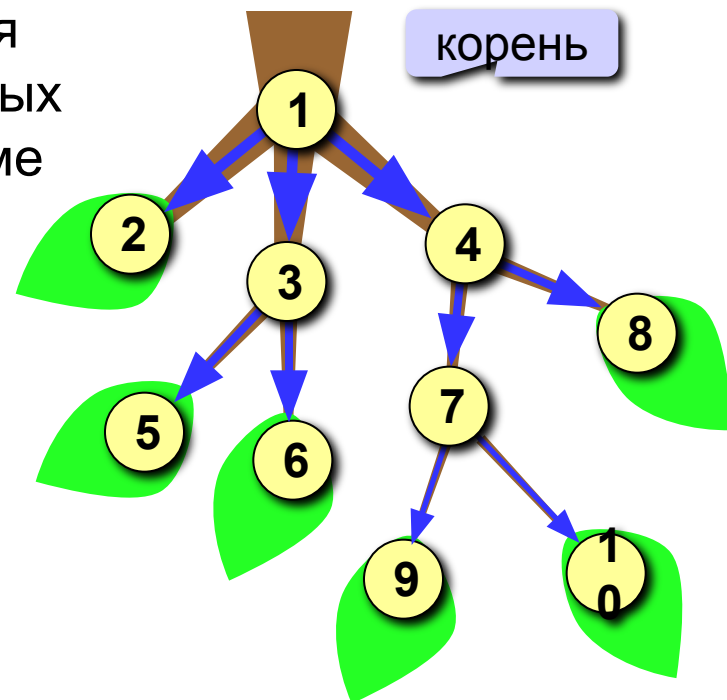
Что общего во всех примерах?

Деревья

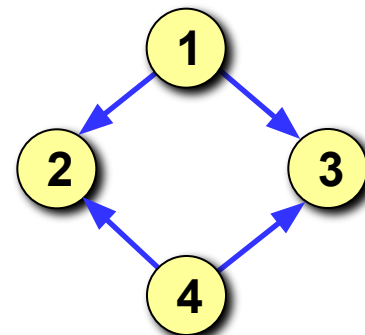
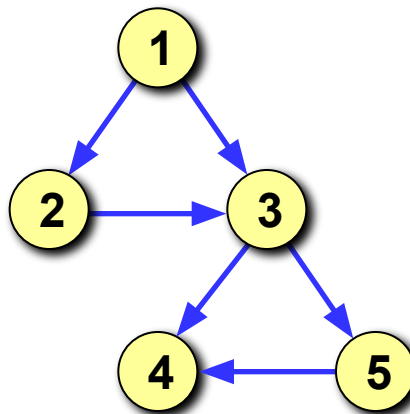
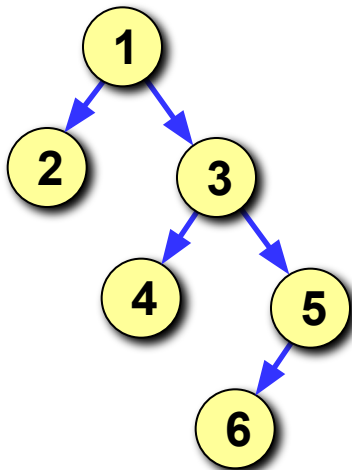
Дерево – это структура данных, состоящая из узлов и соединяющих их направленных ребер (дуг), причем в каждый узел (кроме корневого) ведет ровно одна дуга.

Корень – это начальный узел дерева.

Лист – это узел, из которого не выходит ни одной дуги.



Какие структуры – не деревья?



Деревья



С помощью деревьев изображаются отношения подчиненности (иерархия, «старший – младший», «родитель – ребенок»).

Предок узла x – это узел, из которого существует путь по стрелкам в узел x .

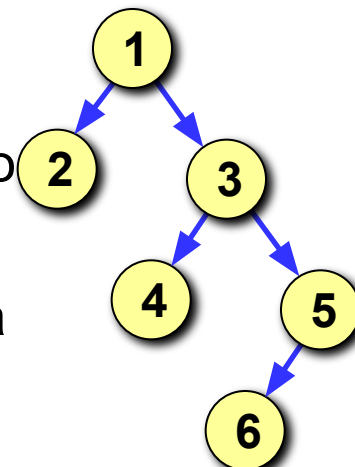
Потомок узла x – это узел, в который существует путь по стрелкам из узла x .

Родитель узла x – это узел, из которого существует дуга непосредственно в узел x .

Сын узла x – это узел, в который существует дуга непосредственно из узла x .

Брат узла x (*sibling*) – это узел, у которого тот же родитель, что и у узла x .

Высота дерева – это наибольшее расстояние от корня до листа (количество дуг).



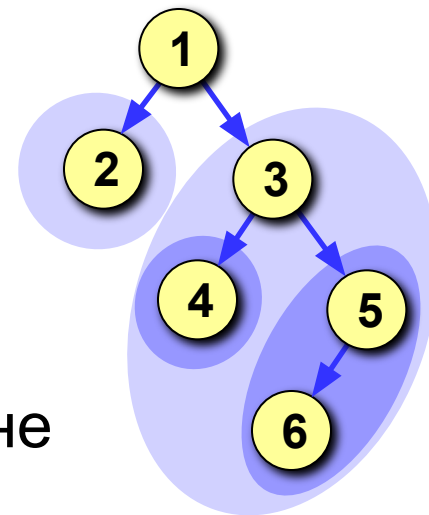
Дерево – рекурсивная структура данных

Рекурсивное определение:

1. Пустая структура – это дерево.
2. Дерево – это корень и несколько связанных с ним деревьев.

Двоичное (бинарное) дерево – это дерево, в котором каждый узел имеет не более двух сыновей.

1. Пустая структура – это двоичное дерево.
2. Двоичное дерево – это корень и два связанных с ним двоичных дерева (левое и правое поддеревья).



Двоичные деревья

Применение:

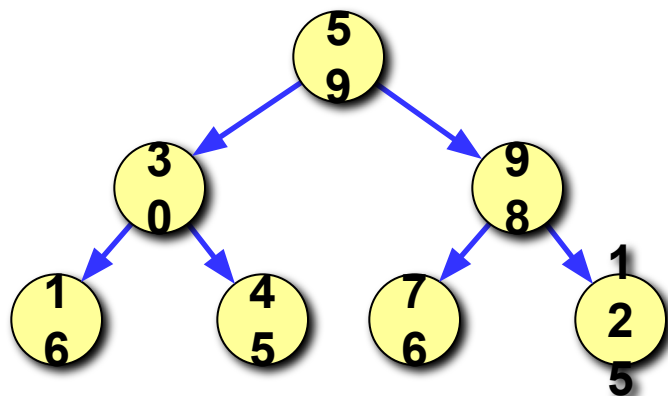
- 1) поиск данных в специально построенных деревьях (базы данных);
- 2) сортировка данных;
- 3) вычисление арифметических выражений;
- 4) кодирование (метод Хаффмана).

Структура узла:

```
struct Node {  
    int data;           // полезные данные  
    Node *left, *right; // ссылки на левого  
                        // и правого сыновей  
};  
typedef Node *PNode;
```

Двоичные деревья поиска

Ключ – это характеристика узла, по которой выполняется поиск (чаще всего – одно из полей структуры).



Какая закономерность?

Слева от каждого узла находятся узлы с меньшими ключами, а справа – с бóльшими.

Как искать ключ, равный x :

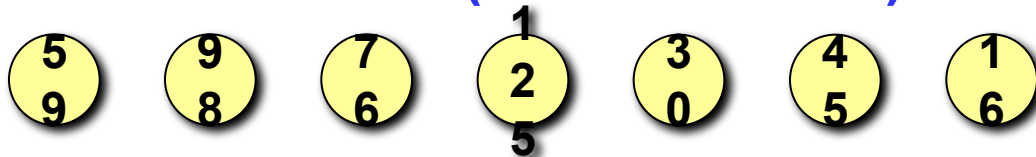
- 1) если дерево пустое, ключ не найден;
- 2) если ключ узла равен x , то стоп.
- 3) если ключ узла меньше x , то искать x в левом поддереве;
- 4) если ключ узла больше x , то искать x в правом поддереве.



Сведение задачи к такой же задаче меньшей размерности – это ...?

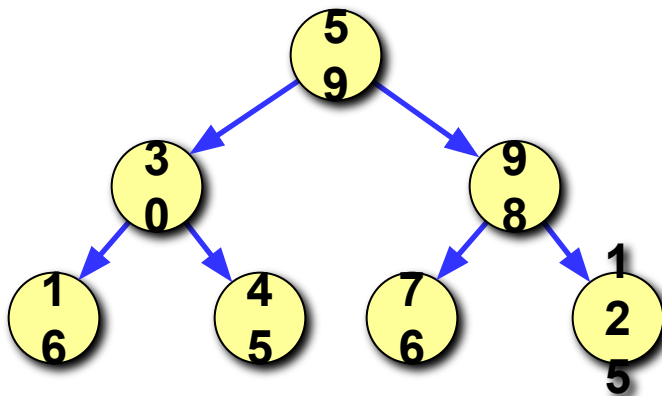
Двоичные деревья поиска

Поиск в массиве (N элементов):



При каждом сравнении отбрасывается 1 элемент.
Число сравнений – N .

Поиск по дереву (N элементов):



При каждом сравнении отбрасывается половина оставшихся элементов.
Число сравнений $\sim \log_2 N$.



быстрый поиск



- 1) нужно заранее построить дерево;
- 2) желательно, чтобы дерево было минимальной высоты.

Реализация алгоритма поиска

```
//-----  
//  Функция Search – поиск по дереву  
//  Вход: Tree – адрес корня,  
//         x – что ищем  
//  Выход: адрес узла или NULL (не нашли)  
//-----  
PNode Search (PNode Tree, int x)  
{  
    if ( ! Tree ) return NULL;  
    if ( x == Tree->data )  
        return Tree;  
    if ( x < Tree->data )  
        return Search(Tree->left, x);  
    else  
        return Search(Tree->right, x);  
}
```

дерево пустое:
ключ не нашли...

нашли,
возвращаем
адрес корня

искать в
левом
поддереве

искать в
правом
поддереве

Как построить дерево поиска?

```
//-----  
// Функция AddToTree - добавить элемент к дереву  
// Вход: Tree - адрес корня,  
//       x   - что добавляем  
//-----  
void AddToTree (PNode &Tree, int x)  
{  
    if ( ! Tree ) {  
        Tree = new Node;  
        Tree->data = x;  
        Tree->left = NULL;  
        Tree->right = NULL;  
        return;  
    }  
    if ( x < Tree->data )  
        AddToTree ( Tree->left, x );  
    else AddToTree ( Tree->right, x );  
}
```

адрес корня может
измениться

дерево пустое: создаем
новый узел (корень)

добавляем к левому или
правому поддереву

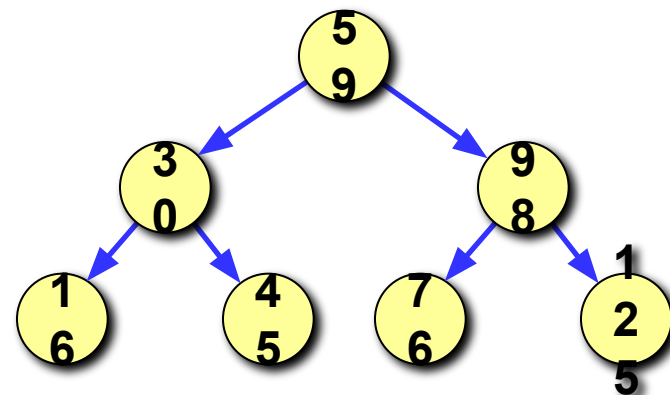


Минимальная высота не гарантируется!

Обход дерева

Обход дерева – это перечисление всех узлов в определенном порядке.

Обход ЛКП («левый – корень – правый»):



Обход ПКЛ («правый – корень – левый»):



Обход КЛП («корень – левый – правый»):



Обход ЛПК («левый – правый – корень»):



Обход дерева – реализация

```
//-----  
//  Функция LKP – обход дерева в порядке ЛКП  
//                      (левый – корень – правый)  
//  Вход: Tree – адрес корня  
//-----  
  
void LKP ( PNode Tree )  
{  
    if ( ! Tree ) return;  
    LKP ( Tree->left );  
    printf ( "%d ", Tree->data );  
    LKP ( Tree->right );  
}
```

обход этой ветки
закончен

обход левого поддерева

вывод данных корня

обход правого поддерева

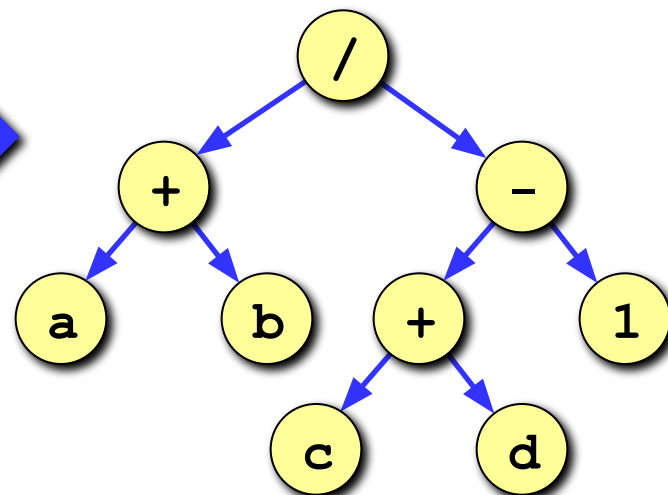


**Для рекурсивной структуры удобно
применять рекурсивную обработку!**

Разбор арифметических выражений

Как вычислять автоматически:

$(a + b) / (c + d - 1)$



Инфиксная запись, обход ЛКП

(знак операции **между** операндами)

$a + b / c + d -$



¹ необходимы скобки!

Префиксная запись, КЛП (знак операции **до** операндов)

$/ + a b - + c d$

польская нотация,
[Jan Łukasiewicz](#) (1920)



¹ скобки не нужны, можно однозначно вычислить!

Постфиксная запись, ЛПК (знак операции **после** операндов)

$a b + c d + 1 -$

обратная польская нотация,
[F. L. Bauer](#) F. L. Bauer and [E. W. Dijkstra](#)

Вычисление выражений

Постфиксная форма:

X = a b + c d + 1 - /

					d		1		
		b		c	c	c+d	c+d	c+d-1	
	a	a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	x

Алгоритм:

- 1) взять очередной элемент;
- 2) если это не знак операции, добавить его в стек;
- 3) если это знак операции, то
 - взять из стека два операнда;
 - выполнить операцию и записать результат в стек;
- 4) перейти к шагу 1.

Вычисление выражений

Задача: в символьной строке записано правильное арифметическое выражение, которое может содержать только однозначные числа и знаки операций $+-*\backslash$. Вычислить это выражение.

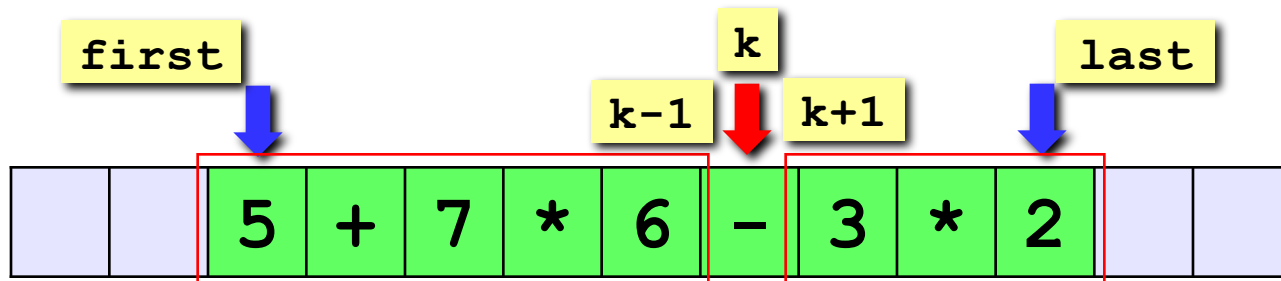
Алгоритм:

- 1) ввести строку;
- 2) построить дерево;
- 3) вычислить выражение по дереву.

Ограничения:

- 1) ошибки не обрабатываем;
- 2) многозначные числа не разрешены;
- 3) дробные числа не разрешены;
- 4) скобки не разрешены.

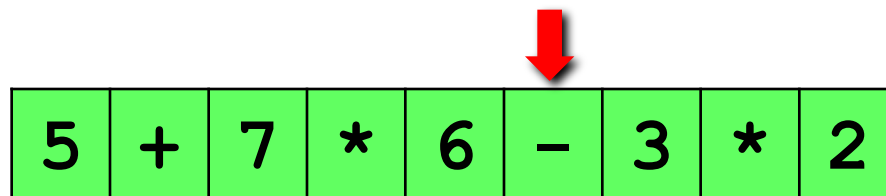
Построение дерева



Алгоритм:

- 1) если **first=last** (остался один символ – число), то создать новый узел и записать в него этот элемент; иначе...
- 2) среди элементов от **first** до **last** включительно найти **последнюю** операцию (элемент с номером **k**);
- 3) создать новый узел (корень) и записать в него **знак операции**;
- 4) рекурсивно применить этот алгоритм два раза:
 - построить **левое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от **first** до **k-1**;
 - построить **правое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от **k+1** до **last**.

Как найти последнюю операцию?



Порядок выполнения операций

- умножение и деление;
- сложение и вычитание.

Приоритет (старшинство) – число, определяющее последовательность выполнения операций: раньше выполняются операции с большим приоритетом:

- умножение и деление (приоритет **2**);
- сложение и вычитание (приоритет **1**).



Нужно искать последнюю операцию с наименьшим приоритетом!

Приоритет операции

```
//-----  
// Функция Priority – приоритет операции  
// Вход:  символ операции  
// Выход: приоритет или 100, если не операция  
//-----  
int Priority ( char c )  
{  
    switch ( c ) {  
        case '+': case '-':  
            return 1;  
        case '*': case '/':  
            return 2;  
    }  
    return 100;  
}
```

сложение и
вычитание:
приоритет 1

умножение и
деление:
приоритет 2

это вообще не
операция

Номер последней операции

```
//-----
//  Функция LastOperation - номер последней операции
//  Вход:  строка, номера первого и последнего
//         символов рассматриваемой части
//  Выход: номер символа - последней операции
//-----
int LastOperation ( char Expr[], int first, int last )
{
    int MinPrt, i, k, prt;
    MinPrt = 100;
    for( i=first; i <= last; i++ ) {
        prt = Priority ( Expr[i] );
        if ( prt <= MinPrt ) {
            MinPrt = prt;
            k = i;
        }
    }
    return k;
}
```

проверяем все
СИМВОЛЫ

нашли операцию с
минимальным
приоритетом

вернуть номер
СИМВОЛА

Построение дерева

Структура узла

```
struct Node {  
    char data;  
    Node *left, *right;  
};  
typedef Node *PNode;
```

Создание узла для числа (без потомков)

```
PNode NumberNode ( char c )  
{  
    PNode Tree = new Node;  
    Tree->data = c;  
    Tree->left = NULL;  
    Tree->right = NULL;  
    return Tree;  
}
```

ОДИН СИМВОЛ, ЧИСЛО

возвращает адрес
созданного узла

Построение дерева

```
//-----  
//  Функция MakeTree – построение дерева  
//  Вход:  строка, номера первого и последнего  
//         символов рассматриваемой части  
//  Выход: адрес построенного дерева  
//-----  
PNode MakeTree ( char Expr[], int first, int last )  
{  
    PNode Tree;  
    int k;  
    if ( first == last )  
        return NumberNode ( Expr[first] );  
    k = LastOperation ( Expr, first, last );  
    Tree = new Node;  
    Tree->data  = Expr[k];  
    Tree->left  = MakeTree ( Expr, first, k-1 );  
    Tree->right = MakeTree ( Expr, k+1, last );  
    return Tree;  
}
```

ОСТАЛОСЬ
ТОЛЬКО ЧИСЛО

НОВЫЙ УЗЕЛ:
ОПЕРАЦИЯ

Вычисление выражения по дереву

```
//-----  
//  функция CalcTree - вычисление по дереву  
//  Вход:  адрес дерева  
//  Выход: значение выражения  
//-----  
int CalcTree (PNode Tree)  
{  
    int num1, num2;  
    if ( ! Tree->left ) return Tree->data - '0';  
    num1 = CalcTree( Tree->left);  
    num2 = CalcTree(Tree->right);  
    switch ( Tree->data ) {  
        case '+': return  num1+num2;  
        case '-': return  num1-num2;  
        case '*': return  num1*num2;  
        case '/': return  num1/num2;  
    }  
    return 32767;  
}
```

вернуть число,
если это лист

вычисляем
операнды
(поддерева)

выполняем
операцию

некорректная
операция

Основная программа

```
//-----  
// Основная программа: ввод и вычисление  
// выражения с помощью дерева  
//-----  
void main()  
{  
    char s[80];  
    PNode Tree;  
    printf ( "Введите выражение > " );  
    gets(s);  
    Tree = MakeTree ( s, 0, strlen(s)-1 );  
    printf ( "= %d \n", CalcTree ( Tree ) );  
    getch();  
}
```

Дерево игры

Задача.

Перед двумя игроками лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй – 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней.

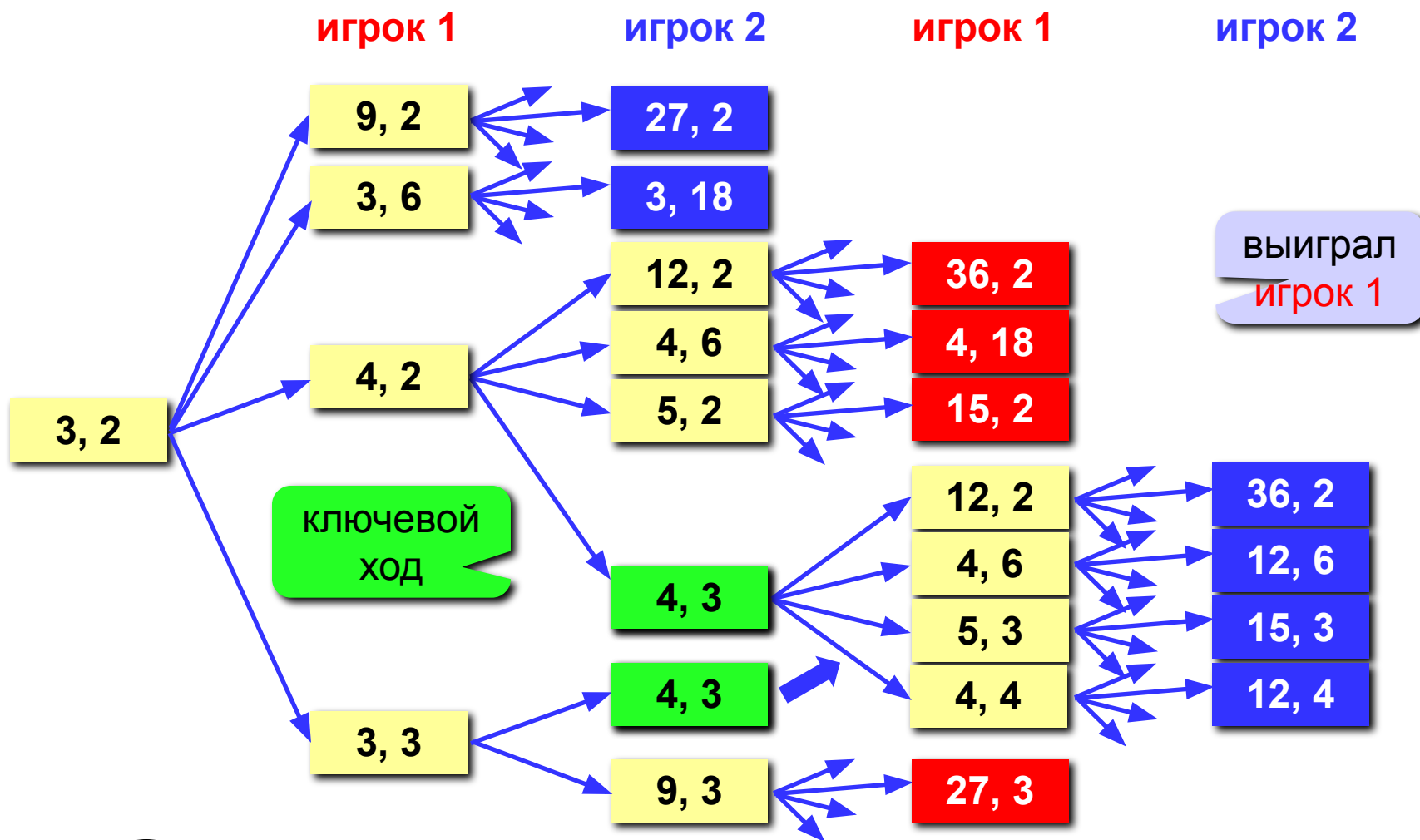
Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или **увеличивает в 3 раза** число камней в какой-то куче, или **добавляет 1 камень** в какую-то кучу.

Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится **не менее 16**.

Кто выигрывает при безошибочной игре – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок?



Дерево игры



При правильной игре выиграет **игрок 2**!

Задания

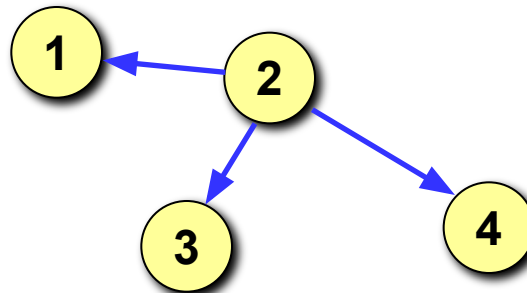
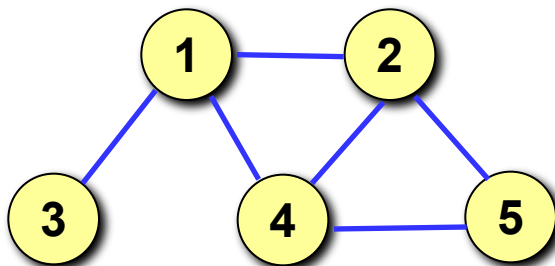
- «4»:** «Собрать» программу для вычисления правильного арифметического выражения, включающего только однозначные числа и знаки операций $+$, $-$, $*$, $/$.
- «5»:** То же самое, но допускаются также многозначные числа и скобки.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но с обработкой ошибок (должно выводиться сообщение).

Динамические структуры данных (язык Си)

Тема 7. Графы

Определения

Граф – это набор вершин (узлов) и соединяющих их ребер (дуг).



Направленный граф (ориентированный, орграф) – это граф, в котором все дуги имеют направления.

Цепь – это последовательность ребер, соединяющих две вершины (в орграфе – **путь**).

Цикл – это цепь из какой-то вершины в нее саму.

Взвешенный граф (сеть) – это граф, в котором каждому ребру приписывается вес (длина).



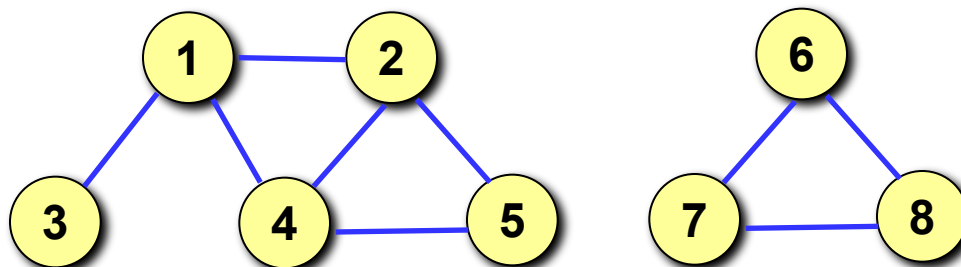
Дерево – это граф?

Да, без циклов!

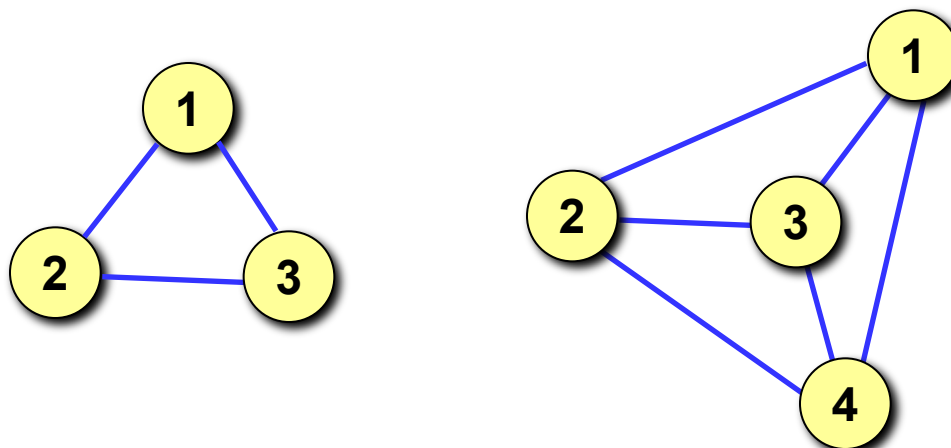
Определения

Связный граф – это граф, в котором существует цепь между каждой парой вершин.

k-связный граф – это граф, который можно разбить на **k** связных частей.

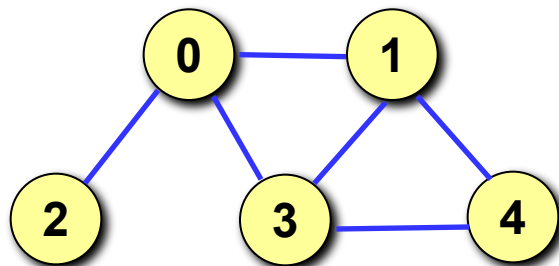


Полный граф – это граф, в котором проведены все возможные ребра (n вершин $\rightarrow n(n-1)/2$ ребер).



Описание графа

Матрица смежности – это матрица, элемент $M[i][j]$ которой равен 1, если существует ребро из вершины i в вершину j , и равен 0, если такого ребра нет.



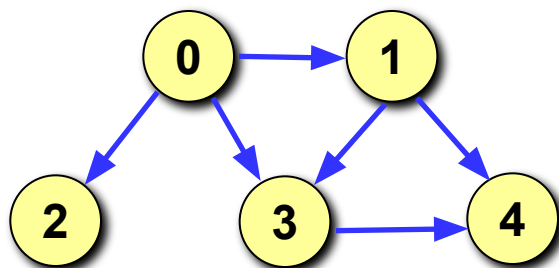
	0	1	2	3	4
0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0

Список смежности

0	1	2	3		
1	0	3	4		
2	0				
3	0	1	4		
4	1	3			



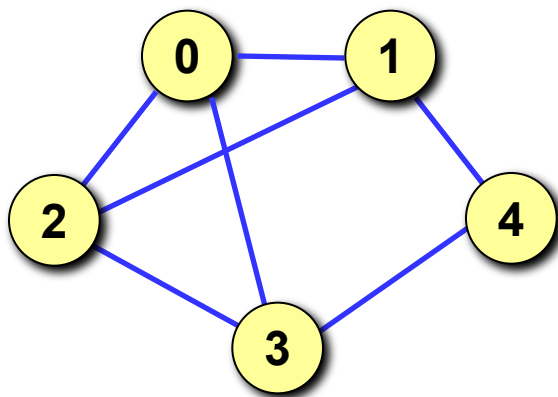
Симметрия!



	0	1	2	3	4
0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0

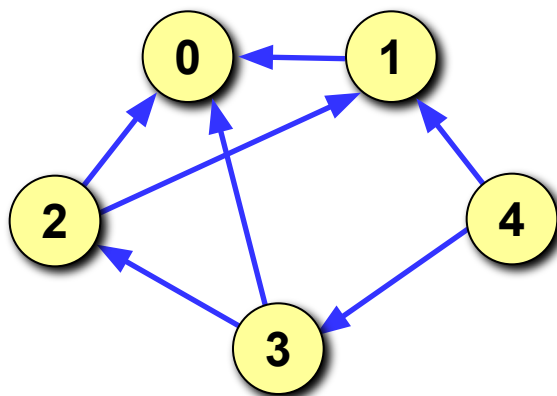
0	1	2	3		
1	3	4			
2					
3	4				
4					

Матрица и список смежности



	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

0					
1					
2					
3					
4					

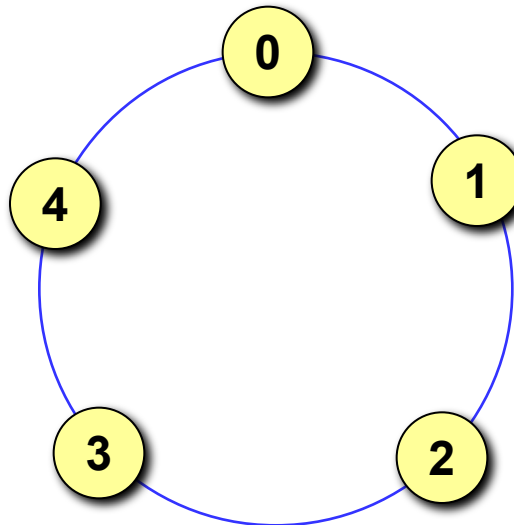


	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

0					
1					
2					
3					
4					

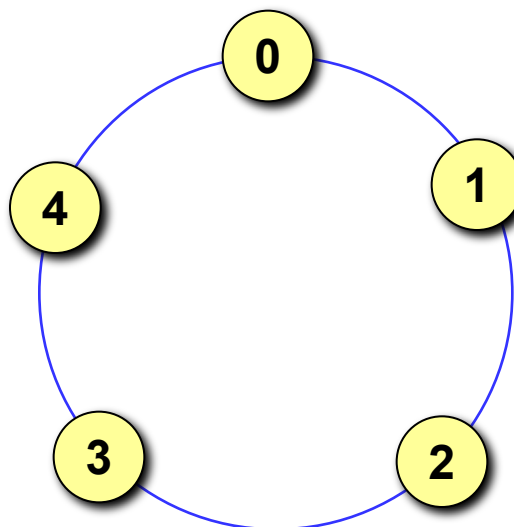
Построения графа по матрице смежности

	0	1	2	3	4
0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1
2	1	1	0	1	0
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0



0					
1					
2					
3					
4					

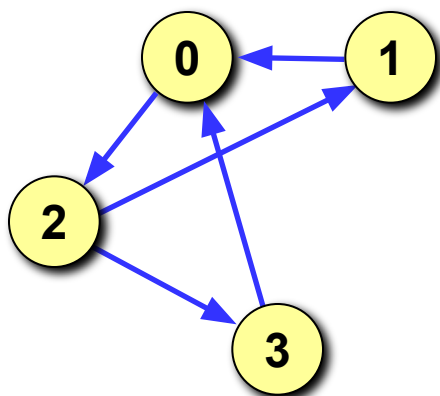
	0	1	2	3	4
0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0
3	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0



0					
1					
2					
3					
4					

Как обнаружить цепи и циклы?

Задача: определить, существует ли цепь длины k из вершины i в вершину j (или цикл длиной k из вершины i в нее саму).



$M =$

	0	1	2	3
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	1
3	1	0	0	0

$M^2[i][j]=1$, если

$M[i][0]=1$	и	$M[0][j]=1$	или
$M[i][1]=1$	и	$M[1][j]=1$	или
$M[i][2]=1$	и	$M[2][j]=1$	или
$M[i][3]=1$	и	$M[3][j]=1$	

строка i

логическое
умножение

столбец j

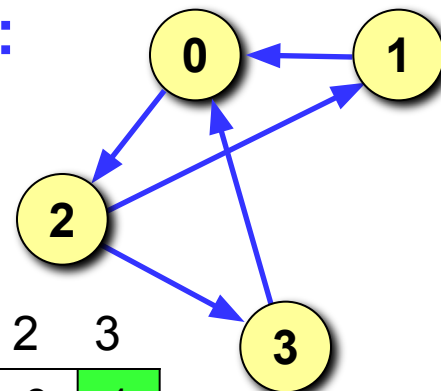
логическое
сложение

Как обнаружить цепи и циклы?

Логическое умножение матрицы на себя:

матрица путей
длины 2

$$M^2 = M \otimes M$$



$$M^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \otimes \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M^2[2][0] = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

маршрут 2-1-0

маршрут 2-3-0

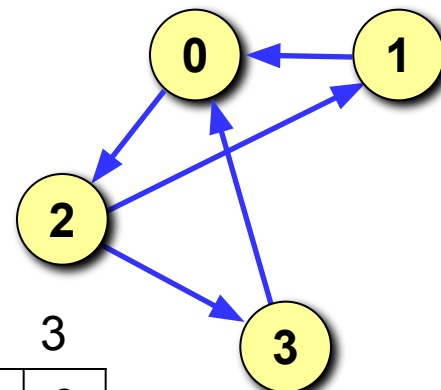
Как обнаружить цепи и циклы?

Матрица путей длины 3:

$$M^3 = M^2 \otimes M$$

$$M^3 = \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \otimes \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

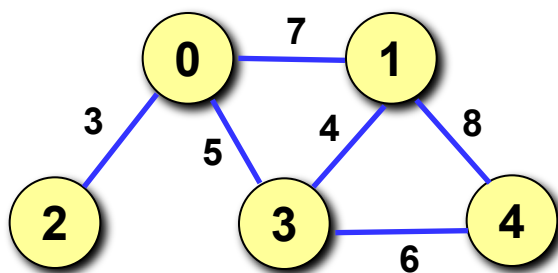
$$M^4 = \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \otimes \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



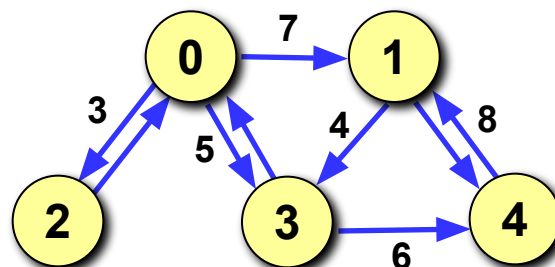
на главной
диагонали –
циклы!

Весовая матрица

Весовая матрица – это матрица, элемент $W[i][j]$ которой равен весу ребра из вершины i в вершину j (если оно есть), или равен ∞ , если такого ребра нет.



	0	1	2	3	4
0	0	7	3	5	∞
1	7	0	∞	4	8
2	3	∞	0	∞	∞
3	5	4	∞	0	6
4	∞	8	∞	6	0

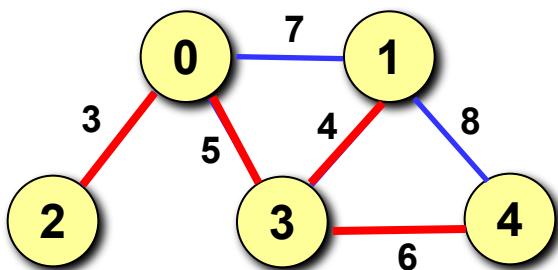


	0	1	2	3	4
0	0	7	3	5	∞
1	∞	0	∞	4	8
2	3	∞	0	∞	∞
3	5	∞	∞	0	6
4	∞	8	∞	∞	0

Задача Прима-Краскала

Задача: соединить N городов телефонной сетью так, чтобы длина телефонных линий была минимальная.

Та же задача: дан связный граф с N вершинами, веса ребер заданы весовой матрицей W . Нужно найти набор ребер, соединяющий все вершины графа (**остовное дерево**) и имеющий наименьший вес.



	0	1	2	3	4
0	0	7	3	5	∞
1	7	0	∞	4	8
2	3	∞	0	∞	∞
3	5	4	∞	0	6
4	∞	8	∞	6	0

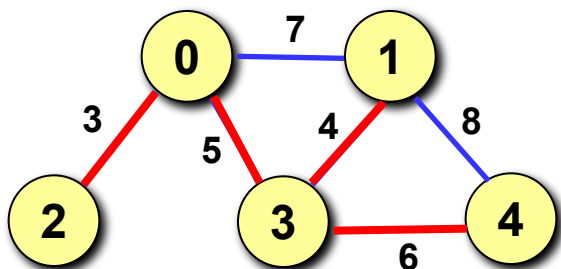
Жадный алгоритм

Жадный алгоритм – это многошаговый алгоритм, в котором на каждом шаге принимается решение, лучшее в данный момент.



В целом может получиться не оптимальное решение (последовательность шагов)!

Шаг в задаче Прима-Краскала – это выбор еще невыбранного ребра и добавление его к решению.



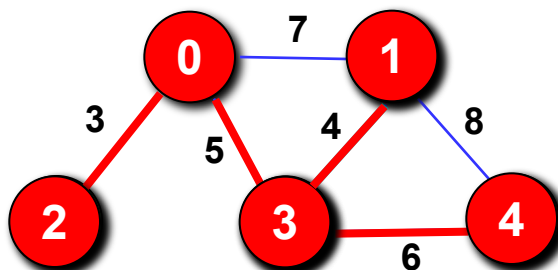
В задаче Прима-Краскала жадный алгоритм дает оптимальное решение!

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Проблема: как проверить, что

- 1) ребро не выбрано, и
- 2) ребро не образует цикла с выбранными ребрами.

Решение: присвоить каждой вершине свой цвет и перекрашивать вершины при добавлении ребра.



Алгоритм:

- 1) покрасить все вершины в разные цвета;
- 2) сделать **N-1** раз в цикле:
 - выбрать ребро (i, j) минимальной длины из всех ребер, соединяющих вершины разного цвета;
 - перекрасить все вершины, имеющие цвет j , в цвет i .
- 3) вывести найденные ребра.

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Структура «ребро»:

```
struct rebro {  
    int i, j;      // номера вершин  
};
```

Основная программа:

```
const N = 5;  
void main()  
{  
    int W[N][N], Color[N], i, j,  
        k, min, col_i, col_j;  
    rebro Reb[N-1];  
    ...// здесь надо ввести матрицу W  
    for ( i = 0; i < N; i ++ ) // раскрасить вершины  
        Color[i] = i;  
    ...// основной алгоритм – заполнение массива Reb  
    ...// вывести найденные ребра (массив Reb)  
}
```

весовая
матрица

цвета
вершин

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Основной алгоритм:

```
for ( k = 0; k < N-1; k ++ ) {  
    min = 30000; // большое число  
    for ( i = 0; i < N-1; i ++ )  
        for ( j = i+1; j < N; j ++ )  
            if ( Color[i] != Color[j] &&  
                W[i][j] < min ) {  
                min = W[i][j];  
                Reb[k].i = i;  
                Reb[k].j = j;  
                col_i = Color[i];  
                col_j = Color[j];  
            }  
    for ( i = 0; i < N; i ++ )  
        if ( Color[i] == col_j ) Color[i] = col_i;  
}
```

нужно выбрать
N-1 ребро

цикл по всем
парам вершин

учитываем
только пары с
разным цветом
вершин

запоминаем ребро и
цвета вершин

перекрашиваем
вершины цвета col_j

Сложность алгоритма

Основной цикл:

```
for ( k = 0; k < N-1; k ++ ) {  
    ...  
    for ( i = 0; i < N-1; i ++ )  
        for ( j = i+1; j < N; j ++ )  
            ...  
}
```

три вложенных
цикла, в каждом
числе шагов $\leq N$

Количество операций:

$O(N^3)$ растёт не быстрее, чем N^3

Требуемая память:

```
int W[N][N], Color[N];  
rebro Reb[N-1];
```



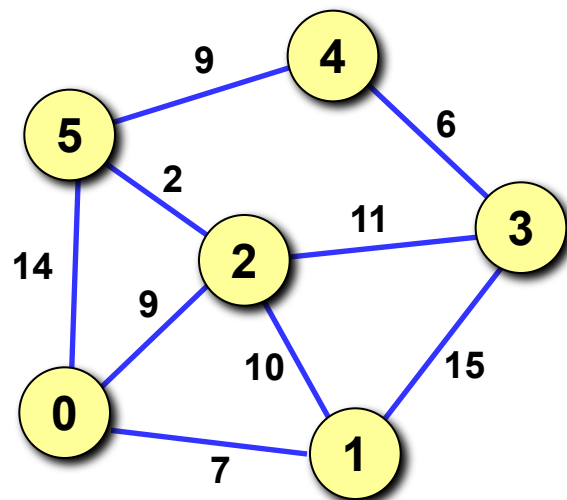
$O(N^2)$

Кратчайшие пути (алгоритм Дейкстры)

Задача: задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти кратчайшие расстояния от заданного города до всех остальных городов.

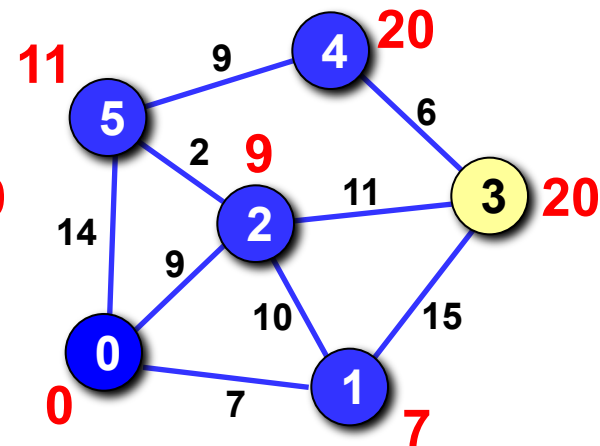
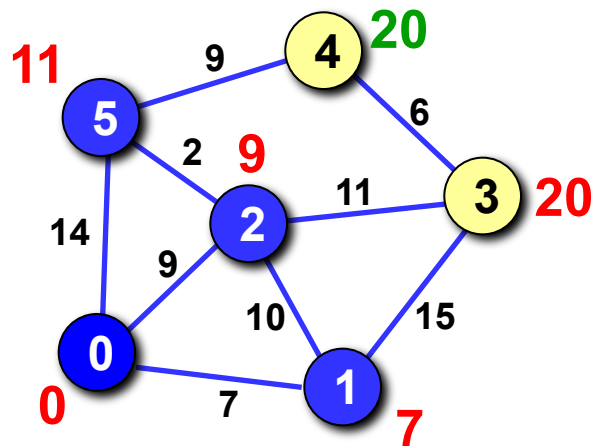
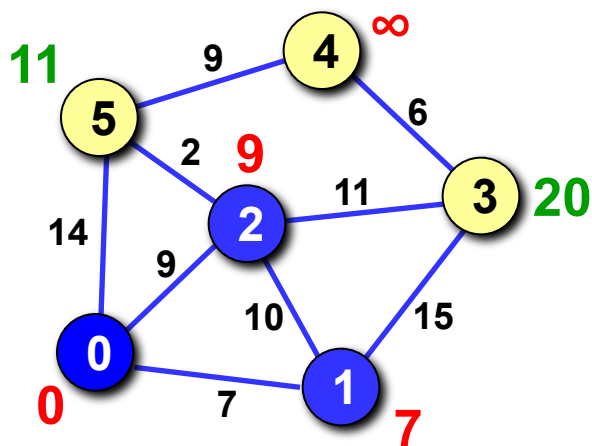
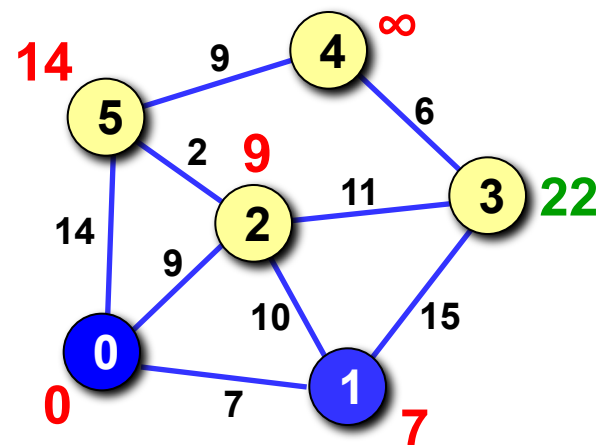
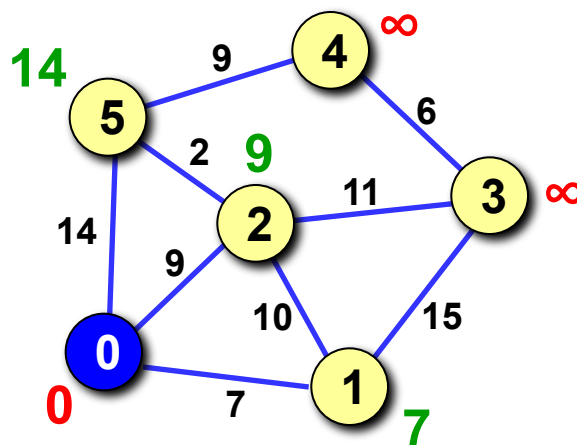
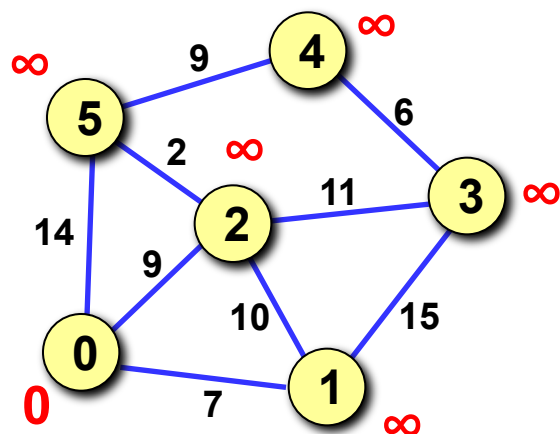
Та же задача: дан связный граф с N вершинами, веса ребер заданы матрицей W . Найти кратчайшие расстояния от заданной вершины до всех остальных.

Алгоритм Дейкстры (E.W. Dijkstra, 1959)



- 1) присвоить всем вершинам метку ∞ ;
- 2) среди нерассмотренных вершин найти вершину j с наименьшей меткой;
- 3) для каждой необработанной вершины i :
если путь к вершине i через вершину j меньше существующей метки, заменить метку на новое расстояние;
- 4) если остались необработанные вершины, перейти к шагу 2;
- 5) метка = минимальное расстояние.

Алгоритм Дейкстры



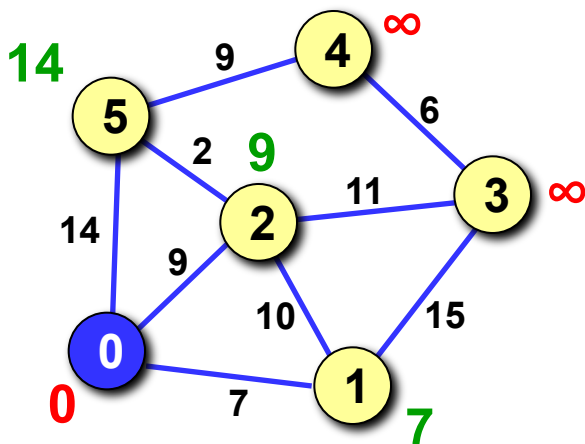
Реализация алгоритма Дейкстры

Массивы:

- 1) массив a , такой что $a[i]=1$, если вершина уже рассмотрена, и $a[i]=0$, если нет.
- 2) массив b , такой что $b[i]$ – длина текущего кратчайшего пути из заданной вершины x в вершину i ;
- 3) массив c , такой что $c[i]$ – номер вершины, из которой нужно идти в вершину i в текущем кратчайшем пути.

Инициализация:

- 4) заполнить массив a нулями (вершины не обработаны);
- 5) записать в $b[i]$ значение $W[x][i]$;
- 6) заполнить массив c значением x ;
- 7) записать $a[x]=1$.



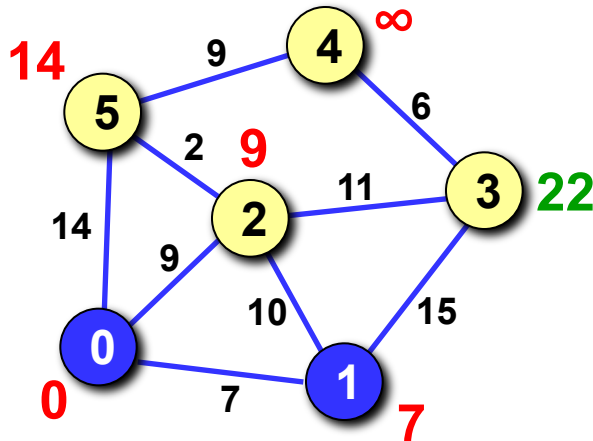
	0	1	2	3	4	5
a	1	0	0	0	0	0
b	0	7	9	∞	∞	14
c	0	0	0	0	0	0

Реализация алгоритма Дейкстры

Основной цикл:

- 1) если все вершины рассмотрены, то стоп.
- 2) среди всех нерассмотренных вершин ($a[i]=0$) найти вершину j , для которой $b[i]$ – минимальное;
- 3) записать $a[j]=1$;
- 4) для всех вершин k : если путь в вершину k через вершину j короче, чем найденный ранее кратчайший путь, запомнить его: записать $b[k]=b[j]+W[j][k]$ и $c[k]=j$.

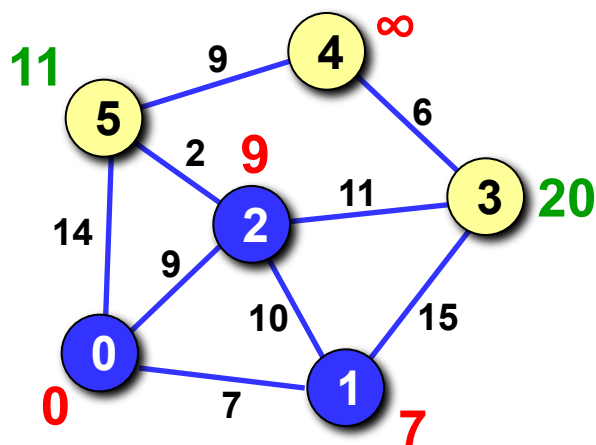
Шаг 1:



	0	1	2	3	4	5
a	1	1	0	0	0	0
b	0	7	9	22	∞	14
c	0	0	0	1	0	0

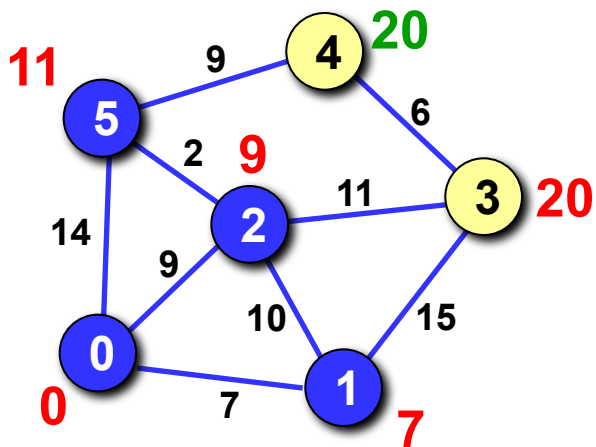
Реализация алгоритма Дейкстры

Шаг 2:



	0	1	2	3	4	5
a	1	1	1	0	0	0
b	0	7	9	20	∞	11
c	0	0	0	2	0	2

Шаг 3:



	0	1	2	3	4	5
a	1	1	1	0	0	1
b	0	7	9	20	20	11
c	0	0	0	2	5	2



Дальше массивы не
изменяются!

Как вывести маршрут?

Результат работа алгоритма Дейкстры:

	0	1	2	3	4	5
а	1	1	1	1	1	1
б	0	7	9	20	20	11
с	0	0	0	2	5	2

длины путей

Маршрут из вершины 0 в вершину 4:



Вывод маршрута в вершину i (использование массива c):

- 1) установить $z=i$;
- 2) пока $c[i] \neq x$ присвоить $z=c[z]$ и вывести z .

Сложность алгоритма Дейкстры:

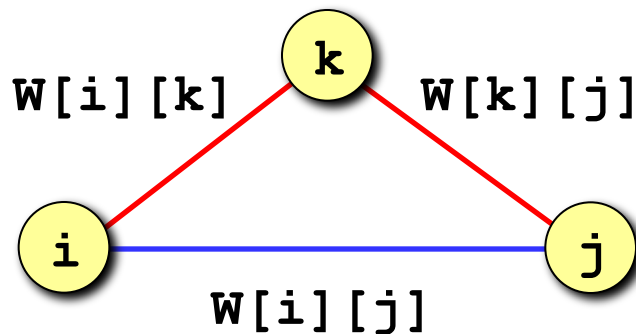
два вложенных цикла по N шагов

$O(N^2)$

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Задача: задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти **все кратчайшие расстояния**, от каждого города до всех остальных городов.

```
for ( k = 0; k < N; k ++ )  
  for ( i = 0; i < N; i ++ )  
    for ( j = 0; j < N; j ++ )  
      if ( W[i][j] > W[i][k] + W[k][j] )  
        W[i][j] = W[i][k] + W[k][j];
```



Если из вершины i в вершину j короче ехать через вершину k , мы едем через вершину k !



Нет информации о маршруте, только кратчайшие расстояния!

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Версия с запоминанием маршрута:

```
for ( i = 0; i < N; i ++ )  
    for ( j = 0; j < N; j ++ )  
        c[i][j] = i;  
  
...  
for ( k = 0; k < N; k ++ )  
    for ( i = 0; i < N; i ++ )  
        for ( j = 0; j < N; j ++ )  
            if ( W[i][j] > W[i][k] + W[k][j] )  
            {  
                W[i][j] = W[i][k] + W[k][j];  
                c[i][j] = c[k][j];  
            }
```

i -ая строка строится так же, как массив **c** в алгоритме Дейкстры

в конце цикла **c[i][j]** – предпоследняя вершина в кратчайшем маршруте из вершины **i** в вершину **j**



Какова сложность алгоритма?

$O(N^3)$

Задача коммивояжера

Задача коммивояжера. Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города и, посетив по разу в неизвестном порядке города $2, 3, \dots, N$, вернуться обратно в первый город. В каком порядке надо обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?



Это NP-полная задача, которая строго решается только перебором вариантов (пока)!

Точные методы:

- 1) простой перебор;
- 2) метод ветвей и границ;
- 3) метод Литтла;
- 4) ...



большое время счета для больших N

$O(N!)$

Приближенные методы:

- 5) метод случайных перестановок (*Matlab*);
- 6) генетические алгоритмы;
- 7) метод муравьиных колоний;
- 8) ...



не гарантируется оптимальное решение

Другие классические задачи

Задача на минимум суммы. Имеется N населенных пунктов, в каждом из которых живет p_i школьников ($i=1, \dots, N$). Надо разместить школу в одном из них так, чтобы общее расстояние, проходимое всеми учениками по дороге в школу, было минимальным.

Задача о наибольшем потоке. Есть система труб, которые имеют соединения в N узлах. Один узел S является источником, еще один – стоком T . Известны пропускные способности каждой трубы. Надо найти наибольший поток от источника к стоку.

Задача о наибольшем паросочетании. Есть M мужчин и N женщин. Каждый мужчина указывает несколько (от 0 до N) женщин, на которых он согласен жениться. Каждая женщина указывает несколько мужчин (от 0 до M), за которых она согласна выйти замуж. Требуется заключить наибольшее количество моногамных браков.

Конец фильма
