

Алгебра и геометрия

1 семестр 2013

Разделы курса

1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.
2. Векторная алгебра.
3. Аналитическая геометрия.

1. Матрицы и действия на ними

Матрицы.

МАТРИЦЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЛИ КВАДРАТНАЯ ТАБЛИЦА, ЗАПОЛНЕННАЯ ЧИСЛАМИ.

ЧИСЛА, ЗАПОЛНЯЮЩИЕ МАТРИЦУ, НАЗЫВАЮТСЯ ЕЁ **ЭЛЕМЕНТАМИ**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Второй столбец

Вторая строка

a_i – i -я строка

a_j – j -й столбец

A – $m \times n$ матрица

a_{ij} – элемент матрицы

$m = n$ – квадратная; $m \neq n$ – прямоугольная

Виды матриц :

$m = 1$ – вектор - столбец; $n = 1$ – вектор - строка

Главная диагональ

побочная диагональ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Виды квадратных матриц :

$a_{ij} = 0$, при $1 \leq i, j \leq n$ – нулевая матрица

$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ при } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \\ a_{ii} = 1, \text{ при } 1 \leq i \leq n \end{cases}$ – единичная матрица

$a_{ij} = a_{ji}$, при $1 \leq i, j \leq n$ – симметричная

$a_{ij} = 0$, при $i > j$ – треугольная

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & e & k \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g & f \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия с матрицами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

а) умножение матрицы на число : $\lambda \cdot A = \left(\lambda \cdot a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$

б) сложение матриц : $A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$, $B = \left(b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$

Матрицы разного размера складывать нельзя

Вычитание — это тоже сложение

$$C = A + B = \left(a_{ij} + b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

Лирическое отступление...

скалярное произведение векторов

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

в) умножение матриц :

$$A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \quad B = \left(b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}}}$$

i -я строка A

j -й столбец B

$$C = AB = \left(a_i \cdot b_j \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

$$\begin{cases} A - n \times m \\ B - m \times k \end{cases} \Rightarrow AB - n \times k$$

$$C = \left(c_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}}$$

г) транспонирование матриц :

$$A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \quad A^T = \left(a_{ji} \right)_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}}$$

Примеры

$$a) \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 20 & 10 & 0 \\ -25 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -5 & 5 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8 & -1+(-5) & 2+5 \\ 4+7 & 2+3 & 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 11 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$

$$(2 \quad -5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot (-4) = (2)$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 1 \times 1$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 11 & 5 & 14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -6 & 5 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

скалярное произведение векторов "по - матричному"

Свойства операций над матрицами.

линейная комбинация : $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$

$$A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \quad B = \left(b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \quad 0 = (0)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

свойства линейных операций :

- 1) коммутативность сложения : $A + B = B + A$
- 2) ассоциативность сложения : $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 3) существование нуля : $A + 0 = 0 + A = A$

Доказать самостоятельно, используя определения действий (операций)

свойства умножения :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{единичная матрица}$$

3) существование нуля : $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

4) НЕкоммутативность умножения : $AB \neq BA$

5) существование единицы : $AE = EA = A$

E выбираем подходящего размера

6) ассоциативность : $A(BC) = (AB)C = ABC$

A, B, C подходящего размера

7) дистрибутивность : $(A \mp B)C = AC \mp BC$
 $A(B \mp C) = AB \mp AC$

свойства транспонирования :

8) инволютивность : $(A^T)^T = A$

Обратная самой себе операция называется инволютивной

9) линейность : $(A + B)^T = A^T + B^T$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

10) $(AB)^T = B^T A^T$

11) *симметричная*

Докажем что-нибудь...

$$A - n \times m \Rightarrow E - n \times n$$

5) существование единицы: $AE = EA = A$

$$A - n \times m \Rightarrow E - m \times n$$

Требуется доказать, что ij -й элемент произведения AE такой же, как и ij -й элемент A

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

$$(a_{11} a_{12} \dots a_{1m}) \cdot (1 \ 0 \ 0 \dots 0) = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \dots + a_{1m} \cdot 0 = a_{11}$$

$$(a_{11} a_{12} \dots a_{1m}) \cdot (0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots 0) = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + \dots + a_{1m} \cdot 0 = a_{12}$$

$$a_i \cdot e^j = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T =$$

$$\Rightarrow AE = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} = A$$

$$= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{i(j-1)} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 + a_{i(j+1)} \cdot 0 + \dots + a_{im} \cdot 0 = a_{ij}$$

Докажем еще что-нибудь...

9) линейность : $(A + B)^T = A^T + B^T$

$A, B - n \times m$

Требуется доказать, что ji -й элемент суммы $A+B$ равен сумме ji -го элемента A и ji -го элемента B

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{n2}+b_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

j
 i

$$(A+B)^T = C, \quad c_{ji} = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow c_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad j$$

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad j$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{n2}+b_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}, \quad j$$

Обратная матрица.

Обратная (по умножению) матрица — это матрица, произведение с которой равно единице: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Бывает еще обратная по сложению: $(-A) + A = A + (-A) = 0$

свойства обратимости :

- 1) Обратная бывает у квадратных, и то не у всех. $A, A^{-1} - n \times n$
- 2) Обратная к обратной равна исходной. $(A^{-1})^{-1} = A$
- 3) Обратная к транспонированной равна транспонированной обратной. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- 4) Обратная произведения равна произведению обратных в обратном порядке. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- 5) Обратная к умноженной на число равна обратной, разделенной на это число $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Пример на умножение....

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & (-5) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 46 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу....

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = ? \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot z = 1 \\ 1 \cdot y + 1 \cdot t = 0 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot y - 3 \cdot t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = -t \\ x = 1,5z \\ 2 \cdot y - 3 \cdot t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5z + z = 1 \Rightarrow z = 0,4 \\ y = -t \\ x = 1,5z \\ 2 \cdot (-t) - 3 \cdot t = 1 \Rightarrow t = -0,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку....

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 & 0,2 - 0,2 \\ 1,2 - 1,2 & 0,4 + 0,6 \end{pmatrix} = E$$

Более сложный пример на нахождение обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = ? \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2z_1 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3z_1 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 0 \\ 1z_1 + 5z_2 + 3z_3 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2z_1 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3z_1 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

Подставляем и упрощаем:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x_2 - 6x_3 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ -10y_2 - 6y_3 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2 - 10z_2 - 6z_3 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ -15x_2 - 9x_3 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ -15y_2 - 9y_3 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3 - 15z_2 - 9z_3 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -3y_2 - 3y_3 = 0 \\ -3z_2 - 3z_3 = -2 \\ -6x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6y_2 - 5y_3 = 1 \\ -6z_2 - 5z_3 = -3 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

Решаем их по отдельности:

Перегруппируем уравнения...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -3y_2 - 3y_3 = 0 \\ -3z_2 - 3z_3 = -2 \\ -6x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6y_2 - 5y_3 = 1 \\ -6z_2 - 5z_3 = -3 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

и система разобьётся на четыре:

$$\begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -6x_2 - 5x_3 = 0 \\ -3y_2 - 3y_3 = 0 \\ -6y_2 - 5y_3 = 1 \\ -3z_2 - 3z_3 = -2 \\ -6z_2 - 5z_3 = -3 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = -1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = -1/3 \\ z_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -7/3 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = -1/3 \end{cases}$$

И получаем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Литература

Теория:

- 1. Зеленцов Б.П. Алгебра и геометрия. Учебное пособие, Новосибирск, 2009.**
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. (Есть в библиотеке.)

Задачники:

- 1. Зеленцов Б.П. Линейная и векторная алгебра. Новосибирск, 2005.**
2. Рычков, Захарова. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. (Есть на сайте и в библиотеке.)