Экстремумы функции

Точки из области определения функции, в которых:

$f'(x) = 0$ или не существует,

называются **критическими точками** этой функции.

Только они могут быть точками экстремума функции.

(рис. 1 и 2).

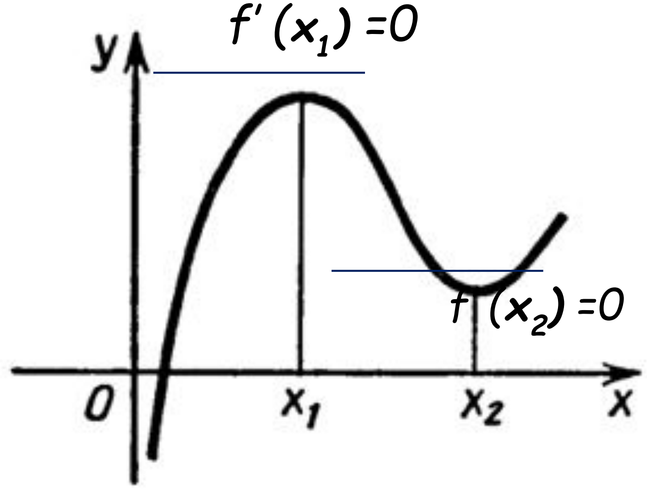


Рис. 1

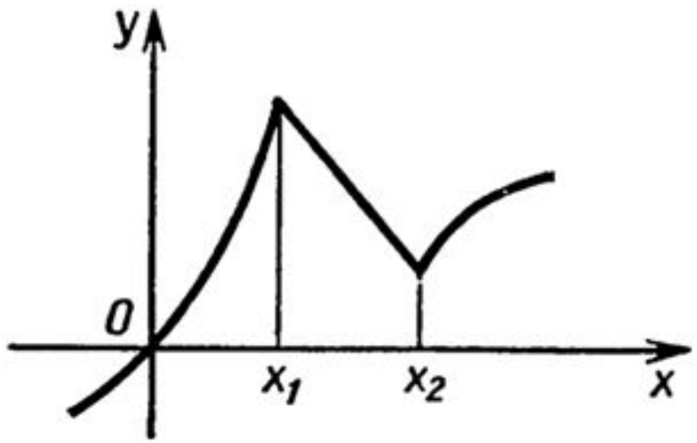
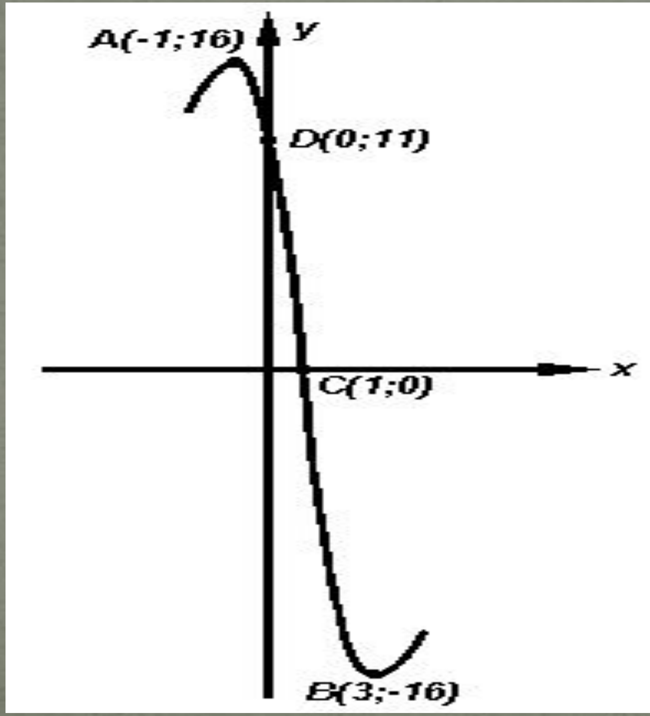


Рис. 2

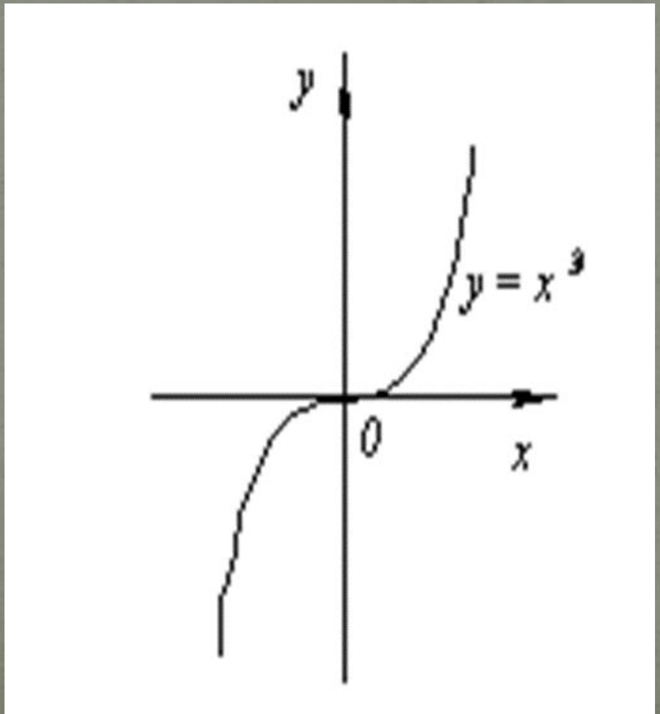
Точки из области определения функции, в которых:

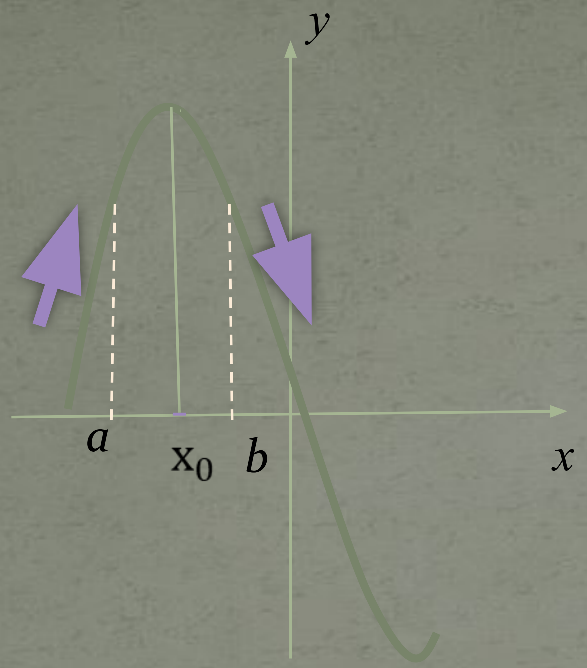
$f'(x) = 0$ называются стационарными точками этой функции

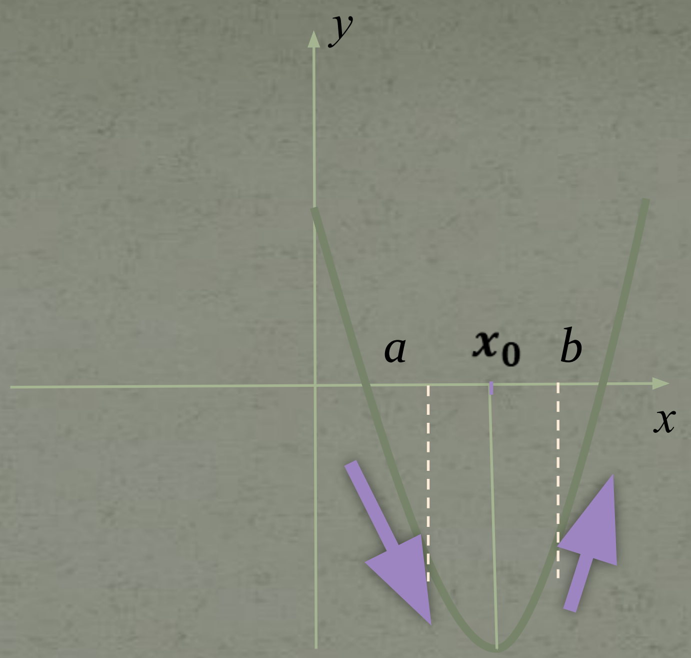
Экстремумы



Не являются экстремумами





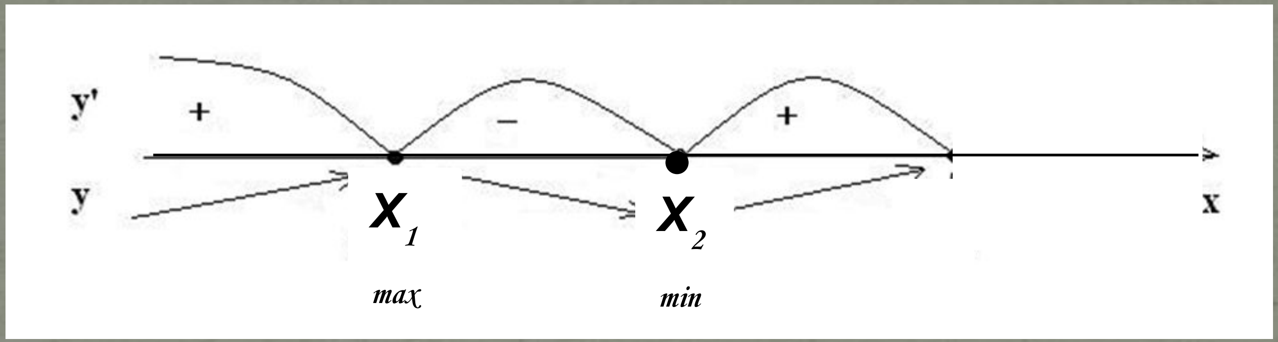


Если функция f(x) в точке x_0 непрерывна, и на интервале (a;x_0) $f'(x) > 0$, а на интервале (x_0 ; b) $f'(x) < 0$, то точка x_0 является точкой максимума.

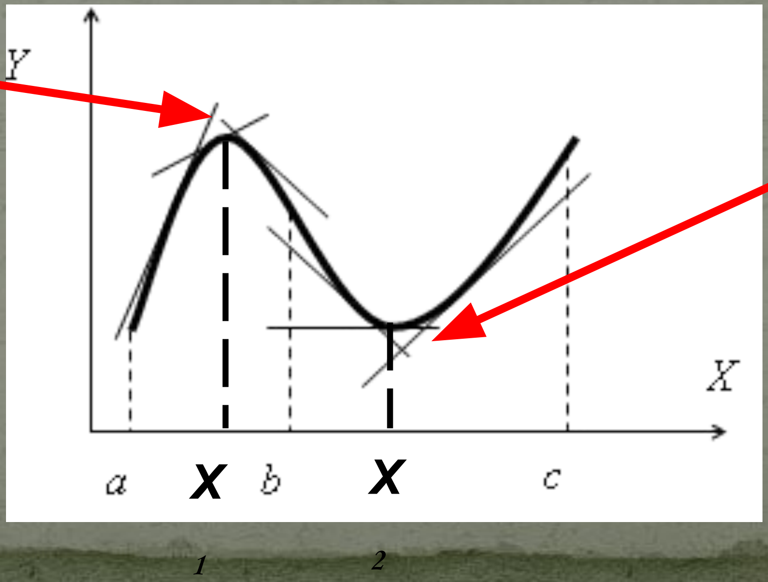
Если функция f(x) в точке x_0 непрерывна , и на интервале (a; x_0) $f'(x) < 0$, а на интервале (x_0 ; b) $f'(x) > 0$, то точка x_0 является точкой минимума.

точка **min**
точка **max** → **называются точками экстремума**

Пусть x_o точка из области определения функции $f(x)$ и $f'(x_o) = 0$, если производная функции меняет свой знак с «+» на «-» в точке x_o или наоборот, то эта точка является **Экстремумом**.



X_0 - точка максимума (max) функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.



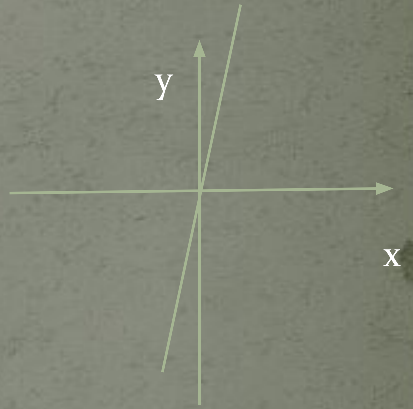
X_0 - точка минимума (min) функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

Алгоритм поиска точек экстремума функции:

1) *найти производную функции;*
2) *решить уравнение f' (x) = 0, найти критические точки*
3) *с помощью метода интервалов определить знаки производной в окрестностях критических точек;*
4) *используя достаточное условие существования экстремума, найти точки максимума и минимума*

Пример №1. Дана функция y = 3x + 2

Решение.
y´ = (3x + 2)´ = 3 –критических точек нет
y = kx+b -прямая



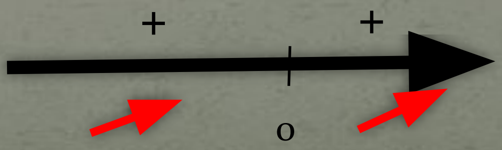
Пример № 2. Дана функция f(x) = x^3- 1.

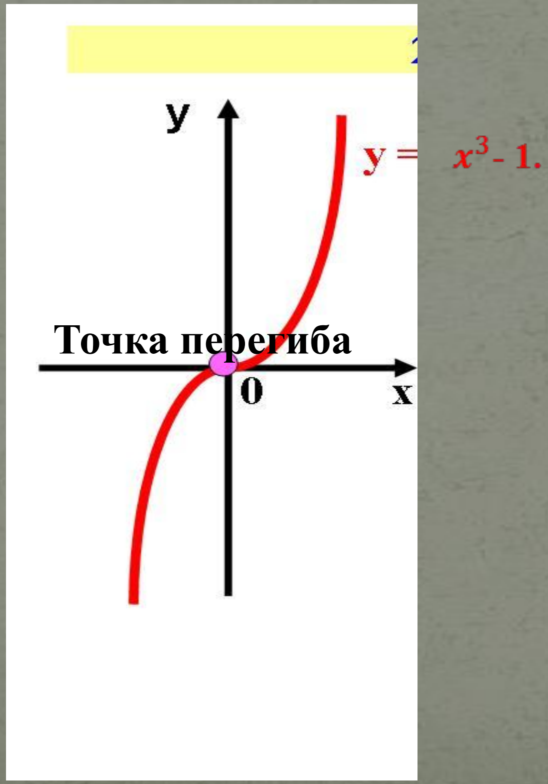
Решение: f ´(x) = 3x^2.

f ´(x) = 0,

3x^2 = 0 или x = 0.

f ´(0) =3· 0 = 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



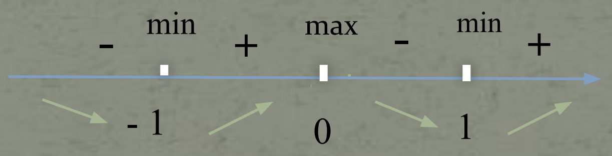


Пример №3. Дана функция $f(x) = x^4 - 2x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$, $4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $4x(x-1)(x+1) = 0$

$4x = 0$, $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$

$x = 0$ $x = 1$ $x = -1$ -1; 0; 1 – критичес. точки

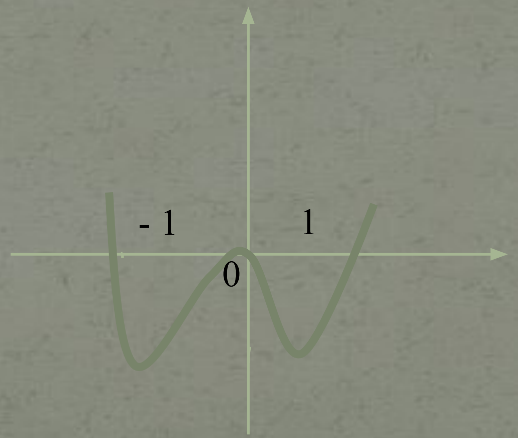


$f'(-2) = 4 \cdot (-2)(-2-1)(-2+1) = -24 < 0$

$f'(-\frac{1}{2}) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}+1) > 0$

$f'(\frac{1}{2}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}+1) < 0$

$f'(2) = 4 \cdot (2)(2-1)(2+1) > 0$



Ответ: $x_{max} = 0$, $x_{min} = -1; 1$.

Пример №4. **Определим точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$**

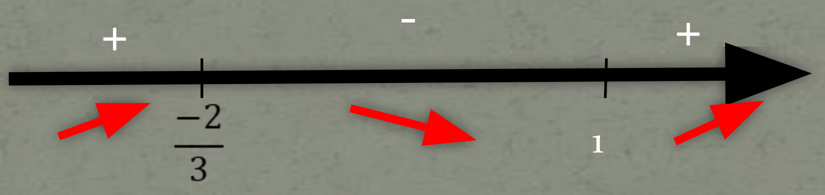
Решение .

1) $y' = (2x^3 - x^2 - 4x + 5)' = 6x^2 - 2x - 4 = 2(3x^2 - x - 2)$;

2) $f'(x) = 0$

$2(3x^2 - x - 2) = 0$, $3x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$; 1; $-\frac{2}{3}$ -крит. точки

3) на числовой прямой отметим $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, и определим знак производной на каждом интервале.



$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 0 - 2 = -4 < 0$, $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) - 2 = 2 > 0$ $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 8 > 0$

4) в окрестности точки $x = -\frac{2}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, а в окрестности точки $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Пользуясь условием экстремума , получаем , что точка $x = -\frac{2}{3}$ - это точка максимума, а $x = 1$ – точка минимума.

Ответ: $x_{max} = -\frac{2}{3}$, $x_{min} = 1$