

# Линейная алгебра

## Лекция 6

Подпространства. Базис и  
размерность

## **План лекции**

- **Определение линейного подпространства  $n$ -мерного координатного пространства**
- **Линейная оболочка набора векторов**
- **Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений**
- **Базис и размерность**
- **Ортонормированные базисы**

# Векторные подпространства.

## Определение

Подпространством линейного пространства  $\mathbf{R}^n$  над полем  $\mathbf{R}$  называют такое подмножество , которое обладает

свойствами:

- а)  $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ ;
- б)  $x \in U \Rightarrow \lambda x \in U \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

Другими словами, подмножество  $U$  замкнуто относительно действий «сложения» и «умножения» на скаляр, определённых в  $\mathbf{R}^n$ .

Тривиальными подпространствами линейного пространства  $\mathbf{R}^n$  называются само  $\mathbf{R}^n$  и пространство, состоящее из одного нулевого вектора  $\mathbf{O}$ .

# Пример

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R : \alpha_1 = \alpha_n \right\}$$

# Векторные подпространства.

## Способ задания

Подпространством, порождённым векторами

$$e_1, e_2, \dots, e_k \in R^n,$$

называют подмножество  $U \subset R^n$  всех линейных комбинаций этих векторов (линейная оболочка набора векторов), т.е.

$$U = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle = \{x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k, \alpha_i \in R\}$$

# Пример

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

# Векторные подпространства.

## Способ задания

Другой способ задания линейного подпространства в  $\mathbf{R}^n$  может служить задание набора ограничений, которым удовлетворяют векторы подпространства. Например, в виде  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$ .

**Теорема.** Множество решений однородной системы уравнений  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$  образует линейное подпространство пространства  $\mathbf{R}^n$ .

# Пример

$$V = \left\{ X \in R^4 \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

# Базис векторного пространства. Определение

Пусть  $(e_1, e_2, \dots, e_s)$  - произвольное множество векторов линейного пространства  $R^n$ . Упорядоченная система векторов называется базисом в  $Q$ , если :

а)  $e_k \in Q, k = 1, 2, \dots, s$ ;

б) система  $(e_1, e_2, \dots, e_s)$  линейно независима;

в) для любого  $x \in Q$  найдутся такие числа  $x_1, x_2, \dots, x_s$ ,  
что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_s e_s$$

# Размерность векторного пространства

Все базисы  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n \in V\}$  пространства  $V$  имеют одинаковое число векторов, которое называется размерностью векторного пространства  $V$  и обозначается

$$n = \dim(V)$$

Полагают, что размерность тривиального пространства (состоящего из одного только нулевого вектора), равна нулю:  $\dim(O) = 0$ .

Размерность подпространства, заданного СЛУ, равна  $\mathbf{n} - \mathbf{rg}(A)$ .

# Пример базиса координатного пространства

$$M = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Теоремы о базисах

1. В любом ненулевом подпространстве координатного пространства существует базис.
2. Если размерность подпространства координатного пространства равна  $k$ , то любая линейно независимая система из  $k$  векторов образует базис этого подпространства.

# Нахождение базиса подпространства

Для нахождения базиса в подпространстве, порожденном некоторой совокупностью векторов, достаточно выбрать из системы образующих векторов линейно независимую систему.

Например,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \Rightarrow \dim(U) = 2$$

# Алгоритм построения базиса в

Столбцы, порождающие подпространство, записать в матрицу. Элементарными преобразованиями **над столбцами** привести эту матрицу к «ступенчатому» виду.

Ненулевые столбцы данной «ступенчатой» матрицы и будут составлять базис исходного подпространства, а ранг матрицы будет равен размерности этого подпространства.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \dots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \dots & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \beta_n & \dots & \dots & \gamma_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_r & d_r & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & d_n & \dots & f_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Нахождение базиса подпространства. Пример

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$M_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Нахождение базиса подпространства. Пример

$$V = \left\{ X \in R^4 \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\alpha + 5\beta \\ -5\alpha - 4\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_V = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

# Координаты вектора в базисе

Пусть даны  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n \in V\}$  – базис векторного пространства  $V$  и вектор  $X$  из  $V$ .

Координатами вектора  $X$  в этом базисе называют коэффициенты в разложении:

$$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \in V$$

# Нахождение координат вектора в базисе.

Найти координаты вектора  $X$  в заданном базисе

$$R^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

---

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 \\ 3\lambda_2 - \lambda_4 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Ортогональный базис

Определение.

Базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$   $n$ -мерного пространства называется ортогональным, если

$$(e_i, e_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

Другими словами,

ортогональным базисом называется базис, состоящий из попарно ортогональных векторов.

# Ортонормированный базис

Определение.

Базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$   $n$ -мерного пространства называется ортонормированным, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

Другими словами,

ортонормированным базисом называется базис, состоящий из попарно ортогональных векторов, каждый из которых имеет длину, равную единице.

# Построение ортогонального базиса

Задача.

Проверить ортогональность системы векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

и дополнить ее до ортогонального базиса в  $\mathbf{R}^4$ .

---

1. Вычислим скалярное произведение  $(e_1, e_2)$ :

$$(e_1, e_2) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow e_1 \perp e_2.$$

2. Задача сводится к построению векторов  $e_3$  и  $e_4$  таких, что  $e_3 \perp e_4$  и оба ортогональны  $e_1, e_2$ .

## Построение ортогонального базиса (продолжение)

Для определения  $e_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  достаточно найти какое-либо частное решение системы  $\begin{cases} (e_3, e_1) = 0 \\ (e_3, e_2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Выберем частное решение  $e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

## Построение ортогонального базиса (продолжение)

Для определения  $e_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  достаточно найти какое-либо решение системы

$$\begin{cases} (e_4, e_1) = 0 \\ (e_4, e_2) = 0 \\ (e_4, e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение -  $\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 4c_1 \\ 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ , выберем  $e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .