

ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Лекція 6

СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРЕСЛЕНИКА
І МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Лектор - доц. кафедри МСТ Челомбітько В.Ф.



Мета лекції:

Розвиток просторового мислення та уявлення, образне сприймання навколишнього світу, що

лежить в основі будь-якої творчої діяльності

План лекції:

- ☐ Перпендикулярність прямої і площини.
- ☐ Перпендикулярність двох площин.
- ☐ Основні завдання перетворення.
- ☐ Способи перетворення комплексного кресленика.
- ☐ Визначення відстаней.
- ☐ Визначення кутів.
- ☐ Визначення площі плоскої фігури.

Терміни, поняття й визначення

- **Точка** – елемент будь-якої множини. Фігура, для якої неможливі будь-які вимірювання – нульвимірний об'єкт.
- **Лінія** – пряма або крива – об'єкт (множина точок), для якого можливий тільки один вимір (довжина). Будь-яку лінію вважають одновимірним об'єктом.
- **Поверхня** – об'єкт (множина ліній або точок), для якого можливі два виміри (умовно довжина і ширина). Поверхня не має товщини і її вважають двовимірним об'єктом.
- **Геометричне тіло** (фігура) – матеріальне тіло, обмежене поверхнями і площинами. Тіло можна вважати тривимірним об'єктом.
- **Предмет** – сукупність геометричних тіл, сформована шляхом їхнього об'єднання, віднімання і перетинання (булеві операції).

Метричні задачі

- Всі задачі, що вирішує нарисна геометрія, можна розділити на дві великі групи:
- **Позиційні**, в яких потрібно визначити положення у просторі деякого геометричного елемента – точки, лінії, площини тощо, наприклад, провести пряму через дві задані точки, побудувати лінію перетину двох площин, знайти точку перетину прямої і площини та ін.
- **Метричні**, в яких потрібно визначити будь-яку метричну характеристику, наприклад, знайти натуральну довжину відрізка прямої, знайти відстань від певної точки до певної прямої або площини, визначити величину двогранного кута між двома площинами, знайти площу трикутника загального положення та ін.

Метричні задачі

- До метричних задач відносяться задачі на визначення відстаней, кутів і площі плоских фігур. При цьому задачі зводяться до наступних:
- 1. Всі задачі з визначення **відстаней** – до визначення відстані між двома точками.
- 2. Всі задачі з визначення **кутів** – до визначення кута між двома прямими, що перетинаються.
- 3. Всі задачі з визначення **площі** плоских фігур – до перетворення заданої геометричної фігури загального положення – в окреме положення, при якому всі відстані, кути і площі фігур можуть бути виміряні безпосередньо на кресленику.
- Під час вибору способу перетворення проєкцій потрібно вибирати такий, щоб кількість графічних операцій була **мінімальною**.

Метричні задачі

- Під час розв'язання метричних задач слід застосовувати ті способи перетворення, які дають найбільш раціональні графічні розв'язки. Слід мати на увазі, що розв'язання задач із застосуванням способів перетворення зводиться до **чотирьох** основних задач.
- **Перша** задача. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня.
- **Друга** задача. Перетворення прямої загального положення або прямої рівня в проектуючу пряму.
- **Третя** задача. Перетворення площини загального положення в проектуючу площину.
- **Четверта** задача. Перетворення площини загального положення або проектуючої площини в площину рівня.

Метричні задачі

- Для вирішення метричних завдань можна дати наступні рекомендації.
- Задачі **визначення відстані** між точками, точкою і прямою, між двома паралельними прямими і між двома мимобіжними прямими, вирішуються за допомогою **другої** задачі перетворення.
- Задачі **визначення відстаней** між точкою і площиною, між прямою і площиною, їй паралельною, і між двома паралельними площинами вирішуються за допомогою **третьої** задачі перетворення.
- Для розв'язання задач **визначення кутів**, а також площ плоских фігур доцільно застосовувати **четверту** задачу перетворення.

Проекції прямого кута

- Важливо пам'ятати, що розв'язання багатьох метричних задач вимагає побудови перпендикулярних прямих і площин.
- **Величина кута** між двома прямими, що перетинаються і не паралельні площині проекцій, **може змінюватися** під час проектування. Тільки при деяких особливих положеннях кута проекції кута можуть дорівнювати дійсній його величині.
- **Будь-який кут** (гострий, тупий, прямий) проектується в натуральну величину, якщо його сторони паралельні площині проекцій.
- Але **прямий кут** проектується в натуральну величину ще і тоді, коли тільки одна з його сторін паралельна площині проекцій.

Проекції прямого кута

- У зв'язку з цим особливу увагу слід звернути на одну з властивостей паралельного проектування, згідно з яким **прямий кут** проектується на площину проекції без викривлень, якщо одна з його сторін паралельна цій площині проекцій, а інша – перпендикулярна до неї (рис. 4.1).
- Не важко це довести. Пряма AO перпендикулярна площині Σ , тобто вона перпендикулярна будь-якій прямій цієї площини. Площина проектується на P_1 в пряму і в ту ж пряму проектується будь-яка пряма цієї площини, а проекція кута між A_1O_1 і будь-якою прямою площини Σ дорівнює 90° .
- Висновок: щоб прямий кут проектувався в натуральну величину, достатньо, щоб одна з його сторін була паралельною площині проекцій.

Проекції прямого кута

- Важливість визначення прямого кута в тому, що визначення натуральної величини відрізка також пов'язане з побудовою перпендикуляру. Найкоротша відстань також визначається по перпендикуляру.
- Гострий і тупий кути можливо зпроектувати в натуральну величину і тоді, коли обидві сторони кута не паралельні площині проекцій, але на комплексному кресленику немає ніякого критерія, щоб це довести.
- Приклад: з точки А провести пряму b , яка перетинає горизонталь h під кутом 90° (рис. 4.2). Тут $b_1 \perp h_1$.

Проекції прямого кута

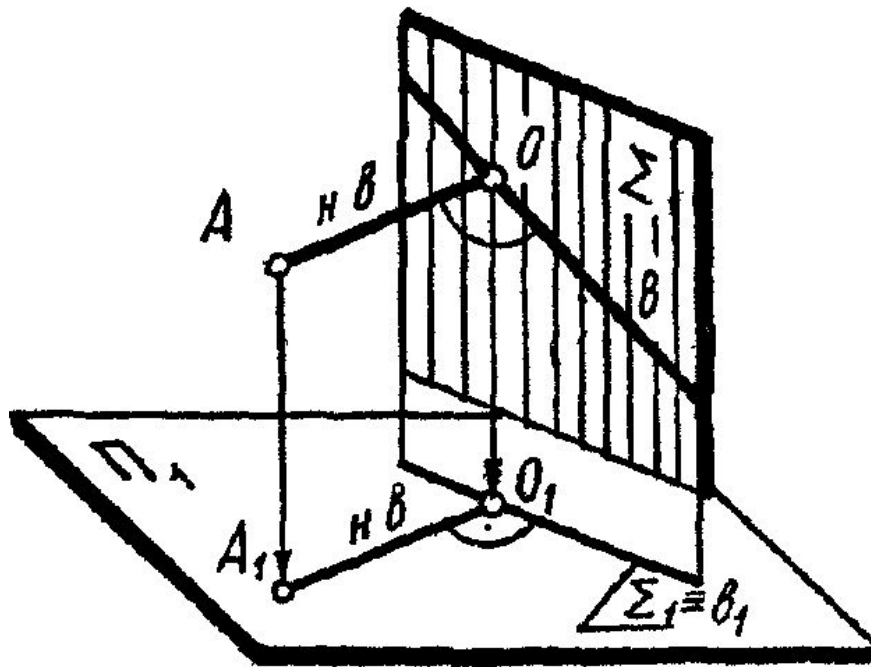


Рисунок 4.1

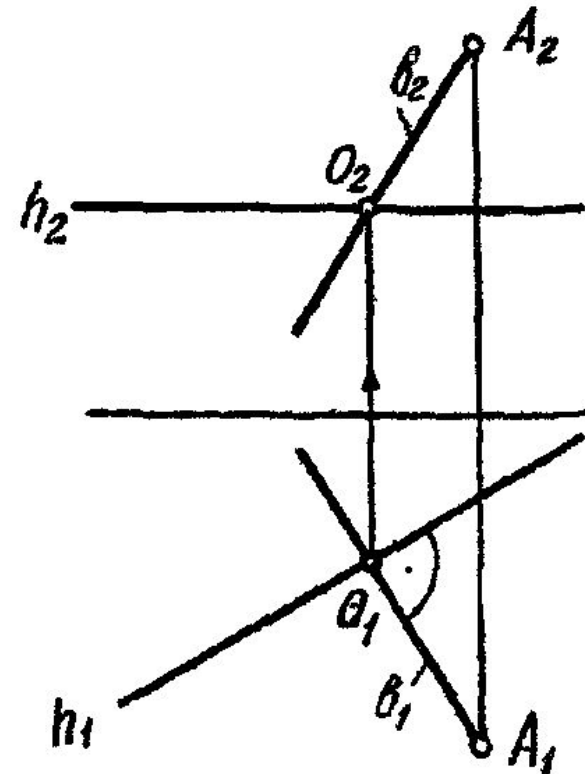


Рисунок 4.2

Перпендикулярність прямої і площини

- Теорема: Якщо пряма перпендикулярна до площини, то її проекції перпендикулярні однойменним слідам площини, а також і відповідним проекціям ліній рівня.

- Доказ: Нехай AB перпендикулярна до площини Σ (рис. 4.3). Потрібно довести, що її горизонтальна проекція $A_1B_1 \perp h_1$.
Проведемо в площині Σ горизонталь h через точку B . Її проекція $h_1 \parallel h$. Перпендикуляр до площини утворює прямі кути з усіма прямими площини, проведеними через його основу, тобто $AB \perp h$. Отже $A_1B_1 \perp h_1$.

Перпендикулярність прямої і площини

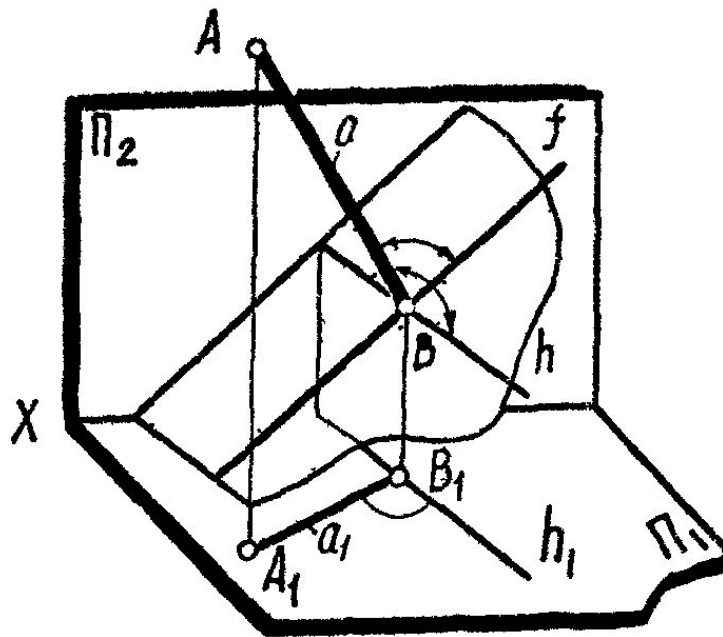


Рисунок 4.3

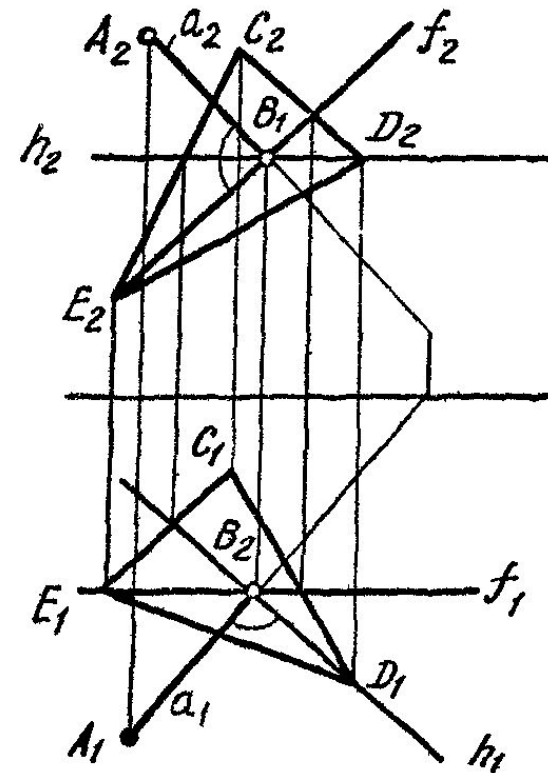


Рисунок 4.4

Перпендикулярність прямої і площини

- Використовуючи цей доказ, можна розв'язувати такі задачі:
- 1. Опустити перпендикуляр на площину з точки, що розташована поза площиною.
- 2. Визначити відстань від точки до площини.
- 3. Відновити перпендикуляр до площини з точки, що розташована у цій площині.
- 4. Провести через певну точку площину, яка перпендикулярна заданій прямій.

Перпендикулярність прямої і площини

- Для розв'язання **задачі 2** спочатку **будується перпендикуляр** з точки на площину, потім потрібно визначити відстань від точки до площини (довжину цього перпендикуляра).
- Відрізок загального положення проектується на основні площини проекцій зі спотворенням.
- Якщо його розмістити паралельно одній з площин проекцій, то він зпроектується в натуральну величину.
- Визначити **натуральну величину** відрізка можна кількома способами – можна повернути відрізок навколо деякої осі (спосіб обертання); можна зпроектувати його на додаткову площину проекцій (спосіб заміни площин проекцій).

Перпендикулярність прямої і площини

- В ході побудови прямої, перпендикулярної до площини, необхідно пам'ятати, що така пряма перпендикулярна двом прямим цієї площини, що перетинаються.
- Але для того, щоб скористатися цією властивістю під час розв'язання задачі на комплексному кресленнику, необхідно в якості прямих, що належать площині, брати **лінії рівня**. Тільки в цьому випадку прямий кут проектується без викривлень (рис. 4.3 та рис. 4.4).

Перпендикулярність прямої і площини

- Тут $\Sigma \perp a$ ($f \cap h$), оскільки $a_1 \perp h_1$ і $a_2 \perp f_2$.
- Під час побудови взаємно перпендикулярних площин слід пам'ятати, що якщо площини взаємно перпендикулярні, то одна з них проходить через перпендикуляр до іншої площини.

Обертання навколо проектуючої прямої

- Найчастіше обертання виробляють навколо осей, перпендикулярних площинам проєкцій, тобто навколо проєктуючих прямих.
- На рис. 4.11 показано обертання точки А навколо горизонтально-проєктуючої прямої i по колу, при цьому горизонтальна проєкція точки A_1 обертається по колу, а фронтальна A_2 – переміщається по прямій, паралельній осі X_{12} .
- Радіус обертання дорівнює відстані від точки А до осі i . Ця відстань без викривлення проєктується на горизонтальну проєкцію, а на фронтальну – в двох крайніх положеннях проєкції A_2 .
- Аналогічно, на рис. 4.12 показано обертання точки А навколо фронтально-проєктуючої прямої i , при цьому проєкції міняються місцями.

Обертання навколо проектуючої прямої

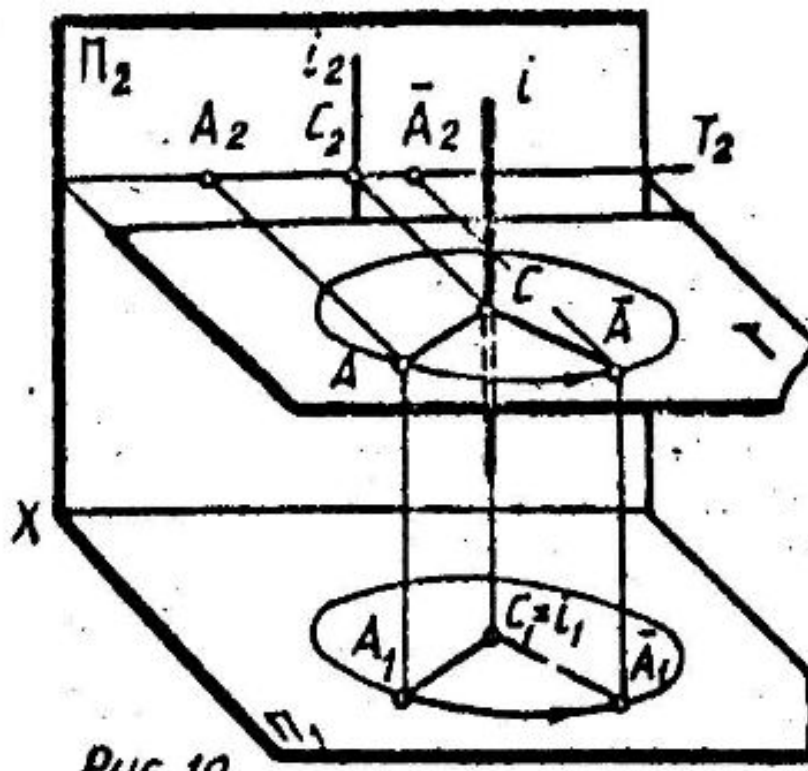


Рисунок 4.11

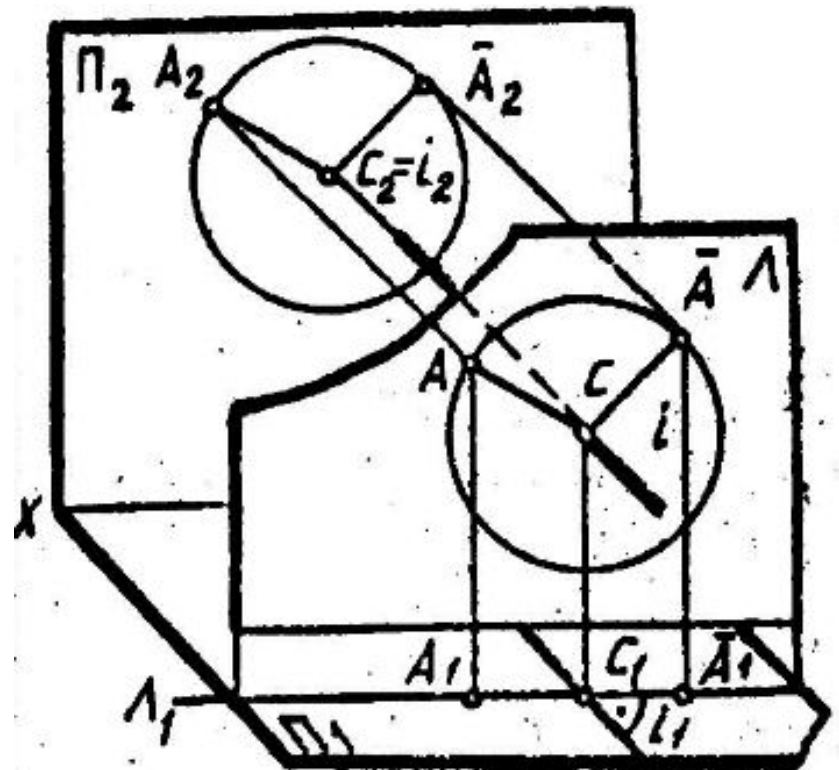


Рисунок 4.12

Обертання навколо лінії рівня

- Слід вказати, що розв'язання метричних задач зводиться до перетворення комплексного кресленика, таким чином, що прямі і плоскі фігури, які цікавлять нас, із загального положення відносно площин проєкцій займатимуть окремі.
- При цьому найширше застосовують способи заміни площин проєкцій і обертання навколо проєктуючої прямої, які були розглянуті раніше, а також обертанням навколо лінії рівня.
- Для застосування цього способу важливо знати його суть (рис. 4.5 і 4.6). В цьому випадку радіус обертання проєктується в натуральну величину в двох положеннях O_1A_1 , коли відрізок належить площині T .

Обертання навколо лінії рівня

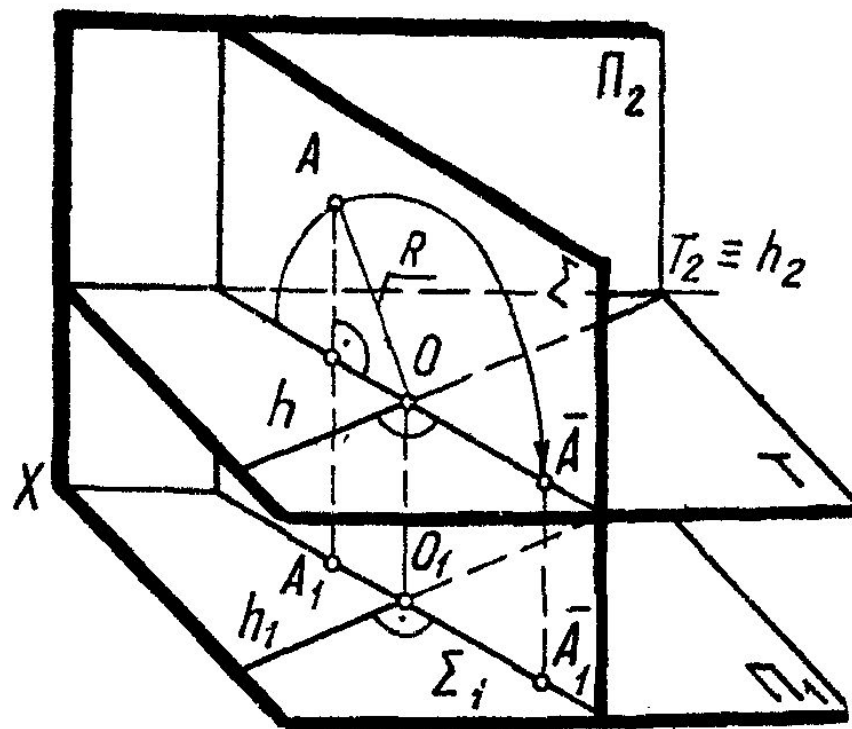


Рисунок 4.5

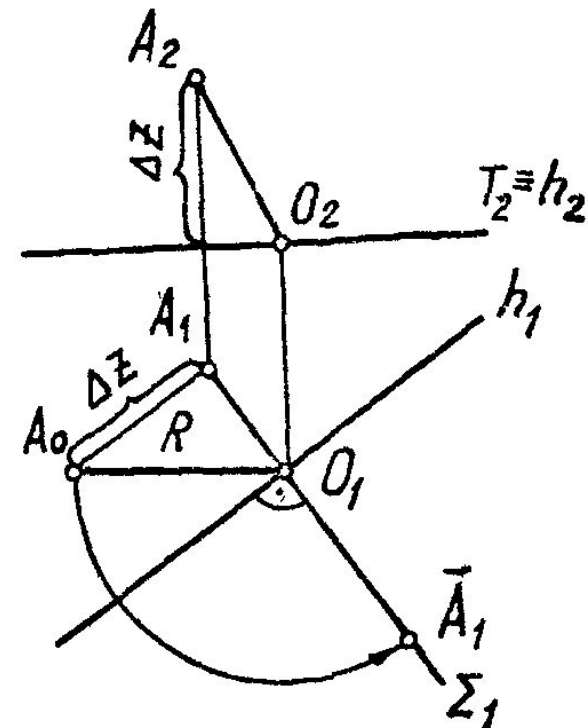


Рисунок 4.6

Обертання навколо лінії рівня

- Тут: h – вісь обертання (горизонталь);
 - Σ – площина обертання точки A ;
 - R – радіус обертання;
 - O – центр обертання;
 - T – горизонтальна площина рівня (площина поєднання);
 - A – положення точки A , поєднане з площиною T .
-
- На рис. 4.7 показано обертання площини $\Lambda(ABC)$ навколо горизонталі до поєднання площини Λ з горизонтальною площиною T з метою визначення дійсних форм і кутів.

Обертання навколо лінії рівня

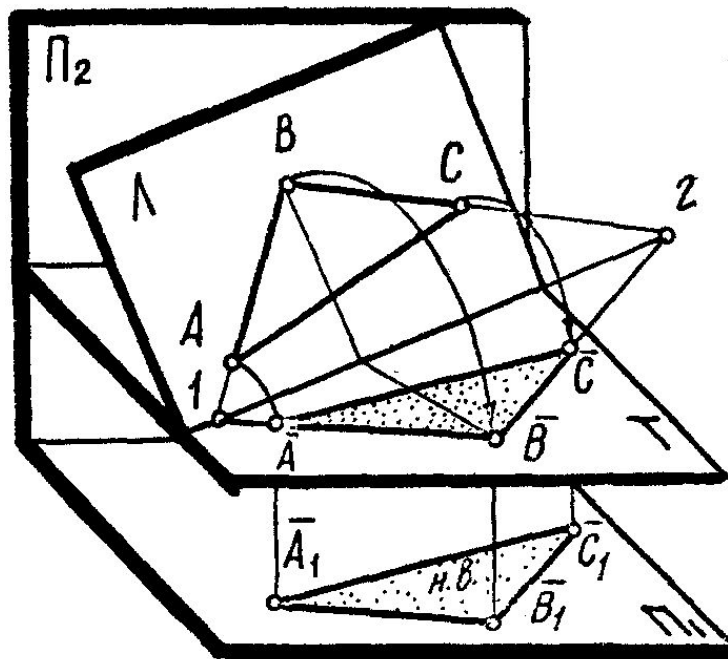


Рисунок 4.7

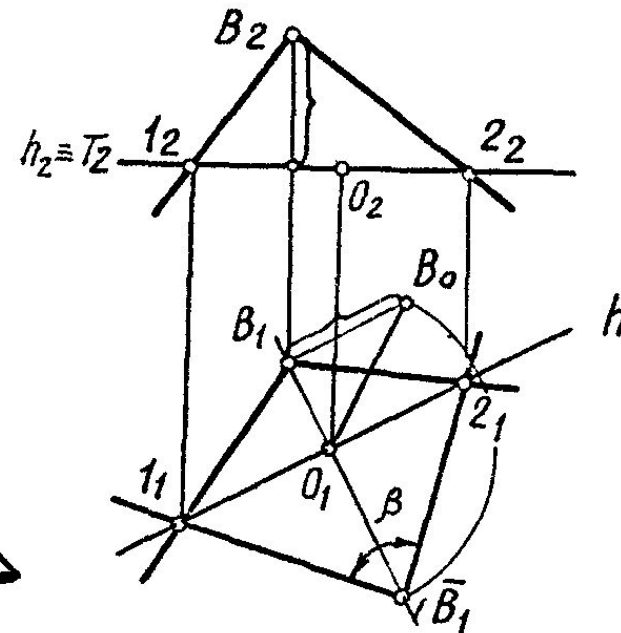


Рисунок 4.8

Обертання навколо лінії рівня

- Точки 1 і 2 – нерухомі, тому поєднання площини зводиться до поєднання точки В з площиною Т, задачі визначення відстані між двома точками зводиться до визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення і вирішується за допомогою **першої** задачі перетворення.
- Задача визначення відстані між точками, точкою і прямою і між двома паралельними прямими і між двома мимобіжними прямими, вирішуються за допомогою **другої** задачі перетворення. Точки 1 і 2 – нерухомі, тому поєднання площини зводиться до поєднання точки В з горизонтальною площиною Т.

Визначення натуральної величини кута

- Визначення на комплексному кресленнику натуральної величини кута між двома прямими, що перетинаються, показано на рис. 4.8.
- Розв'язок задачі за визначенням кута між **прямою і площиною**, зводиться до розглянутого вище завдання.
- Це видно з рисунка 4.9, де кут α між прямою і площиною визначається за допомогою додаткового кута β між прямою і перпендикуляром до площини.

Визначення натуральної величини кута

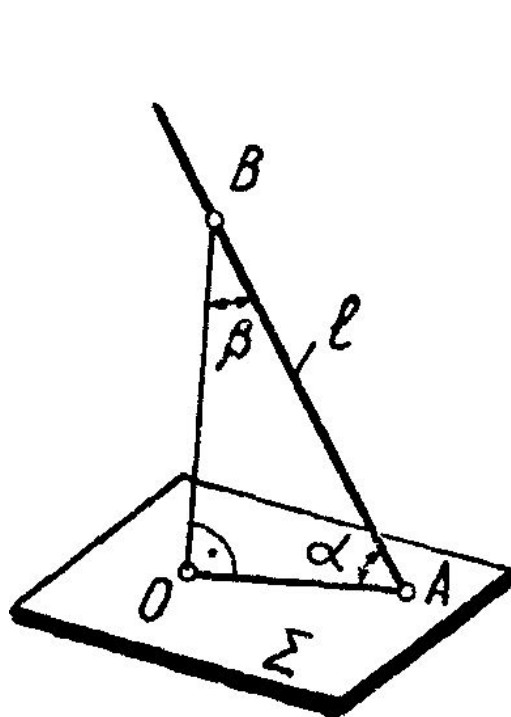


Рисунок 4.9

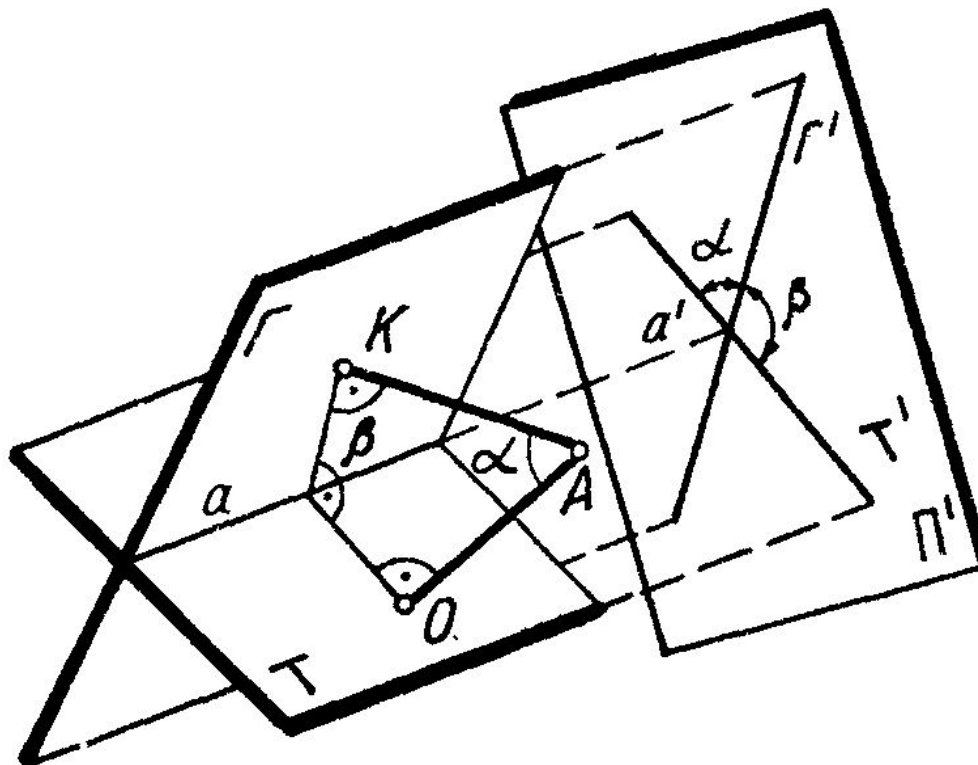


Рисунок 4.10

Визначення натуральної величини кута

- Величину меншого з **двогранних кутів** між двома площинами, що перетинаються, називають кутом між цими площинами. Для визначення величини цього кута можна рекомендувати два способи (рис. 4.10).
- 1. Якщо ребро **a** двогранного кута між площинами Γ і T задано, то треба перетворити його в проектує положення a' . При цьому площини будуть зображені у вигляді прямих Γ' і T' , що перетинаються. Кут α між ними і буде натуральною величиною двогранного кута.
- 2. Якщо ребро двогранного кута не задане, то з довільної точки A треба провести два перпендикуляри AK і AO до площин Γ і T , а потім визначити кут α з рівняння $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Визначення натуральної величини плоскої фігури

- Задача визначення натуральної величини плоскої фігури може бути вирішена **двома перетвореннями**, за допомогою способів заміни площин проєкцій або обертання навколо проєктуючих прямих, або **одним перетворенням**, за допомогою способу обертання навколо лінії рівня.

Визначення натуральної величини плоскої фігури

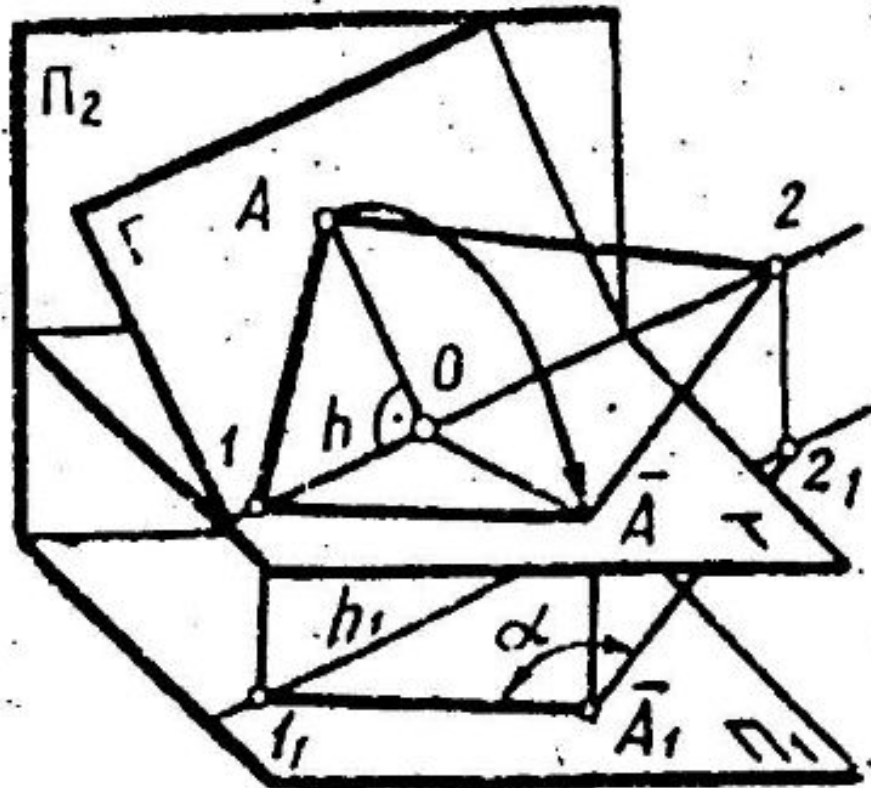


Рисунок 4.7

Висновки

Розглянуто:

- ☐ Перпендикулярність прямої і площини.
- ☐ Перпендикулярність двох площин.
- ☐ Основні завдання перетворення.
- ☐ Способи перетворення комплексного кресленика.
- ☐ Визначення відстаней.
- ☐ Визначення кутів.
- ☐ Визначення площі плоскої фігури.

Контрольні запитання

- ☐ 1. Умови перпендикулярності прямої і площини.
- ☐ 2. Коли прямий кут проектується на площину проекції без викривлень?
- ☐ 3. Які умови проектування будь-якого кута (гострого, прямого, тупого) на площину проекції без викривлень?
- ☐ 4. Які геометричні задачі називаються метричними?
- ☐ 5. Які способи визначення натуральної величини відрізка ви знаєте?
- ☐ 6. В чому суть способу обертання навколо проектуючої прямої?
- ☐ 7. В чому суть способу обертання навколо лінії рівня?
- ☐ 8. Які способи перетворення комплексного кресленика використовуються для розв'язання метричних задач?
- ☐ 9. Як визначити натуральну величину кута між двома прямими, між прямою і площиною, між двома площинами?

Література

1. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник для студ. вищ. закл. осв. / Михайленко В.Є., Найдіш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. За ред. В.Є. Михайленка. – К.: «Вища шк.», 2011. – 352 с.
2. Михайленко В.Є., Євстифєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В. Нарисна геометрія. – К.: Вища шк., 1993. – 320 с.
3. Головчук А.Ф., Кепко О.І., Чумак І.М. Інженерна та комп'ютерна графіка: Навч. посібник – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 160 с.
4. Чекмарёв А.А. Инженерная графика. – М.: Высш. шк., 1988. – 335 с.
5. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение. – М.: Высш. шк., 1988. – 350 с.