

Методы решения тригонометрических уравнений

ВЫПОЛНИЛА УЧЕНИЦА 10 «А» КЛАССА СИНЕЛЬНИКОВА
МАЙЯ

Метод замены переменной

С помощью замены $t = \sin x$ или $t = \cos x$, где $t \in [-1; 1]$ решение исходного уравнения сводится к решению квадратного или другого алгебраического уравнения.

Иногда используют универсальную тригонометрическую подстановку: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, где $t \in [-1; 1]$, тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \text{ не удовлетворяет условию } t \in [-1; 1] \\ t_2 = \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ : } (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в том, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысл:

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot \dots = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0 \text{ или } h(x) = 0 \\ \text{и т.д. при условии существования каждого из сомножителей}$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{3} = 0, \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \cos x = -\frac{2}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{2}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ} : (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \pm\left(\pi - \arccos \frac{2}{5}\right) + 2\pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$$

Однородные тригонометрические уравнения
Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют
однородным тригонометрическим уравнением
первой степени.

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения
уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями
уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\operatorname{tg} x = t$ и решаем методом замены переменной.

Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$ то, уравнение решается методом разложения на множители.

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \quad | : \cos x$$

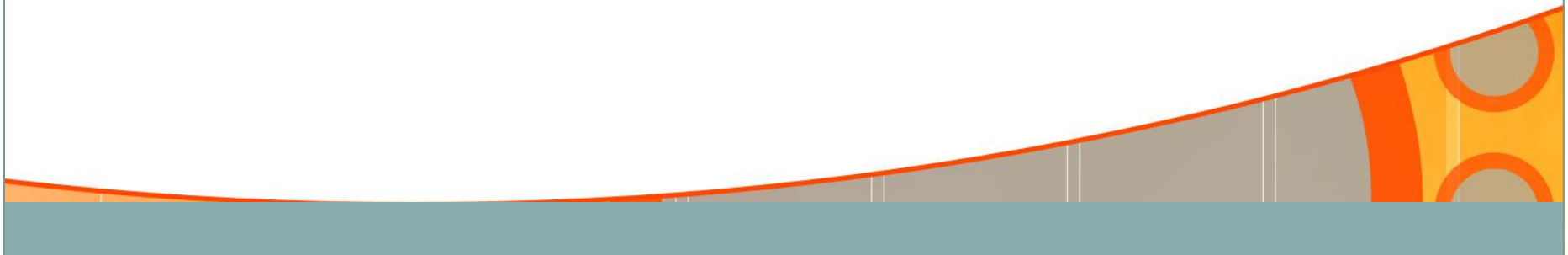
$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ} : \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



С помощью тригонометрических формул

1. Формулы сложения:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \quad | : 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, тогда

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ} : \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С помощью тригонометрических формул

2. Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{tg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{tg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$

С помощью тригонометрических формул

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 2 \sin 2x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

С помощью тригонометрических формул

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$


$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

5. Формулы половинного угла:

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

С помощью тригонометрических формул

6. Формулы суммы и разности:



$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

С помощью тригонометрических формул

7. Формулы произведения:



$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$