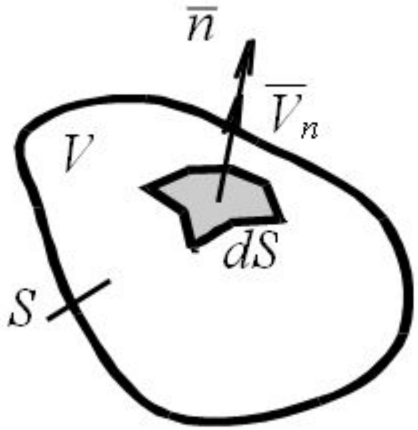
Уравнения движения газа как сплошной среды

Лекции 4, 5

- Уравнения движения выводятся исходя из закона сохранения массы, закона изменения количества движения, закона сохранения энергии, уравнения термодинамического состояния и уравнения напряженного состояния.
- Применяем эти законы к массе жидкости ***m***, находящейся в момент времени ***t*** в некотором произвольно выделенном объеме ***V***.
- Считаем, что внутри объема нет ни источников, ни стоков

4.1.Уравнение неразрывности



- Согласно закону сохранения массы для изолированной системы масса жидкости $m = \iiint\limits_V \rho dV$ при ее движении будет оставаться неизменной $\frac{dm}{dt} = 0$
- Изменение массы за счет изменения плотности $\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$
- Изменение массы за счет изменения объема $\iint\limits_S \rho V_n dS$
- Получаем закон сохранения массы в интегральной форме

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint\limits_S \rho V_n dS = 0}$$

- Т.к. $\iint\limits_S \rho V_n \, dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}(\rho \vec{V}) \, dV$, то

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \vec{V} \right) dV = 0$$ и $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \vec{V} = 0}$$ или $$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \,\mathrm{div} \vec{V} = 0}$$

закон сохранения массы в дифференциальной форме (*уравнение неразрывности)* для неустановившегося движения сжимаемой жидкости

Формы уравнения неразрывности

- Для установившегося движения сжимаемой жидкости $\boxed{\operatorname{div} \rho \vec{V} = 0}$
- Для несжимаемой жидкости $\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = 0}$
- Если движение несжимаемой жидкости потенциальное, то $V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Оператор Лапласа

- Для потенциального движения несжимаемой жидкости $\boxed{\Delta \varphi = 0}$ - уравнение Лапласа.
- В форме массового расхода для сжимаемой жидкости $\boxed{\rho V F = \text{const}}$
- В форме объемного расхода для несжимаемой жидкости $\boxed{V F = \text{const}}$

4.2.Уравнение, выражающее закон изменения количества движения

- Изменение вектора количества движения постоянной массы *m* равно сумме внешних сил, действующих на рассматриваемую массу $-\frac{d\vec{K}}{dt} + \sum \vec{F}_i = 0$
- Внешние силы:
  Объемные (пропорциональны массе) $\int_V \vec{F}\rho \, dV$
  Поверхностные (пропорциональны площади поверхности, охватывающей выделенный объем) $-\int_S \vec{n}p \, dS$
- Вектор изменения количества движения (сила инерции) $\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_V \vec{w}\rho \, dV$
- Уравнение движения идеальной жидкости в интегральной форме

$$\boxed{\int_V \vec{F}\rho \, dV - \int_S \vec{n}p \, dS - \int_V \vec{w}\rho \, dV = 0}$$

- Т.к. $\int\limits_S \vec{n} p \, dS = \int\limits_V \operatorname{grad} p \, dV$, то $\int\limits_V \left[\left(\vec{F} - \vec{w} \right) \rho - \operatorname{grad} p \right] dV = 0$
- Уравнение движения идеального газа в векторной форме – уравнение движения Эйлера

$$\boxed{\vec{w} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p}$$

- Уравнения Эйлера в проекциях на оси координат в свернутом виде

$$\boxed{\frac{dV_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dV_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dV_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}$$

- Уравнения Эйлера в проекциях на оси координат в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}$$

Ускорения

- Для решения системы уравнений задают начальные и граничные условия:
- *начальные условия* необходимы при решении задач неустановившегося движения газа (поле скоростей при $t = 0$)

$$\left.\begin{aligned} V_x(x,y,z,0) &= f_1(x,y,z), \\ V_y(x,y,z,0) &= f_2(x,y,z), \\ V_z(x,y,z,0) &= f_3(x,y,z). \end{aligned}\right\}$$

- *граничные условия* (на границах течения: поверхность тела, невозмущенный поток, граница раздела течений и др.) разделяют на динамические (силы) и кинематические (скорости).
- При движении вязкой жидкости учитывают силы внутреннего трения

$$\int_S \vec{\tau}_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{\tau} \, dV$$

- Уравнение движения реальной жидкости в векторной форме

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\left(\vec{\tau}_x + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z\right)}$$

5.1. Уравнение, выражающее закон сохранения энергии

- Кинетическая энергия единицы массы жидкости - $\frac{V^2}{2}$,
- ее внутренняя энергия - *U*
- полная энергия рассматриваемой массы жидкости $E = \int_V \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) dV$
- *Изменение энергии некоторой массы жидкости за некоторый промежуток времени* ***Δt*** *равно работе всех сил, приложенных к данной массе жидкости (за время* ***Δt****), ± количество тепла, полученное за* ***Δt*** *вследствие теплопроводности, лучеиспускания или химических реакций*
- Изменение энергии в единицу времени $$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) V_n \, dS$$

- Заменяем интеграл по площади интегралом по объему

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] \right\} dV$$

- Работа внешних сил в единицу времени:

  массовых сил $\int_V \rho \left(\vec{F} \cdot \vec{V} \right) dV$, сил давления $-\int_S p \left(\vec{n} \cdot \vec{V} \right) dS$,

  работа сил трения $\int_S \left(\vec{\tau}_n \cdot \vec{V} \right) dS$.

- Тепло, подводимое или отводимое от выделенного объема в единицу времени $\int_S \vec{q}_n \, dS + \int_V \rho\varepsilon \, dV$, где $\vec{q}_n$ – вектор потока тепла, проходящего через единицу площади поверхности, ε – количество тепла, выделяемое (поглощаемое) единицей массы. Тогда

$$\frac{dE}{dt} = -\int_S p \left(\vec{n} \cdot \vec{V} \right) dS + \int_S \left(\vec{\tau}_n \cdot \vec{V} \right) dS + \int_V \rho \left(\vec{F} \cdot \vec{V} \right) dV + \int_S \vec{q}_n \, dS + \int_V \rho\varepsilon \, dV$$

- После подстановки и преобразований получим закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)+\operatorname{div}\left[\rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]=-\operatorname{div}\left(p\vec{V}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\tau}_x\cdot\vec{V}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\tau}_y\cdot\vec{V}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\tau}_z\cdot\vec{V}\right)+\rho\vec{F}\cdot\vec{V}+\operatorname{div}\vec{q}+\rho\varepsilon.$$

- или в виде 1-го закона термодинамики

$$\rho\left(\frac{dU}{dt}+p\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}\right)=\left(\underbrace{\vec{\tau}_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+\vec{\tau}_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+\vec{\tau}_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}}_{\text{Диссипативная функция (тепло за счет трения)}}\right)+\operatorname{div}\vec{q}+\rho\varepsilon=\rho\frac{d'Q}{dt}$$

- Если $\frac{d'Q}{dt}=0$, то процесс адиабатический. Как следует из уравнения энергии, это возможно, если жидкость идеальная (нет сил трения), отсутствует тепло-передача между частицами жидкости и объемное выделение тепла

- Представим уравнение энергии в другом виде, введя в рассмотрение функцию $H = U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ – тепло-содержание единицы массы движущейся жидкости ($h = U + \frac{p}{\rho}$ – теплосодержание единицы массы покоящейся жидкости):

$$\rho \frac{d}{dt}\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{F} \cdot \vec{V} +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\tau}_x \cdot \vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\tau}_y \cdot \vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\tau}_z \cdot \vec{V}\right)\right] + \operatorname{div} \vec{q} + \rho\varepsilon.$$

при адиабатическом процессе (*H* = const) должны выполняться следующие условия: $\left(\vec{F} \cdot \vec{V}\right) = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$

т. е. давление не должно зависеть от времени, а вектор массовых сил должен быть перпендикулярен вектору скорости или равен нулю.

- в этом случае правая часть уравнения энергии обращается в нуль

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(U+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)=0,$$

и в интегральном виде уравнение энергии будет выглядеть следующим образом

$$U+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\mathrm{const}$$

Интегралы дифференциальных уравнений Эйлера

- В общем виде дифференциальные уравнения движения Эйлера не интегрируются. Их интегралы можно найти только для некоторых частных случаев. Рассмотрим порядок нахождения интегралов:
- 1) для потенциального неустановившегося движения;
- 2) для установившегося непотенциального движения сжимаемого газа

5.2.Потенциальное неустановившееся движение. Интеграл Лагранжа

- Считаем жидкость идеальной. Уравнение Эйлера в развернутом виде в проекции на ось *OX*:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

- При потенциальном движении $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$, т.е.

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial V_y}{\partial x}\qquad \frac{\partial V_y}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial y}\qquad \frac{\partial V_x}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial x}$$

- и

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_x^{\,2}}{2}+\frac{V_y^{\,2}}{2}+\frac{V_z^{\,2}}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

- Следовательно $X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial V_x}{\partial t}$
- При потенциальном течении $V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$
- Преобразуем локальную производную $\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$
- Введем понятие баротропность. Будем считать, что баротропность имеет место во всем пространстве, занятом жидкостью.
  Баротропным называется движение, при котором плотность есть функция только давления *p*.

$$\boxed{P = \int \frac{dp}{\rho}}$$

- Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$
- Система уравнений Эйлера может быть записана в виде:

- Умножив каждое из уравнений на соответствующее прираще-ние (dx, dy, dz) и после их сложения получим следующее

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \end{aligned}\right. \left|\begin{aligned} &\cdot dx, \\ &\cdot dy, \\ &\cdot dz, \end{aligned}\right.$$

$$Xdx+Ydy+Zdz=\frac{\partial}{\partial x}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dx+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dz.$$

- Правую часть этого уравнения можно считать полным дифференциалом некоторой функции

$$\boxed{d\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}$$

- Т.е. $Xdx+Ydy+Zdz=d\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ или $d\Phi=d\left(P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$
- И после интегрирования получим *интеграл Лагранжа* для потенциального неустановившегося движения сжимаемой среды
$$P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\Phi+C(t)$$
$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\Phi+C(t),$$
- Для несжимаемой среды
$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\Phi+C(t)$$
- При установившемся движении сжимаемой жидкости (интеграл Эйлера-Бернулли). Здесь *C=const* для всей массы движущегося газа
$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\Phi+C$$

5.3.Произвольное установившееся движение сжимаемой жидкости (интеграл Бернулли)

- При установившемся движении траектории и линии тока совпадают; параметры течения являются функциями только координат. Считая движение баротропным, запишем уравнения Эйлера в виде

$$\frac{dV_x}{dt} = X - \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{dV_y}{dt} = Y - \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{dV_z}{dt} = Z - \frac{\partial P}{\partial z}$$

- После умножения каждого уравнения на соответствую-щее приращение и их суммирования получаем

$$\frac{dx}{dt}dV_x + \frac{dy}{dt}dV_y + \frac{dz}{dt}dV_z = \left(Xdx + Ydy + Zdz\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)$$

- На линии тока $\frac{dx}{dt} = V_x$ и т.д., поэтому левая часть

$$V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Полный дифференциал

- Следовательно, в правой части - сумма полных дифференциалов

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \qquad \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = dP$$

- Тогда $d\Phi\left(\frac{V^2}{2} - \quad \theta P\right) =$ и $\boxed{-\Phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C}$
- Этот интеграл носит название *интеграла Бернулли;* здесь произвольная постоянная есть *постоянная только вдоль линии тока.*
- *Для несжимаемого газа* $\boxed{p + \frac{\rho V^2}{2} = C}$

- Для изоэнтропического течения сжимаемого газа

$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const} = \upsilon$ дифференциал $dp = k \cdot \upsilon \cdot \rho^{k-1} d\rho$

- Уравнение Бернулли для сжимаемого газа

$$\boxed{\frac{V^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\mathrm{const}=i_0}$$

- i_0 – полная энтальпия, включающая энтальпию и кинетическую энергию единицы массы движущегося газа.

$$i_0=\frac{a_0^2}{k-1}=\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

Уравнение Бернулли есть уравнение энергии для изоэнтропического течения сжимаемого (или несжимаемого) газа