

Золотое сечение



«Красота и гармония стали важнейшими категориями познания, в определенной степени даже его целью, ибо в конечном итоге художник ищет истину в красоте, а ученый – красоту в истине».

Стахов А.П.



История «Золотого сечения»

Теория гармонии Древних

- В **Древнем Египте** существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В **Древней Греции** Золотое Сечение было своеобразным каноном культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно **Пифагору гармония имеет численное выражение**, то есть, она связана с концепцией числа.
- **Евклид** излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.
- Ряд чисел **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55** и т.д. известен как ряд Фибоначчи.
- **Каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления.**
- Все исследователи золотого деления в растительном и в животном мире, искусстве, неизменно приходили к ряду Фибоначчи как арифметическому выражению закона



«Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

Эпоха Возрождения ассоциируется с именами таких «титанов», как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэль, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Лука Пачоли.

Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно **Леонардо да Винчи (1452-1519)** был одним из первых, кто ввел сам термин **«Золотое Сечение»**.

«Витрувийский человек» - размах вытянутых в сторону рук человека примерно равен его росту, вследствие чего **фигура человека вписывается в квадрат и в круг**.

Рисунок и текст иногда называют **каноническими пропорциями**.



Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Гениальный астроном Иоганн Кеплер (1571-1630) был последовательным приверженцем Золотого Сечения, Платоновых тел и Пифагорейской доктрины о числовой гармонии Мироздания.
- Считается, что именно Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:
 $1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$ в пределе стремится к золотой пропорции

Математическое понимание гармонии

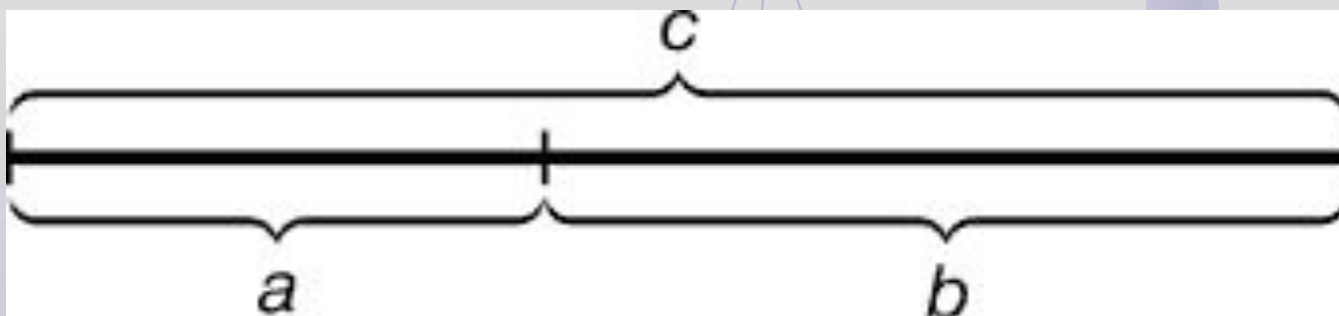
- «**Гармония** – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» - *Большая Советская Энциклопедия*

- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

Понятие «Золотое сечение»

Золотое сечение - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

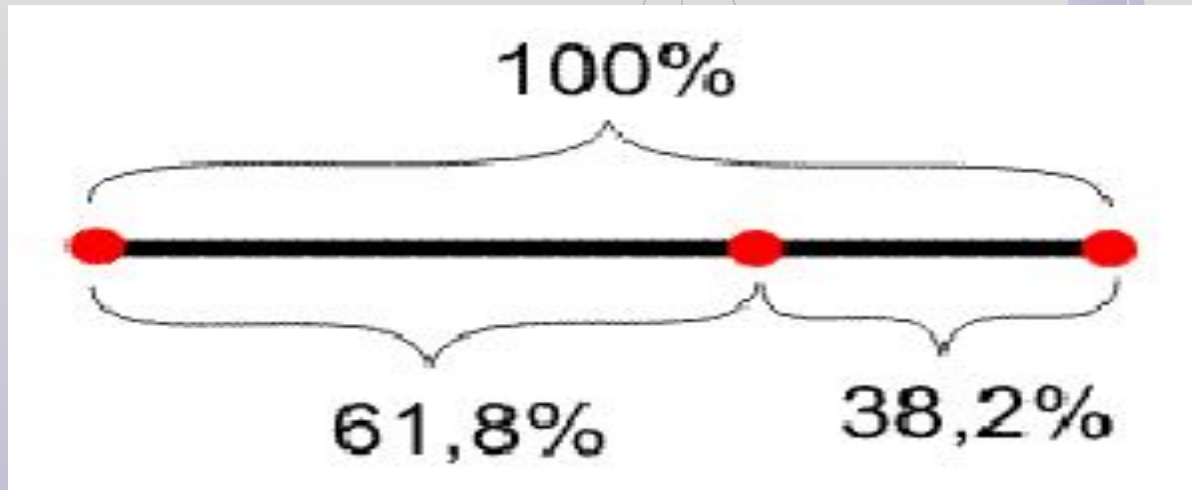


$$a : b = b : c \quad \text{или} \quad c : b = b : a$$

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Золотое сечение в процентах

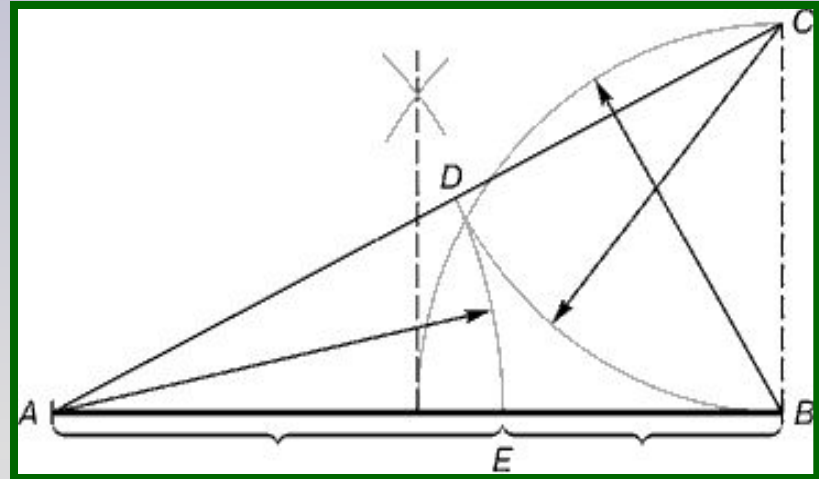


Золотое сечение в геометрии

Деление отрезка в золотом отношении

Дано: отрезок AB.

Построить: золотое сечение отрезка AB, т.е. точку E так, чтобы $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$.

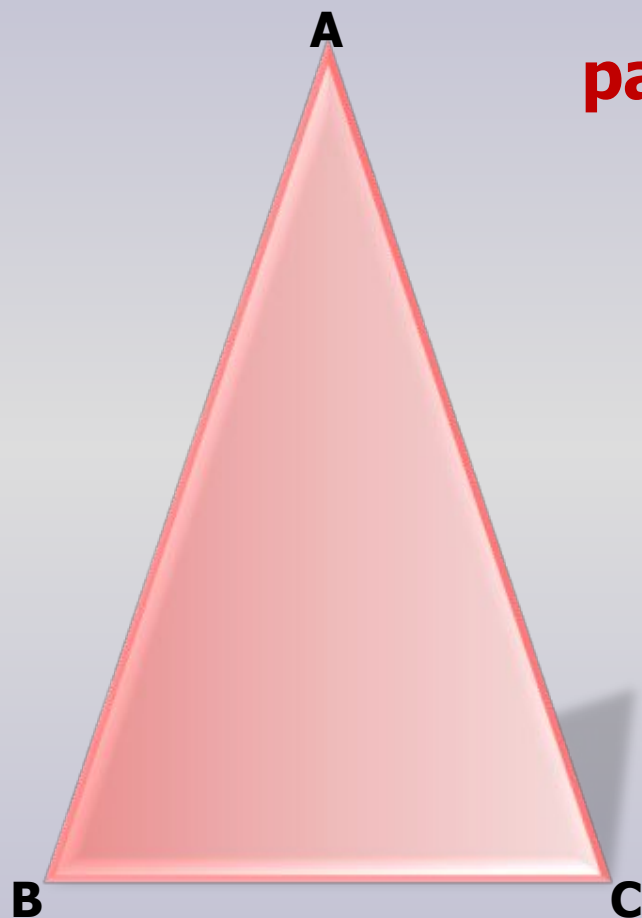


Построение.

Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке B перпендикуляр к прямой AB и на нем отложим отрезок $BC = \frac{1}{2} AB$. Далее, соединим точки A и C, отложим отрезок $CD = CB$, и наконец $AE = AD$.

Точка E является искомой, она производит золотое сечение отрезка AB.

Золотой треугольник

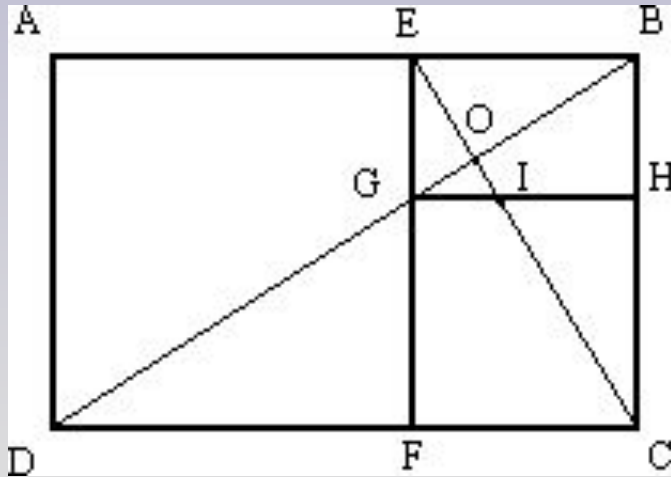


Золотым называется такой **равнобедренный треугольник**, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

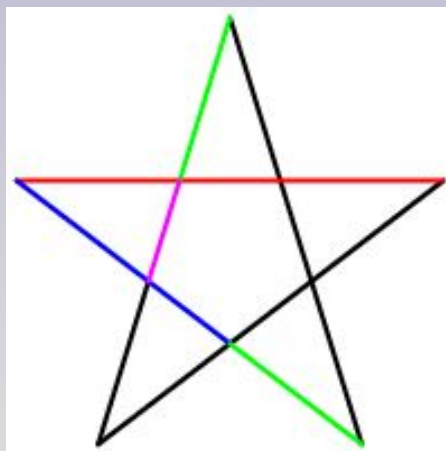
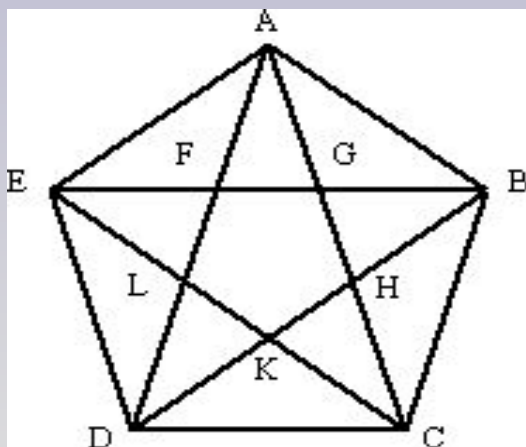
Золотой прямоугольник



$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число **φ**, называется **золотым прямоугольником**.

Пентаграмма

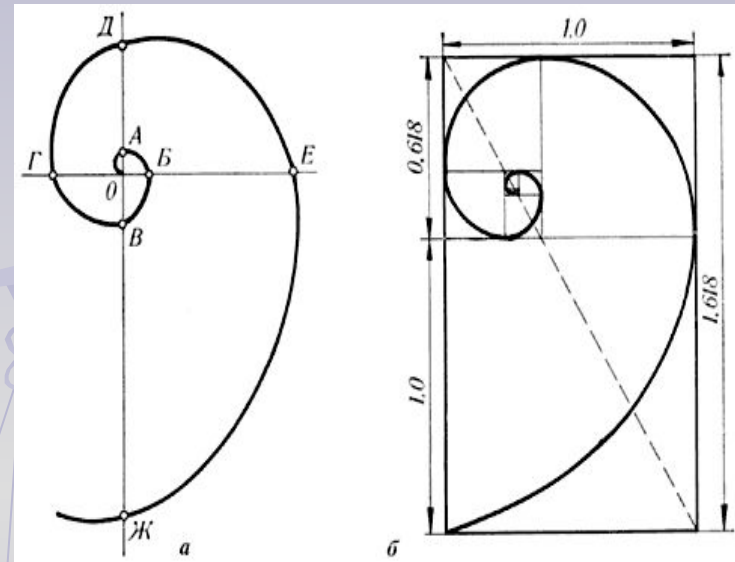
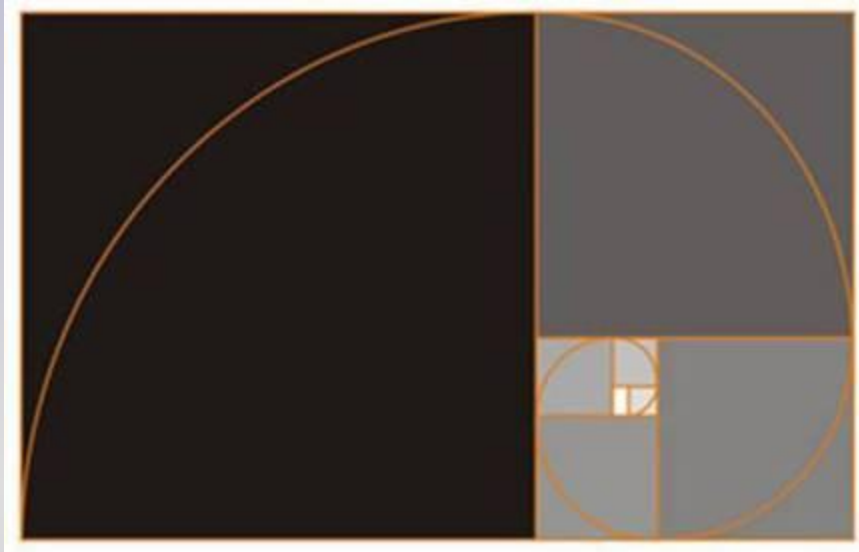


Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму** *FGHKL* и **пять правильных треугольников** (*ADC, ADB, EBD, AEC, EBC*)

Здание военного ведомства США имеет форму пентаграммы и получило название «**Пентагон**», что значит правильный пятиугольник.

Золотая спираль



Последовательно отрезая от золотого прямоугольника квадраты и вписывая в каждый по четверти окружности, получаем **золотую логарифмическую спираль**.

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется **спираль Архимеда**.

«Золотое сечение» - гармония математики

Число ϕ является положительным корнем квадратного уравнения:

$$x^2 = x + 1 \quad (1)$$

подставим корень ϕ вместо x и разделим на ϕ :

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad (2)$$

Если продолжить такую подстановку бесконечное число раз, то получим

цепную дробь:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (3)$$

Аналогично, если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1) то получим

представление золотой пропорции в «радикалах»:

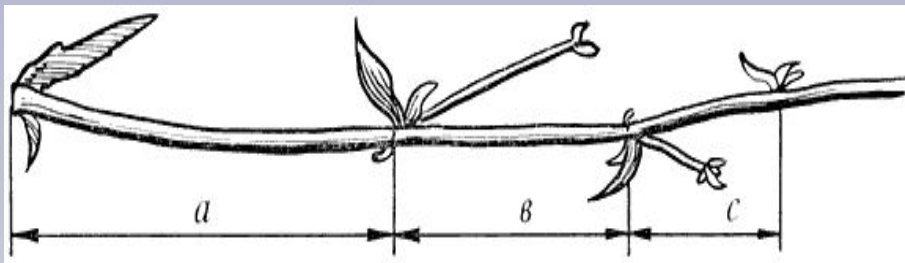
$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (4)$$

Эти формулы (3) и (4) доставляют «эстетическое наслаждение» и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии...

Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Гениальный астроном Иоганн Кеплер (1571-1630) был последовательным приверженцем Золотого Сечения, Платоновых тел и Пифагорейской доктрины о числовой гармонии Мироздания.
- Считается, что именно Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:
 $1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$ в пределе стремится к золотой пропорции

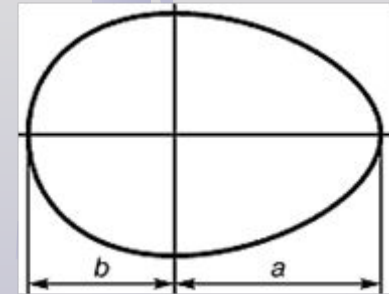
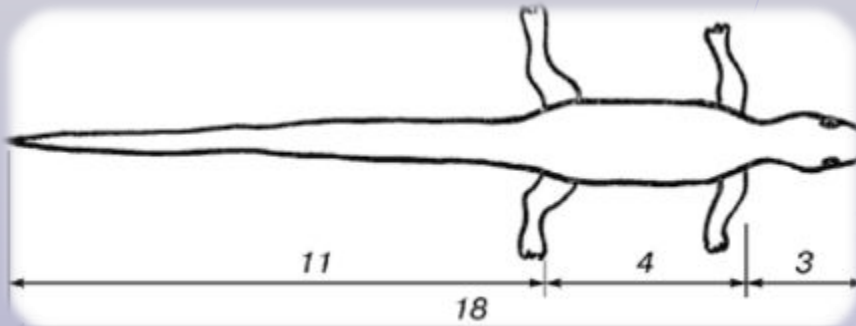


Величины
отростков и
лепестков цикория
подчинены правилу
золотой пропорции.

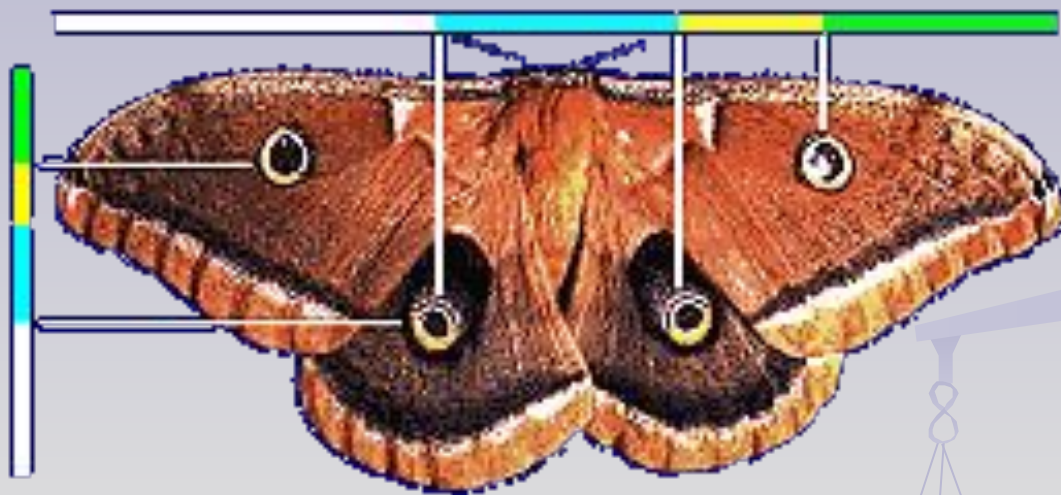


Золотое
сечение
лист
розы

Золотая пропорция в теле
ящерицы – длина хвоста так
относится к длине
остального тела, как 62 к 38



Золотые
пропорции в
яйце птицы



- У многих бабочек узоры на крыльях, соотношение размеров грудной и брюшной части тела соответствуют золотой пропорции

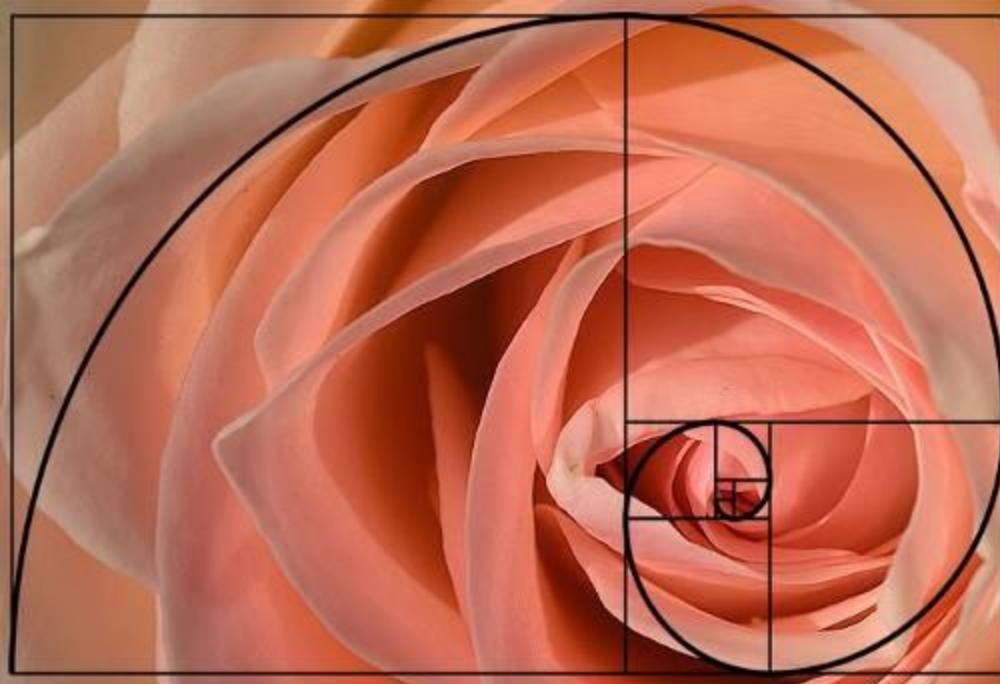
Золотое сечение в природе

Все, что приобретало какую-то форму, образовывалось, росло, стремилось занять место в пространстве и сохранить себя.

Это стремление находит осуществление в основном в двух вариантах – рост вверх или расстилание по поверхности земли и закручивание по спирали.

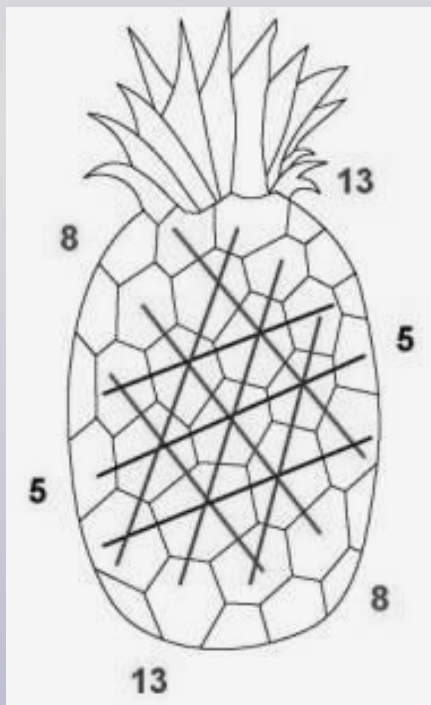
Гете называл спираль "кривой жизни". Спираль увидели в расположении семян подсолнечника, в шишках сосны, ананасах, кактусах и т.д. Паук плетет паутину спиралеобразно.







- Цветки и семена подсолнуха, ромашки, чешуйки в плодах ананаса, хвойных шишках "упакованы" по **логарифмическим ("золотым") спиральям**, **завивающимся навстречу друг другу**, причем числа "правых" и "левых" спиралей всегда относятся друг к другу, как соседние числа Фибоначчи.



Рога и бивни животных развиваются в форме спирали.

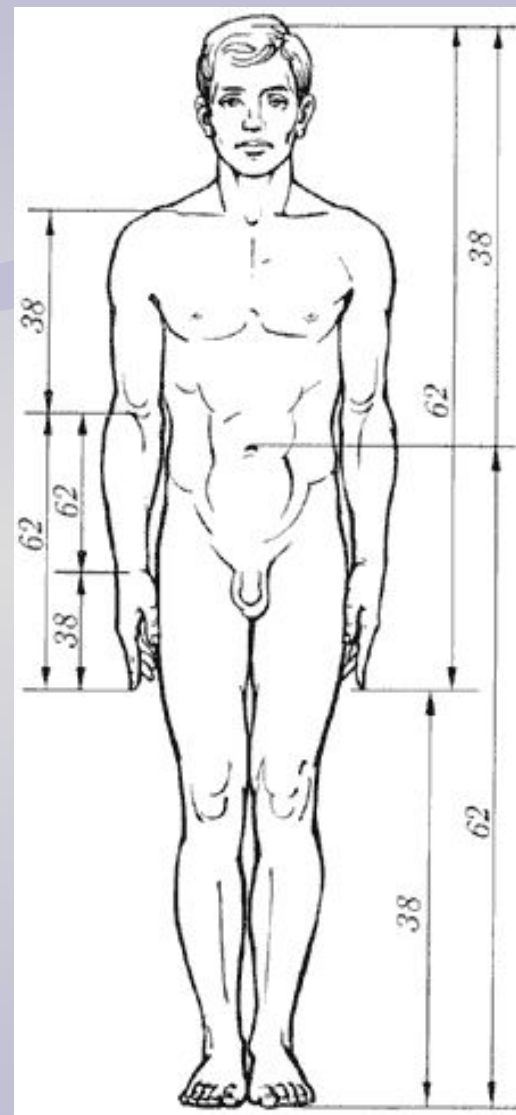
Бивни слонов и вымерших мамонтов, когти львов и клювы попугаев являют собой **логарифмические формы** и напоминают форму оси, склонной обратиться в спираль.



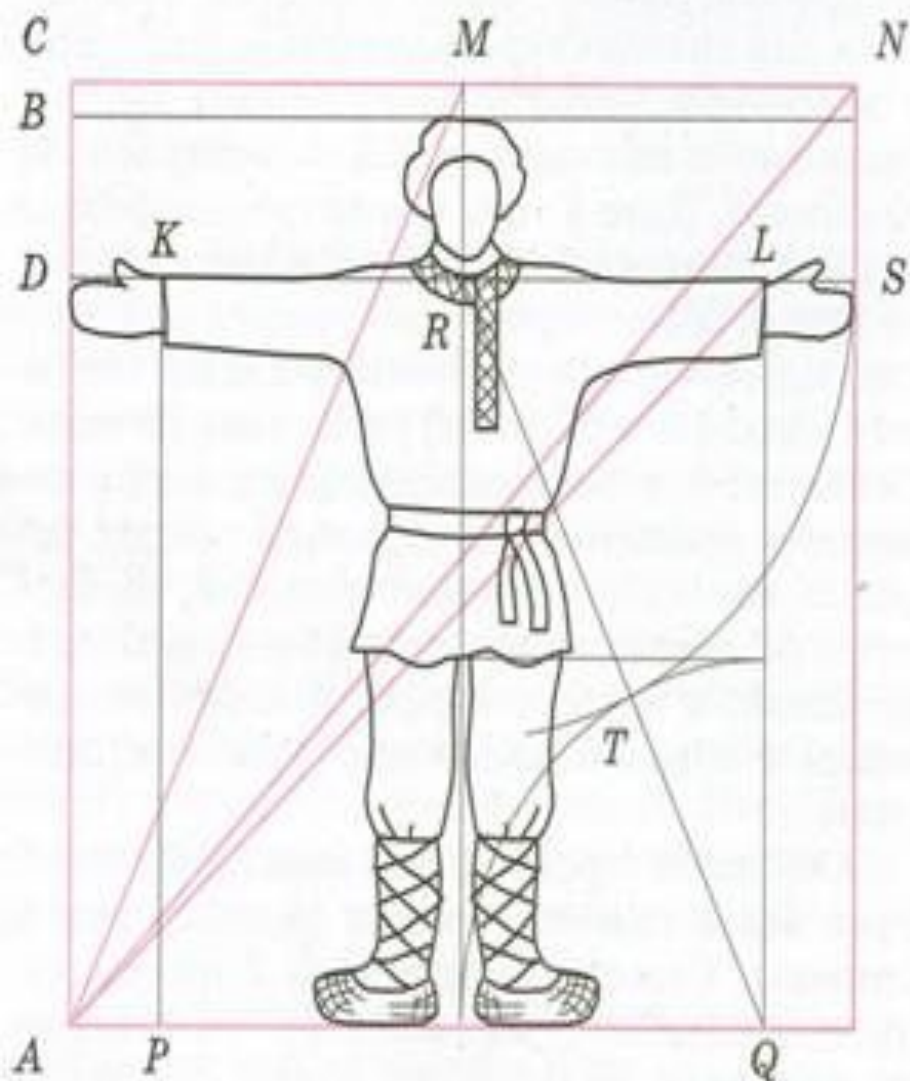
Математическая эстетика Цейзинга

В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд «Эстетические исследования». Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу, что **пропорции золотого сечения проявляются в отношении частей тела человека** – длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т.д.

Деление тела точкой пупа – важнейший показатель золотого сечения.



Математические закономерности русских мер



Рост человека: $a = AB$

Мерная сажень: $C_M = AC = CN = 1,03a$

Малая (тмутараканская) сажень:

$$C_T = AD = KL = \frac{5}{6}a = 0,833a$$

Сажень без чети: $C_Ч = AM = \frac{\sqrt{5}}{6}C_M$

Косая новгородская сажень: $K_H = PL = \sqrt{2}C_T$

Косая великая сажень: $K_B = AN = \sqrt{2}C_M$

Соотношения между сажнями: $\frac{C_T}{K_H} = \frac{C_M}{K_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{C_T}{C_M} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow \frac{C_M/2}{C_T} = \frac{RS}{LQ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad - \text{золотое сечение}$$

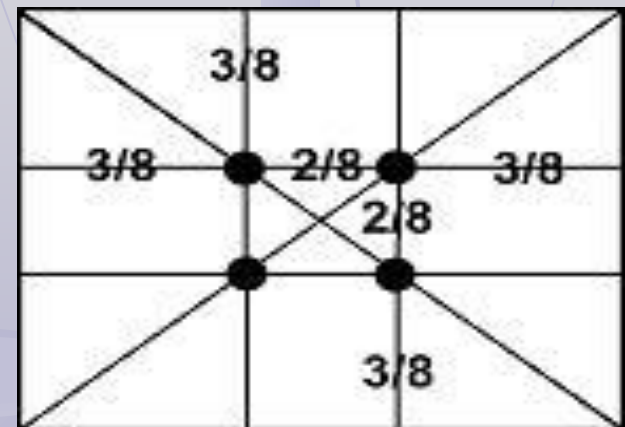
$$\frac{C_Ч}{C_M} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad - \text{функция золотого сечения}$$

Золотое сечение в живописи и фотографии

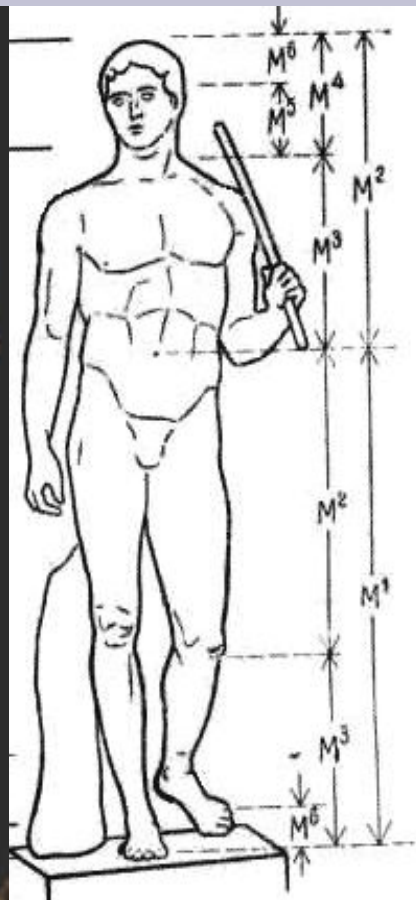


- На живописном полотне существуют **четыре точки повышенного внимания.**

- Зрительные центры расположены на расстоянии $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ от краев любой картины и фотографии.



Золотое сечение в скульптуре

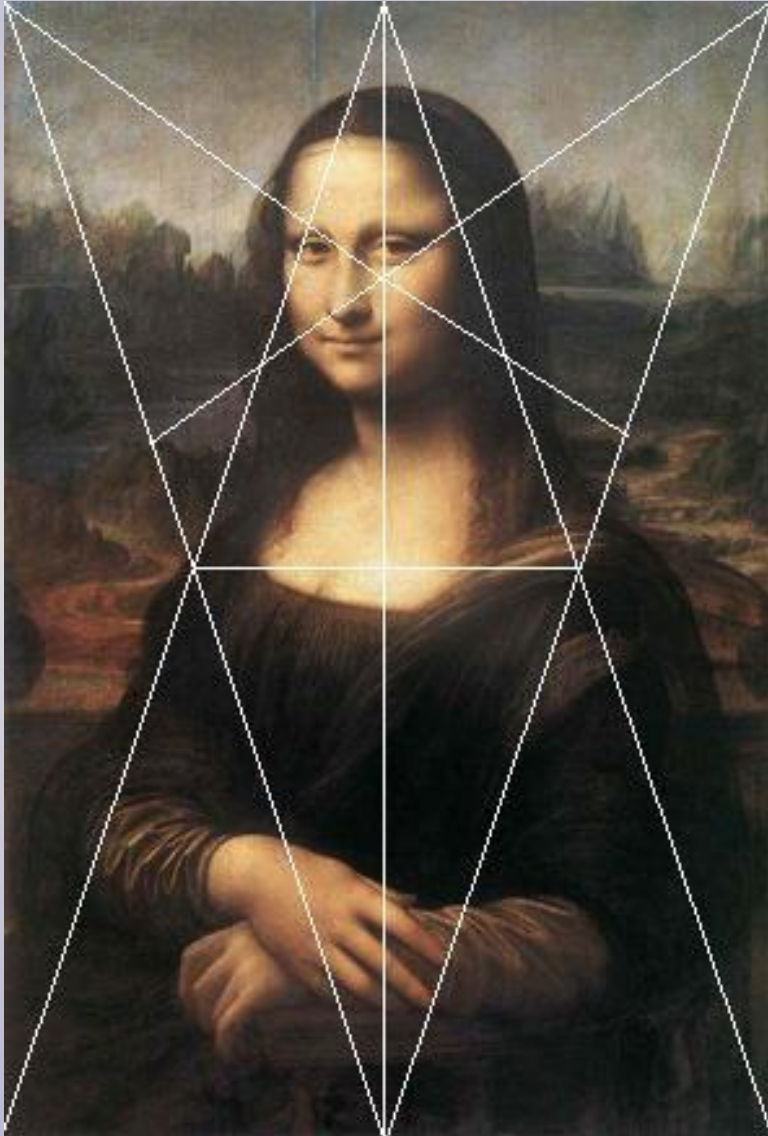


Дорифор Поликлета

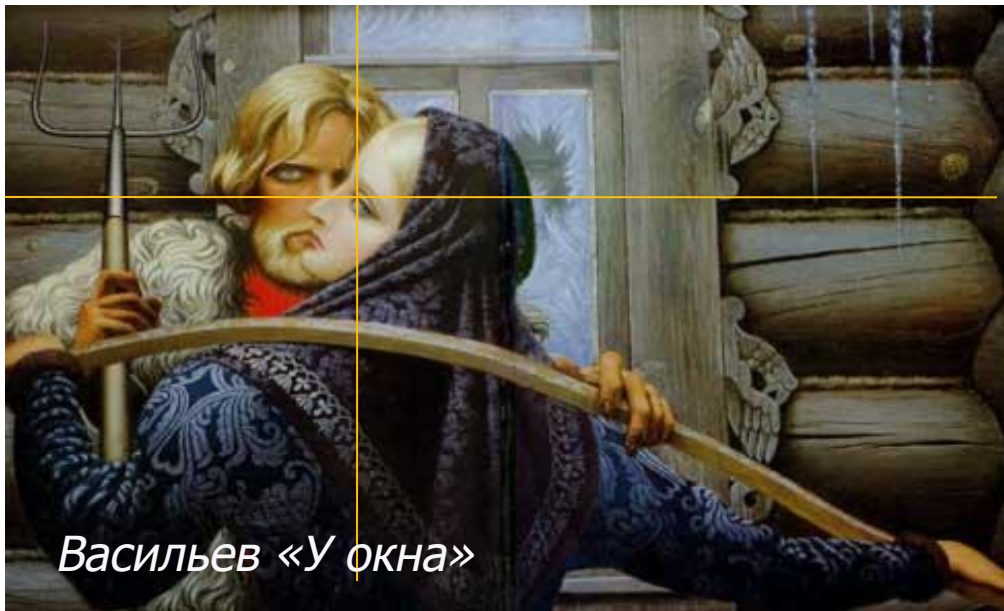


Венера Милосская

Золотое сечение в картине Леонардо да Винчи "Джоконда"



- Портрет Моны Лизы привлекает тем, что композиция рисунка построена на "золотых треугольниках" (точнее на треугольниках, являющихся кусками правильного звездчатого пятиугольника).



Васильев «У окна»



«Суд Париса» камея



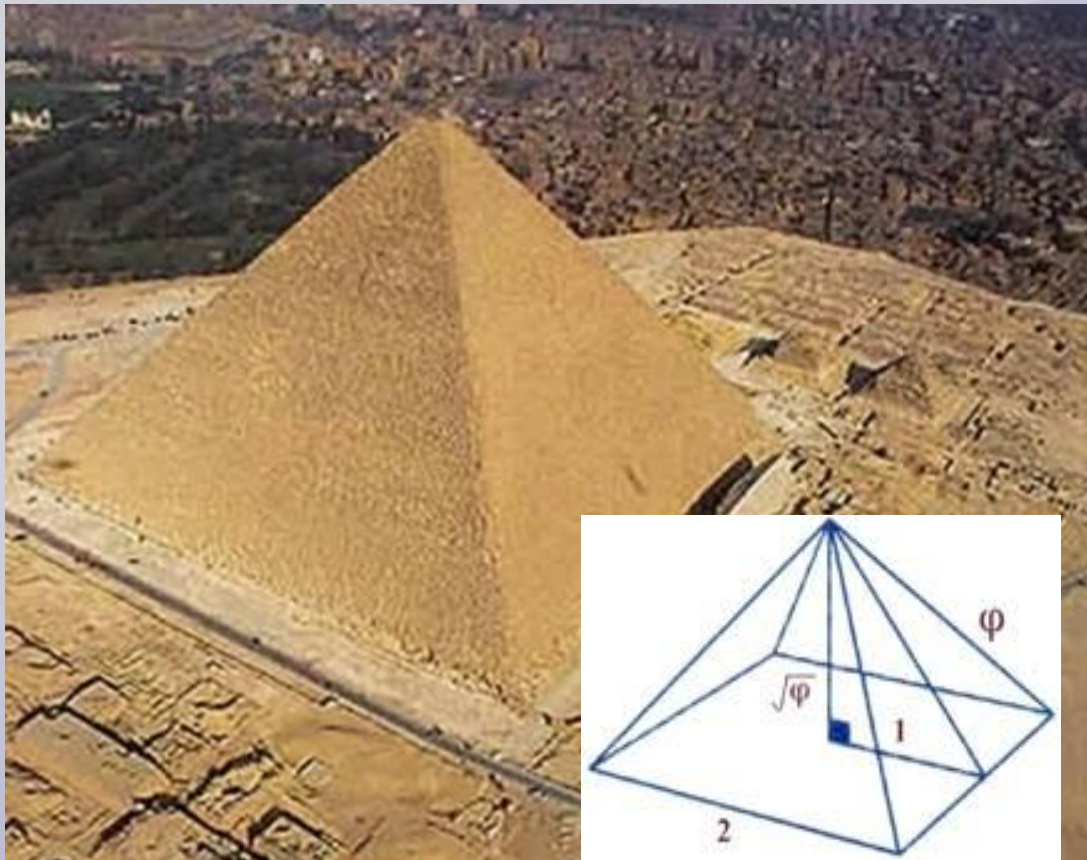
Иванов «Явление Христа народу»



«Поющий Один» 8 век

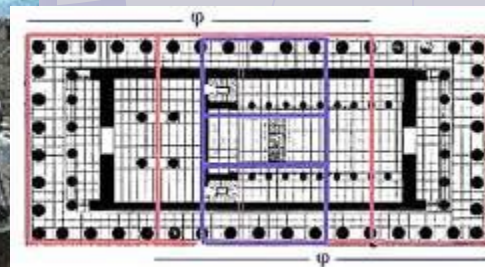
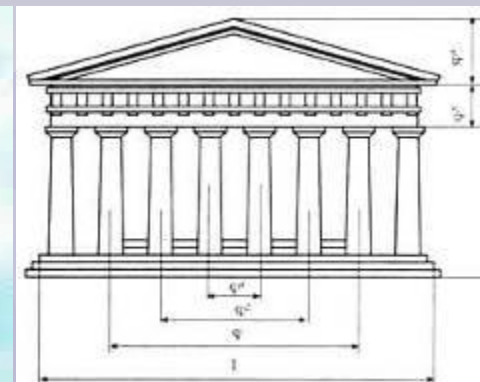
Золотое сечение в архитектуре

Пирамида Хеопса



- Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании.

Золотые пропорции Парфенона

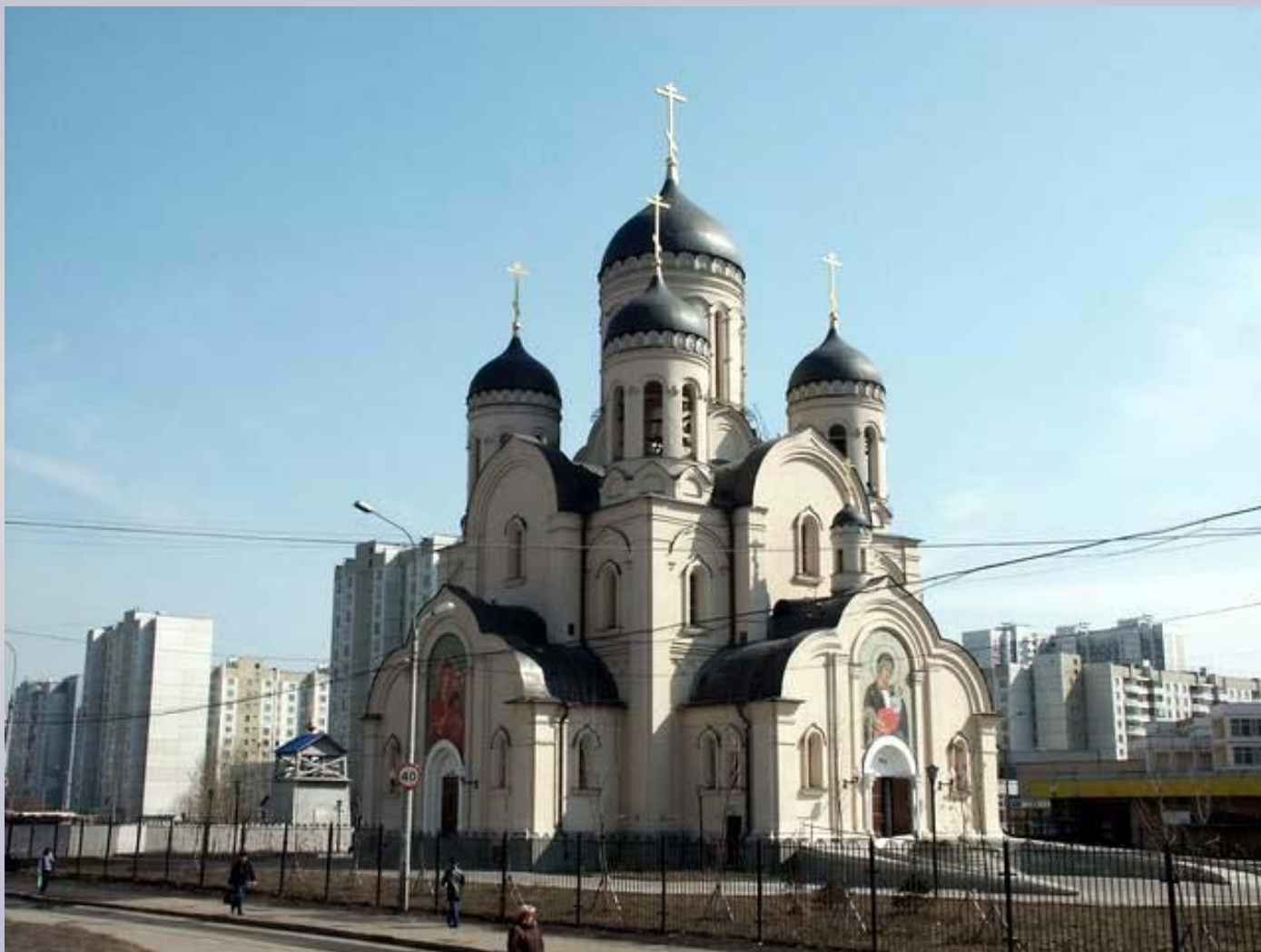




Золотое
соотношение
мы можем
увидеть и в
здании Собора
Парижской
Богоматери

Нотр - Дам де Пари

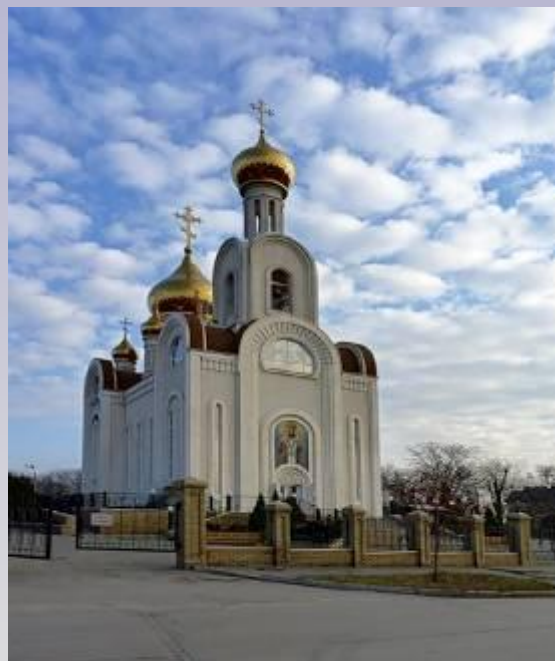
Золотое сечение в архитектуре России



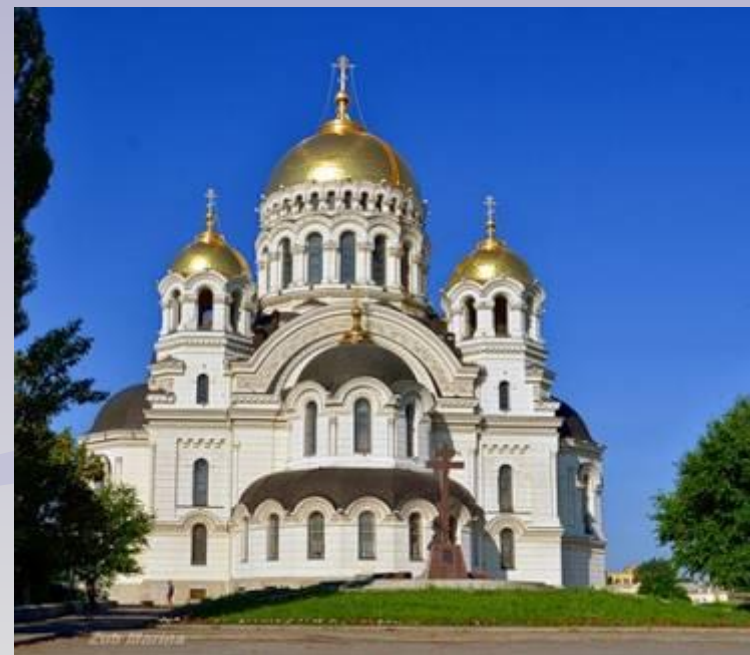
Собор Христа Спасителя



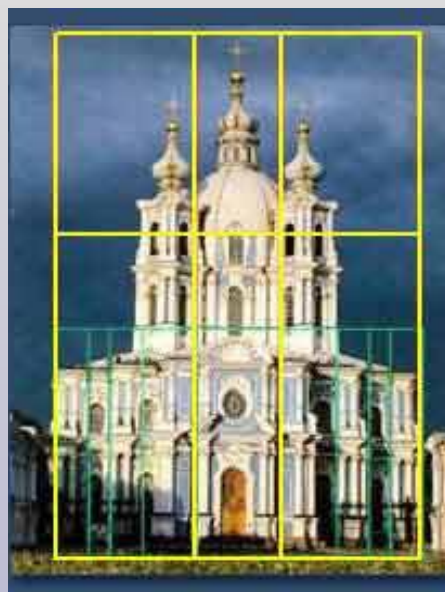
Собор Василия Блаженного



Храм Святителя Димитрия



Собор Вознесения Господня



Смольный собор



Проект Смольного собора



Собор на Нерли

