

Основы линейной алгебры

Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк и **n** столбцов.

Матрицы обозначаются *заглавными буквами* и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{} & a_{2n} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxed{} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{} & a_{2n} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxed{} & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Сокращенно матрица A записывается в виде:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{или} \quad A = \|a_{ij}\|$$

где i ($1 \leq i \leq m$) указывает номер строки, j ($1 \leq j \leq n$) номер столбца.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается через **O** .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Едини́чная матрица **E** – это диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны единице, т.е.

$$a_{ii} = 1, \forall i$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -12 \\ 3 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 2) \quad -2 \cdot C = (-2 \quad 0 \quad 2 \quad -4)$$

Пример

Вычислить **$4A - 3B$** , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: **$4A - 3B = 4A + (-3)B$**

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 12 \\ -3 & -15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 12 \\ 1 & -35 & 21 \end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц

Опр. 17. Произведение матрицы A на матрицу B , определено тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы A совпадает с числом строк второй матрицы B , и в этом случае матрица A называется **согласованной** с матрицей B для умножения.

Если $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{n \times k} = (b_{ij})$, тогда $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$$

Итак, элемент i -той строки и j -го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Пример

Найти произведение матриц **AB** и **BA**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Произведение матриц **AB** существует, т.к. матрица **A** имеет размерность 2x2, а матрица **B** – 2x3, и число столбцов матрицы **A** совпадает с числом строк матрицы **B**.

Произведение матриц **BA** не существует.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$c_{13} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 6$$

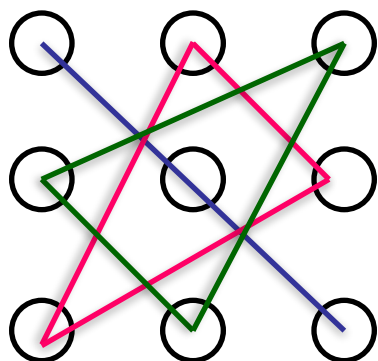
$$c_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$

$$c_{23} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

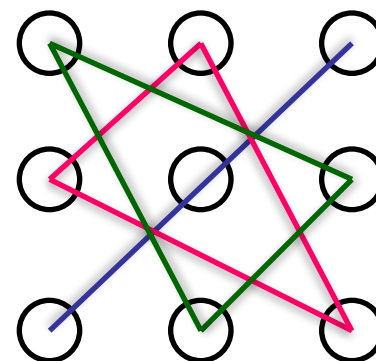
При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* или *правилом Сарруса*.

«+»



a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

«-»



Пример

Вычислить определители матриц:

$$\det A = |3| = 3$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 - \\ 2 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = -16$$

Опр.2. Минором элемента a_{ij} матрицы n -го порядка A называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .
 Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$$

Пример. Найти миноры M_{11} , M_{32} , M_{43}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Опр.4. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы n -го порядка A называется число, равное $(-1)^{i+j}M_{ij}$ и обозначаемое символом A_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

где $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$.

Алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца – четное число, и отличается от минора знаком, когда сумма номеров строки и столбца – нечетное число.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$$

$$A_{22} = M_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$$

$$A_{21} = -M_{21}$$

Определитель n -го порядка матрицы A_n равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их *соответствующие* алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

для строки:

$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{in} A_{in}, \quad (i = 1; 2; \dots; n);$$

для столбца:

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{nj} A_{nj}, \quad (j = 1; 2; \dots; n).$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По 2-ой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По 3-му столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + (-1) \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} =$$

$$2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

- Определитель n -го порядка треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \boxtimes & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\boxtimes a_{nn}$$

- Определитель n -го порядка единичной матрицы $\mathbf{E}$ равен 1.

Ранг матрицы

Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразования матрицы
называются :

1. Транспонирование (замена строк столбцами)
2. Перестановка строк и столбцов.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

Теорема о ранге матрицы

- Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Опр. 1. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Матрицы A и A^{-1} взаимно-обратны $(A^{-1})A = A$

Всякая невырожденная матрица A_n имеет обратную матрицу A^{-1} , причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$) матрицы A .

Пример

Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Т.к. $|A| = -2 \neq 0$, то матрица A – невырожденная и имеет обратную матрицу.

Находим алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1}|2| = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|3| = -3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$$

Вычислим обратную матрицу (Т.2):

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы необходимо убедиться в выполнении равенства: $AA^{-1} = E$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Опр. *Системой **m** линейных уравнений с **n** неизвестными*
(СЛУ) называется система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные, подлежащие определению;
числа a_{ij} , $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$ называются коэффициентами
системы, а числа b_i — ее свободными членами.

Число уравнений системы не обязательно совпадает с числом
неизвестных, возможны следующие случаи:

$$m > n, \quad m = n, \quad m < n.$$

Опр. Матрица A составленная из коэффициентов СЛУ называется *основной* матрицей системы.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрицы X и B называются **матрицы-столбцы неизвестных** и **свободных членов**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \boxtimes \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи СЛУ:

$$AX = B$$

Пример. Записать в матричной форме

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, имеем $AX = B$.

Рассмотрим частный случай неоднородной системы,
когда **$m=n$** , т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель $|A|$ основной матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае система
линейных уравнений
называется **невырожденной**.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

или $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 28 + 2 = 30 \neq 0.$$

т.е. исходная система трех неоднородных линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение.

Найдем единственное решение системы матричным методом $X = A^{-1}B$.

Найдем теперь обратную матрицу A^{-1} , для этого найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Следовательно, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 & 5 \\ 11 & 4 & 1 \\ -13 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Найдем теперь решение системы

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{13}{30} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{13}{30} - \frac{1}{30} = 1, & 1 = 1. \\ -3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{30} + 2 \cdot \frac{1}{30} = 0, & 0 = 0. \\ \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{13}{30} + 3 \cdot \frac{1}{30} = 2, & 2 = 2. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решение системы найдено верно.

Ответ : $(\frac{1}{6}; \frac{13}{30}; \frac{1}{30})$.

Правило Крамера

Согласно правилу Крамера, если $|A| \neq 0$, то единственное решение СЛУ вычисляется по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|}; x_2 = \frac{|A|_2}{|A|}; \dots; x_n = \frac{|A|_n}{|A|}$$

$$\text{или кратко } x_j = \frac{|A|_j}{|A|} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Определители $|A|_j$ получаются из определителя $|A|$ заменой j -го столбца столбцом свободных членов.

Найдем теперь решение системы по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A|_2}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A|_3}{|A|}, \quad \text{где}$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Итак,} \quad x_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{13}{30}, \quad x_3 = \frac{1}{30}.$$

МЕТОД ГАУССА

Элементарными называются следующие преобразования системы:

1. Перестановка местами двух уравнений системы.
2. Умножение некоторого уравнения системы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого её уравнения, предварительно умноженного на некоторое число.
4. Изменение порядка следования неизвестных.

Пример. Решить систему

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1;$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0;$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2.$$