

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Часть 2

Задача Коши

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Решение разностных уравнений

Общее решение разностных уравнений

Опр: Линейным разностным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{N+1} a_{n+k} y^{n+k} = b_n f^n, \quad a_{n+k}, b_n = \text{const}$$

Если $b_n = 0$, то уравнение называется **однородным**

Решение разностного уравнения представимо в виде:

$$y^n = y_{\text{общ}}^n + y_{\text{ч}}^n$$

Общее решение
однородного
уравнения

Частное решение
неоднородного
уравнения

Общее решение состоит из линейной комбинации решений разностного уравнения:

$$y_{\text{общ}}^n = \sum_{i=1}^N c_j y_{oj}^n$$

Общее решение разностных уравнений

Будем искать общее решение однородного уравнения в виде

$$y_{\text{общ}}^n = \lambda^n$$

Уравнение вида:

$$a_n + a_{n+1}\lambda + a_{n+2}\lambda^2 + a_{n+3}\lambda^3 + \dots + a_{n+k}\lambda^k = 0$$

Называется **характеристическим** уравнением

$$y_{\text{общ}}^n = \sum_{i=1}^N C_j \lambda_j^n, \quad n = 0 \dots N$$

Проверим найденное решение

$$\sum_{j=1}^N C_j \lambda_j^{n-k} (a_n + a_{n+1}\lambda_j + a_{n+2}\lambda_j^2 + a_{n+3}\lambda_j^3 + \dots + a_{n+k}\lambda_j^k) = 0 \quad \text{Верно } \forall C_j$$

Если какой-нибудь корень λ_j имеет кратность s , то соответствующая частичная сумма

$$\sum_{p=0}^{s-1} C_{j+p} \lambda_{j+p}^n$$

заменяется выражением

$$(C_j + nC_{j+1} + \dots + n^{s-1}C_{j+s-1})\lambda_j^n$$

Частное решение

К полученному общему решению однородной подсистемы нужно добавить частное решение неоднородной подсистемы. Его вид зависит от вектора f правой части. Пусть они равны:

$$f_n = \mu^n (P_\alpha(n) \cos(vn) + R_\beta(n) \sin(vn))$$

$P_\alpha(n), R_\beta(n)$ - многочлены степеней α и β соответственно

μ и v – действительные числа

$$y_{\text{ч}}^n = \mu^n (Q_\delta(n) \cos(vn) + S_\delta(n) \sin(vn))$$

$Q_\delta(n), S_\delta(n)$ - многочлены степени $\delta = \max(\alpha, \beta)$

Для случая, когда μ – модуль, а v – аргумент какого-то одного корня характеристического уравнения полагаем

$$y_{\text{ч}}^n = n^r (Q_\delta(n) \cos(vn) + S_\delta(n) \sin(vn))$$

r – кратность корня

Пример

Найти решение разностного

уравнение

$$y^{n+1} - 3y^n + 3y^{n-1} - y^{n-2} = ah^4n, \quad a, h = \text{const}$$

Найдем общее решение однородного уравнения.

Получаем характеристическое

уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$



Подставляем в уравнение

$$y_{\text{общ}}^n = \lambda^n$$

$$\lambda_{123} = 1 \quad \text{- Корень кратности } 3$$

$$y_{\text{общ}}^n = (C_1 + C_2n + C_3n^2)1^n$$

Найдем частное

$$f_n = \mu^n (P_\alpha(n) \cos(vn) + R_\beta(n) \sin(vn))$$

решение

В правой части $\mu = 1, v = 0$



Совпадают с модулем и аргументом λ

Будем искать решение в

$$y_{\text{ч}}^n = (A + Bn)n^3$$

виде

Подставляем в неоднородное

уравнение

$$A(n+1)^4 + B(n+1)^3 - 3An^4 - 3Bn^3 + 3A(n-1)^4 + 3B(n-1)^3 - A(n-2)^4 - B(n-2)^3 = 12A(2n-1) + 6B = ah^4n$$

$$A = ah^4/24 \quad B = ah^4/12$$

$$y^n = y_{\text{общ}}^n + y_{\text{ч}}^n = (C_1 + C_2n + C_3n^2)1^n + ah^4n^3(n+2)/24$$

Условия порядка методов Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты 4-го порядка

Общий вид методов 4-го порядка

$$u^{n+1} = u^n + \tau(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$$

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, u^n + \underbrace{\tau(a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + a_{i3} k_3 + a_{i4} k_4)}_{\Delta u})$$

$$u^{n+1} = u^n + \tau u' + \frac{\tau^2}{2} u'' + \frac{\tau^3}{6} u''' + \frac{\tau^4}{24} u'''' + \dots$$

$$k_i = f^n + c_i \tau f'_t + \Delta u f'_u + \frac{1}{2} (\tau^2 f''_{tt} + 2\tau \Delta u f''_{tu} + \Delta u^2 f''_{uu}) + \\ \frac{1}{6} (\tau^3 f'''_{ttt} + 3\tau^2 \Delta u f'''_{ttu} + 3\tau \Delta u^2 f'''_{t u u} + \Delta u^3 f'''_{uuu})$$

Определим условия 3-го порядка аппроксимации...

Разложение коэффициентов методов

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, u^n + \underbrace{\tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4)}_{\Delta u_i})$$

$$k_i = f^n + c_i \tau f'_t + \Delta u_i f'_u + \frac{1}{2} (\tau^2 c_i^2 f''_{tt} + 2\tau c_i \Delta u_i f''_{tu} + \Delta u_i^2 f''_{uu}) +$$

$$\frac{1}{6} (\tau^3 f'''_{ttt} + 3\tau^2 \Delta u_i f'''_{ttu} + 3\Delta u_i^2 \tau f'''_{ttu} + \Delta u_i^3 f'''_{uuu}) +$$

$$\frac{1}{24} (\tau^4 f^{IV}_{tttt} + 4\tau^3 \Delta u_i f^{IV}_{tttu} + 6\Delta u_i^2 \tau^2 f^{IV}_{ttu} + 4\Delta u_i^3 \tau f^{IV}_{tuu} + \Delta u_i^4 f^{IV}_{uuu})$$

$$\Delta u_i = \tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4) = \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} k_j =$$

$$= \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} \left[f^n + c_j \tau f'_t + \Delta u_j f'_u + \frac{1}{2} (\tau^2 f''_{tt} + 2\tau \Delta u_j f''_{tu} + \Delta u_j^2 f''_{uu}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{6} (\tau^3 f'''_{ttt} + 3\tau^2 \Delta u_j f'''_{ttu} + 3\Delta u_j^2 \tau f'''_{ttu} + \Delta u_j^3 f'''_{uuu}) \right]$$

- 1-й
- порядок
- 2
- 3
- 4

Определение главных членов погрешности

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= \tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4) = \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij}k_j = \\ &= \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} \left[f^n + c_i \tau f'_t + \Delta u_{i2} f'_u + \frac{1}{2} (\tau^2 f''_t + 2\tau \Delta u_{i3} f''_{tu} + \Delta u_{i3}^2 f''_{uu}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{6} (\tau^3 f'''_t + 3\tau^3 \Delta u_{i4} f'''_{ttu} + 3\Delta u_{i4}^2 \tau f'''_{ttu} + \Delta u_{i4}^3 f'''_{uu}) \right] =\end{aligned}$$

$$\Delta u_{i2} = \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} \left[f^n + c_i \tau f'_t + \Delta u_{i3} f'_u + \frac{1}{2} (\tau^2 f''_t + 2\tau \Delta u_{i4} f''_{tu} + \Delta u_{i4}^2 f''_{uu}) \right]$$

$$\Delta u_{i3} = \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} [f^n + c_i \tau f'_t + \Delta u_{i4} f'_u]$$

$$\Delta u_{i4} = \tau \sum_{j=1}^4 a_{ij} f^n$$

- 1-й
- порядок
- 2
- 3
- 4

3 hours later...

Условия порядка

$$\frac{1}{\tau}(u^n + \tau u' + \frac{\tau^2}{2}u'' + \frac{\tau^3}{6}u''' + \frac{\tau^4}{24}u'''' + \dots - u^n) = (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$$

Условие
Кутты

$$c_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}$$

1: $u' = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)f^n$

2: $\frac{\tau}{2}u'' = \tau \sum_{i=1}^4 b_i \left(c_i \tau f'_t + f'_u \sum_{j=1}^4 a_{ij} f^n \right) = \tau \sum_{i=1}^4 b_i c_i (f'_t + f'_u f^n)$

3: $\frac{\tau^2}{6}u''' = \frac{\tau^2}{2} \sum_{i=1}^4 b_i c_i^2 (f''_t + 2f f''_{tu} + f''_u f^2) + \tau^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_i a_{ij} a_{jk} f'_u (f'_t + f f'_u)$

$$u' = f$$

$$u'' = f'_t + f'_u f$$

$$u''' = f''_t + f''_{tu} f + f''_{ut} f + f''_u f^2 + f'_u f'_t + (f'_u)^2 f$$

$$= \sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_{ij} c_j$$

Условия порядка

Условие
Кутты

$$c_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}$$

1: $1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

2: $1 = 2 \sum_{i=1}^4 b_i c_i$

3: $1 = 3 \sum_{i=1}^4 b_i c_i^2$ $1 = 6 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_i a_{ij} a_{jk}$

Устойчивость методов Рунге-Кутты

Устойчивость явных методов Рунге-Кутты

$$u' = f(t, u)$$

$$u(0) = u_0$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = F(t_n, u^n)$$

$$u^0 = u_0$$

Функция
приращения
ЯМК

Лемма: пусть $f(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой C по второму аргументу, т.е.

$$\forall u, v \quad |f(t, u) - f(t, v)| \leq C \|u - v\|$$

Тогда $F(t, u)$ так же удовлетворяет условию Липшица с константой $C_2 \approx C$

Иными словами, если решение дифференциальной задачи существует и единственно,

то решение разностной задачи так же существует и единственно.

$$F(t_n, u^n) \approx f^n \left(\underbrace{\sum_i b_i}_1 + \tau c \underbrace{\sum_i b_i c_i}_{1/2} + (c\tau)^2 \underbrace{\left\{ \sum b_i a_{ij} a_{jk} + \dots \right\}}_{1/6} \dots \right)$$

Это разложение в ряд
Тейлора

Таким
образом

$$|F(t_n, y) - F(t_n, z)| \leq C_2 \|y - z\|$$

$$C_2 \approx C e^{c\tau}$$

Устойчивость явных методов Рунге-Кутты

Теорема: Пусть функция приращения ЯМРК удовлетворяет условию Липшица с константой

C_2 тогда, для решения двух возмущенных задач справедлива следующая оценка

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = F(t_n, u^n) + \varepsilon_1^n \quad u^0 = u_0$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} = F(t_n, z^n) + \varepsilon_2^n \quad z^0 = z_0$$

Пусть для нормы погрешности решения двух задач выполняема оценка

$$\forall n \quad \|\varepsilon_1^n\| \leq \varepsilon, \|\varepsilon_2^n\| \leq \varepsilon,$$

Тогда
а

$$\|u^n - z^n\| \leq e^{C_2 t_n} \|u^0 - z^0\| + e^{C_2 t_n} \frac{2\varepsilon}{C_2}$$

Т.е явные методы
обладают
слабой устойчивостью

Слабая устойчивость

$$\square u^n = u^{n-1} + \tau F(t_{n-1}, u^{n-1}) + \tau \varepsilon_1^{n-1}$$

$$z^n = z^{n-1} + \tau F(t_{n-1}, z^{n-1}) + \tau \varepsilon_2^{n-1}$$

$$u^n - z^n = u^{n-1} - z^{n-1} + \tau(F(t_{n-1}, u^{n-1}) - F(t_{n-1}, z^{n-1}) + \varepsilon_1^{n-1} - \varepsilon_2^{n-1})$$

$$\|u^n - z^n\| \leq \|u^{n-1} - z^{n-1}\| + \tau\|F(t_{n-1}, u^{n-1}) - F(t_{n-1}, z^{n-1})\| + 2\tau\varepsilon$$

$$\leq (1 + C_2\tau)((1 + C_2\tau)\|u^{n-2} - z^{n-2}\| + 2\tau\varepsilon) + 2\tau\varepsilon \leq$$

$$\leq \|u^{n-1} - z^{n-1}\|(1 + C_2\tau) + 2\tau\varepsilon \leq$$

$$\leq (1 + C_2\tau)((1 + C_2\tau)\|u^{n-2} - z^{n-2}\| + 2\tau\varepsilon) + 2\tau\varepsilon \leq \dots$$

$$\leq (1 + C_2\tau)^n \|u^0 - z^0\| + 2\tau\varepsilon(1 + (1 + C_2h) + \dots + (1 + C_2h)^{n-1}) \leq \dots$$

$$(1 + C_2\tau)^n = (1 + C_2\tau)^{\frac{1}{C_2\tau} C_2\tau n} \leq e^{C_2 t_n}$$

$$(1 + (1 + C_2h) + \dots + (1 + C_2h)^{n-1}) = \frac{(1 + C_2\tau)^n - 1}{1 + C_2\tau - 1}$$

$$\leq e^{C_2 t_n} \|u^0 - z^0\| + 2\tau\varepsilon \frac{(1 + C_2\tau)^n - 1}{C_2\tau} \leq e^{C_2 t_n} \|u^0 - z^0\| + 2\varepsilon \frac{e^{C_2 t_n}}{C_2}$$



Строгая (сильная) устойчивость

$\frac{\partial f}{\partial u}$ – фактор, определяющий устойчивость

Далее будем рассматривать модельное (линеаризованное) уравнение – уравнение Далквиста

$$u' = \lambda u \quad \lambda - \text{производная, или собственное значение матрицы Якоби}$$

В этом случае можно выразить

$$u^{n+1} = R(\lambda\tau)u^n \quad z = \lambda\tau, z \in \mathbb{C}$$

Функция
устойчивости

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_i b_i k_i$$

Тогда $R(z)$ – многочлен степени s от z .

Точное решение

$$[u^{n+1}] = e^z [u^n]$$

Численное решение

$$u^{n+1} = R(z)u^n$$

$$\|[u^{n+1}] - u^{n+1}\| = O(\tau^{p+1}) \quad p - \text{порядок точности метода}$$

Если $s = p$ то $\|R(z) - e^z\| = O(\tau^{p+1})$



$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^s}{s!}$$

Сильная устойчивость

Область устойчивости $|R(z)| \leq 1$

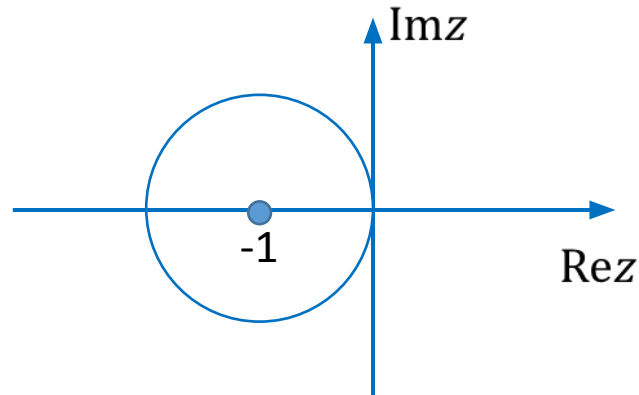
Пример: Найти область (сильной) устойчивости явного метода Эйлера

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \lambda u^n$$



$$u^{n+1} = (1 + \tau\lambda)u^n$$

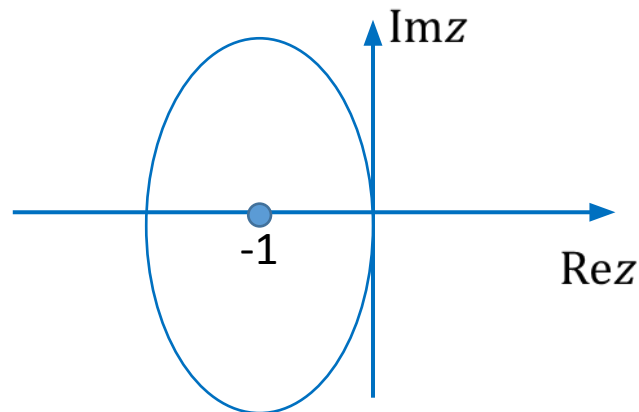
$$R(z) = |1 + z|$$



Пример: Найти область (сильной) устойчивости метода Эйлера с пересчетом

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$$

1/2	1/2	
	0	1



Барьеры Бутчера

1 барьер Бутчера: Для $p \geq 5$ не существует ЯМРК с $s = p$

При $p = 5$, $s \geq 6$ функция устойчивости

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + M_6 z^6$$

2 барьер Бутчера: Для $p \geq 7$ не существует ЯМРК с $s = p + 1$

3 барьер Бутчера: Для $p \geq 8$ не существует ЯМРК с $s = p + 2$

Жесткие задачи

Жесткие задачи

$$u' = f(t, u)$$

$$u(0) = u_0$$

- Климатические задачи
- Процессы в реакторе
- Химические реакции

1) $\tau \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \leq 2$ – явные методы

2) Во многих задачах быстрый процесс определяет только начальный (пограничный) слой => нужны неявные схемы

Пример :

$$\begin{aligned} u' &= au + \frac{1}{\varepsilon} v & u(0) &= u_0 & a &\sim O(1) \\ v' &= -\frac{1}{\varepsilon} v & v(0) &= v_0 & \varepsilon &\ll 1 \end{aligned}$$

Решение:

$$u(t) = u_0 e^{at} + \frac{v_0}{1 + a\varepsilon} (e^{at} - e^{-t/\varepsilon}) \quad v(t) = v_0 e^{-t/\varepsilon}$$

Пример :

$$\begin{aligned} u' &= 998u + 1998v & u(0) &= 1 \\ v' &= -999u - 1999v & v(0) &= 1 \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} u(t) &= 4e^{-t} - 3e^{-1000t} \\ v(t) &= -2e^{-t} + 3e^{-1000t} \end{aligned}$$

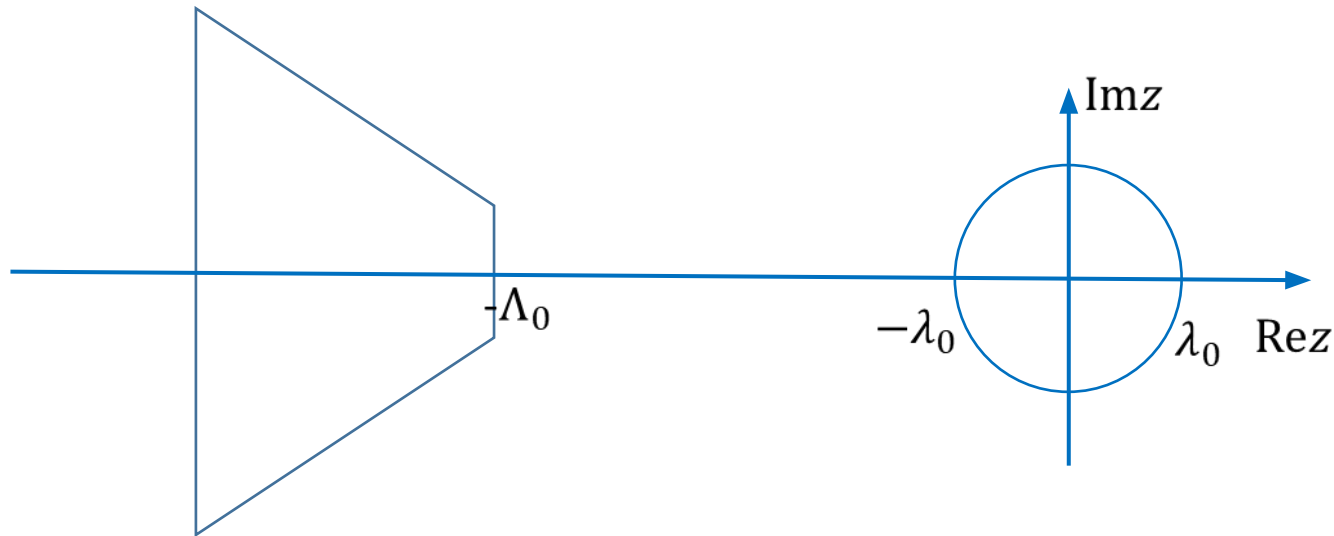
Жесткие задачи

Опр: Система дифференциальных уравнений $u' = f(t, u)$ называется жесткой, если спектр матрицы Якоби $J = \frac{\partial f}{\partial u}$ можно разделить на 2 части:

1) Жесткий спектр $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\Lambda_0$, $|\operatorname{Im} \lambda_i| \leq |\operatorname{Re} \lambda_i|$,

2) Мягкий спектр $|\lambda_i| \leq \lambda_0$,

$\Lambda_0 \gg \lambda_0$ $\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}$ - показатель жесткости системы



Определения устойчивости

Опр: Разностная схема называется абсолютно устойчивой в заданной точке $z = \lambda\tau, z \in \mathbb{C}$ если функция устойчивости $|R(z)| \leq 1$

Опр: Совокупность всех точек $z \in \mathbb{C}$ для которых $|R(z)| \leq 1$ называется областью устойчивости

Рассмотрим уравнение

Далквиста $u' = \lambda u$

$$[u^{n+1}] = e^z [u^n] \quad \Rightarrow \quad |[u^{n+1}]| \leq |[u^n]|$$

$$|e^z| \leq 1$$

Опр: Если область устойчивости разностной схемы ($|R(z)| \leq 1$) включает в себя левую полуплоскость, то такая разностная схема называется A-устойчивой

Опр: Разностная схема называется называется L-устойчивой, если она A-устойчива и $|R(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$

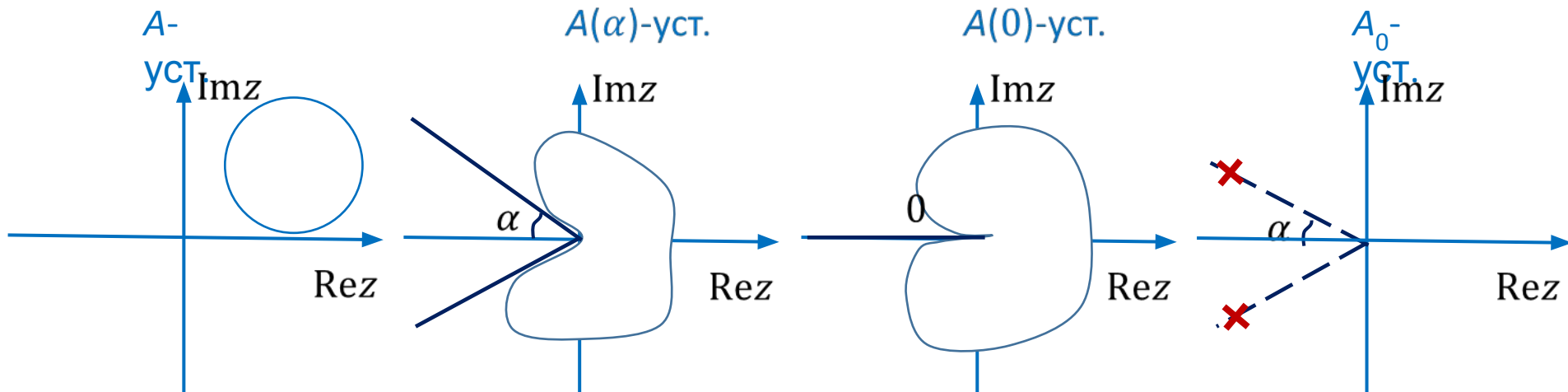
Если $|R(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ как z^p то такая разностная схема называется L_p устойчивой

Определения устойчивости

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя часть отрицательной полуплоскости, включающую угол α , отсчитываемый от отрицательного направления действительной оси, то такая разностная схема называется $A(\alpha)$ -устойчивой.

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя часть отрицательной полуплоскости, включающую бесконечно малый угол α , отсчитываемый от отрицательного направления действительной оси, то такая разностная схема называется $A(0)$ -устойчивой.

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя отрицательную действительную полуось, но граница области устойчивости пересекается с $\forall$ малым углом, то метод называется A_0 - устойчивым



Разностные схемы для жестких систем ОДУ

Одношаговые методы

- 1 шаг по времени
- Нужно решать нелинейную систему

Многошаговые методы

- Много шагов по времени
- Решается только 1 нелинейное уравнение
- Проблемы с устойчивостью

Неявные методы Рунге-Кутты

Опр: s-стадийным **неявным** методом Рунге-Кутты с определяющими коэффициентами

$$a_{ij}, c_i, b_i,$$

Называется метод
вида

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f(x_n + c_i \tau, u^n + \tau \sum_j a_{ij} k_j)$$

Таблица
Бутчера

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \end{matrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \end{matrix} \end{array}$$

c_1	a_{11}	$\dots$	a_{1s}
c_2	a_{21}	$\dots$	a_{2s}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_s	a_{s1}	$\dots$	a_{ss}
	b_1	$\dots$	b_s

Необходимо решать систему нелинейных уравнений

Диагонально-неявные методы

Диагонально-неявные методы Рунге-Кутты

$$a_{ij} = 0, j > i$$

Система распадается на s отдельных систем по n уравнений

Однократно диагонально-неявные методы Рунге-Кутты (ОДНРК)

$$a_{ij} = 0, j > i$$

$$\forall i \ a_{ii} = a$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}h)\mathbf{k} = \mathbf{F}$$

На каждом шаге одна и та же
матрица
Вычисляется один раз

Спасибо за внимание!