

Лекция №2

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии:

Векторы. Линейные операции над векторами. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение векторов. Аналитическая геометрия на плоскости.

2 Векторы. Линейные операции над векторами.

Вектор – направленный отрезок.

Обозначение $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Длина вектора – длина отрезка AB .

Обозначение длины

$$\vec{a} = |\overrightarrow{AB}| \quad \text{или} \quad a = |\vec{a}| \quad .$$

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.

Обозначения:

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – векторы сонаправлены;

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – векторы противоположно направлены;

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

3

Векторы. Линейные операции над векторами.

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям :

- 1) имеют одинаковую длину;
- 2) коллинеарны;
- 3) сонаправлены.

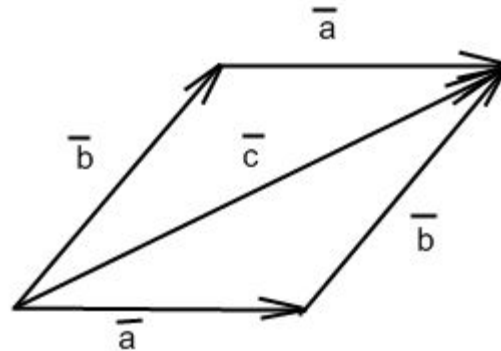
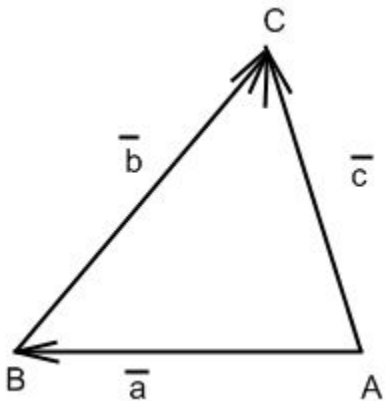
Компланарные векторы — векторы, параллельные одной плоскости.

4 Векторы. Линейные операции над векторами.

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Сумма векторов a и b определяется по правилу треугольника или параллелограмма.

Обозначение суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.



5

Векторы. Линейные операции над векторами.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $\lambda > 0$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\lambda < 0$.

Обозначение $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

6

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют **базис на плоскости**.

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют **базис в пространстве**.

Ортонормированный (**декартовый**) базис – это базис составляющие векторы которого взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Будем обозначать декартовый базис на плоскости $\vec{i}$ $\vec{j}$; в пространстве $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

7

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Разложить вектор по базису – значит представить его в виде **линейной комбинации** базисных векторов, т.е. в форме

$$\bar{d} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \quad - \text{ на плоскости,}$$

$$\bar{d} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} \quad - \text{ в пространстве.}$$

Числа α , β , γ , (коэффициенты линейной комбинации) называются **координатами вектора** в данном базисе. Вектор может быть задан в координатной форме: $\bar{d} = (\alpha; \beta)$ – на плоскости; $\bar{d} = (\alpha; \beta; \gamma)$ – в пространстве.

8

Базис на плоскости и в пространстве.

Координаты вектора

Линейным операциям над векторами

$$\bar{a} = (a_1; a_2; a_3) \quad \text{и} \quad \bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

1. $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
2. $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
3. $\lambda \bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$$A = (x_1; x_2; x_3) \quad \text{и} \quad B = (y_1; y_2; y_3)$$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

9

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатной форме выглядит следующим образом:

1. Два вектора коллинеарны, если

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

2. Три вектора компланарны, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

10 **Базис на плоскости и в пространстве.**

Координаты вектора

Пример. Даны четыре вектора:

$$\bar{a}_1 = (-1; 2; 0), \quad \bar{a}_2 = (1; 2; 1), \quad \bar{a}_3 = (2; 1; -1), \quad \bar{b} = (3; 2; -7)$$

Показать, что три первых вектора образуют базис в трехмерном пространстве и разложить четвертый вектор по этому базису.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3$$
$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = 3$$

$$\Delta = -1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 9 \quad \Delta \neq 0, \text{ а значит это базис.}$$

11 **Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора**

$$\bar{b} = (3; 2; -7)$$

Разложим четвертый вектор по этому базису:

$$\bar{b} = x \cdot \bar{a}_1 + y \cdot \bar{a}_2 + z \cdot \bar{a}_3$$

Запишем в координатном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

12 Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = -x + y + 2z \\ 2 = 2x + 2y + z \\ -7 = y - z \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ y - z = -7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

13

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Осталось решить систему из 3-х уравнений на 3-и неизвестные:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right) =$$

14

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + y + 2z = 3 \\ y - z = -7 \\ 9z = 36 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -x + y + 2z = 3 \\ y - 4 = -7 \\ z = 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -x + (-3) + 2 \cdot 4 = 3 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

$$\bar{b} = (2; -3; 4)$$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов называют сумму произведений их координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Скалярным произведением векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Скалярное произведение векторов можно еще представить:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$$

где $\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}$ проекция вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$.

Скалярное произведение векторов.

С помощью скалярного произведения можно вычислить:
Длину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Расстояние между двумя точками:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Косинус угла между двумя векторами:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

17 Скалярное произведение векторов.

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n \iff \cos(\alpha) = 0$$

$$\iff \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \iff a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0, \left(|\bar{a}| \neq 0, |\bar{b}| \neq 0 \right).$$

Свойства скалярного произведения векторов.

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a};$
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c};$
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c};$
4. $\lambda \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \lambda \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b});$
5. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2;$
6. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b} \quad (\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0)$
(критерий ортогональности векторов);
7. Работа силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку при перемещении её из начала в конец вектора $\bar{s}$ вычисляется по формуле $A = \bar{F} \cdot \bar{s}$ (физический смысл).

Векторное произведение.

Векторным произведением двух векторов **a** и **b** называется вектор **c** такой, что:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \alpha$ - модуль вектора **c** равен площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**;
2. $\bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b}$;
3. Тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая.

Векторное произведение.

Обозначение: $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}], \quad \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$

Координаты вектора $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ вычисляются по формуле:

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

Свойства векторного произведения.

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a});$
2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c};$
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c};$
4. $\overline{\lambda a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \overline{\lambda b} = \lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b});$
5. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0};$
6. $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}$

критерий коллинеарности векторов.

Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ или

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равна объему параллелепипеда построенного на этих векторах.

$$V = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения.

1. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}), \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b});$
2. $(\lambda \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \lambda \bar{c}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c});$
3. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \iff \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ - компланарны.}$

Примеры.

Найти угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, если $\mathbf{p}=2\mathbf{m}+3\mathbf{n}$, $\mathbf{q}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$, $|\mathbf{m}|=2$, $|\mathbf{n}|=3$, а угол между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен $\pi/3$.

Напомним, что: $\cos(\hat{p}q) = \frac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{|\overline{p}| \cdot |\overline{q}|}$

вычислим $\overline{p} \cdot \overline{q}$ и $|\overline{p}|, |\overline{q}|$

$$\begin{aligned} \overline{p} \cdot \overline{q} &= (2\overline{m} + 3\overline{n}) \cdot (\overline{m} + 2\overline{n}) = 2\overline{m} \cdot \overline{m} + 3\overline{n} \cdot \overline{m} + 4\overline{m} \cdot \overline{n} + 6\overline{n} \cdot \overline{n} = \\ &= 2|\overline{m}|^2 + 7\overline{m} \cdot \overline{n} + 6|\overline{n}|^2 = 2 \cdot 4 + 7\overline{m} \cdot \overline{n} + 6 \cdot 9 = 7\overline{m} \cdot \overline{n} + 62 \end{aligned}$$

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = |\overline{m}| \cdot |\overline{n}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Примеры.

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = 7\bar{m} \cdot \bar{n} + 62 = 7 \cdot 3 + 62 = 83$$

Теперь вычислим длину наших векторов:

$$\begin{aligned} |\bar{p}| &= \sqrt{(2\bar{m} + 3\bar{n}) \cdot (2\bar{m} + 3\bar{n})} = \sqrt{4|\bar{m}|^2 + 12\bar{m} \cdot \bar{n} + 9|\bar{n}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 9 \cdot 9} = \sqrt{16 + 36 + 81} = \sqrt{133} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{q}| &= \sqrt{(\bar{m} + 2\bar{n}) \cdot (\bar{m} + 2\bar{n})} = \sqrt{|\bar{m}|^2 + 4\bar{m} \cdot \bar{n} + 4|\bar{n}|^2} = \\ &= \sqrt{4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 9} = \sqrt{4 + 12 + 36} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

Примеры.

В результате получим:

$$|\bar{p}| = \sqrt{133} \quad |\bar{q}| = \sqrt{52} \quad \bar{p} \cdot \bar{q} = 83$$

$$\cos(p\hat{q}) = \frac{83}{\sqrt{133} \cdot \sqrt{52}} = \frac{83}{\sqrt{6916}} \approx \frac{83}{83,16} \approx 0,998$$

$$\angle(pq) = \arccos(0,998) = 3,6^0 = \frac{\pi}{50}$$

Примеры.

Найти векторное произведение векторов

$$\bar{a} = (-3, 2, -1) \quad \bar{b} = (1, 0, 2)$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \\ &= 4\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}\end{aligned}$$

$$\bar{c} = (4, 5, -2)$$

Примеры.

Вычислить смешанное произведение векторов

$$\bar{a} = (-3, 2, -1) \quad \bar{b} = (1, 0, 2) \quad \bar{c} = (4, 5, -2)$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot (-4 + 5) - 2 \cdot (-15 - 8) = -1 - 2 \cdot (-23) = 45 \end{aligned}$$

29 Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Деление отрезка в заданном отношении λ . Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогда координаты точки $N(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{M_1N}{NM_2} = \lambda$ определяется по формуле:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

При $\lambda=1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Аналитическая геометрия на ПЛОСКОСТИ.

3. Основные виды уравнений прямой на плоскости:

а) общее уравнение: $l : Ax + By + C = 0$,

$\bar{n} = (A, B)$ - нормальный вектор прямой, $\bar{n} \perp l$;

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом

$l : y = kx + b$, k - угловой коэффициент, равный тангенсу угла α , который образует прямая с положительным направлением оси Ox , b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy ;

Аналитическая геометрия на ПЛОСКОСТИ.

в) уравнение прямой в отрезках $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,
где a – абсцисса, b – ордината точек пересечения
прямой с осями Ox и Oy соответственно;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки
 $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$
 $l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$

д) уравнение прямой, проходящей через данную
точку $M_0(x_0, y_0)$ в данном направлении

$l: y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$ k - угловой коэффициент.

32 Аналитическая геометрия на ПЛОСКОСТИ.

4. Взаимное расположение двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

а) угол между прямыми:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых;

φ – угол, на который нужно повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой;

33 Аналитическая геометрия на ПЛОСКОСТИ.

б) признак параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$;

в) признак перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

5. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Примеры.

Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-2,1)$, $B(2,9)$, $C(-7,8)$. Найти: 1) систему неравенств, определяющих множество точек треугольника ABC ; 2) угол C в радианах с точностью до двух знаков; 3) уравнение высоты AD и ее длину; 4) уравнение медианы CE и координаты точки F пересечения этой медианы с высотой AD ; 5) уравнение окружности, для которой высота AD есть диаметр.

Решение:

1) Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости: под прямой и над прямой – это обозначается в уравнении прямой знаком неравенства.

Построим прямые проходящие через точки A , B и C по формуле:

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

Примеры.

$$A(-2,1), B(2,9), C(-7,8)$$

$$l: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-1}{9-1}, \quad \frac{1}{4}(x+2) = \frac{1}{8}(y-1), \quad 2(x+2) = y-1$$

$$y = 2x + 5$$

$$\frac{x+2}{-7+2} = \frac{y-1}{8-1}, \quad -\frac{1}{5}(x+2) = \frac{1}{7}(y-1), \quad -\frac{7}{5}(x+2) = y-1$$

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{14}{5} + 1, \quad y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

36

Примеры.

$$A(-2,1), B(2,9), C(-7,8)$$

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

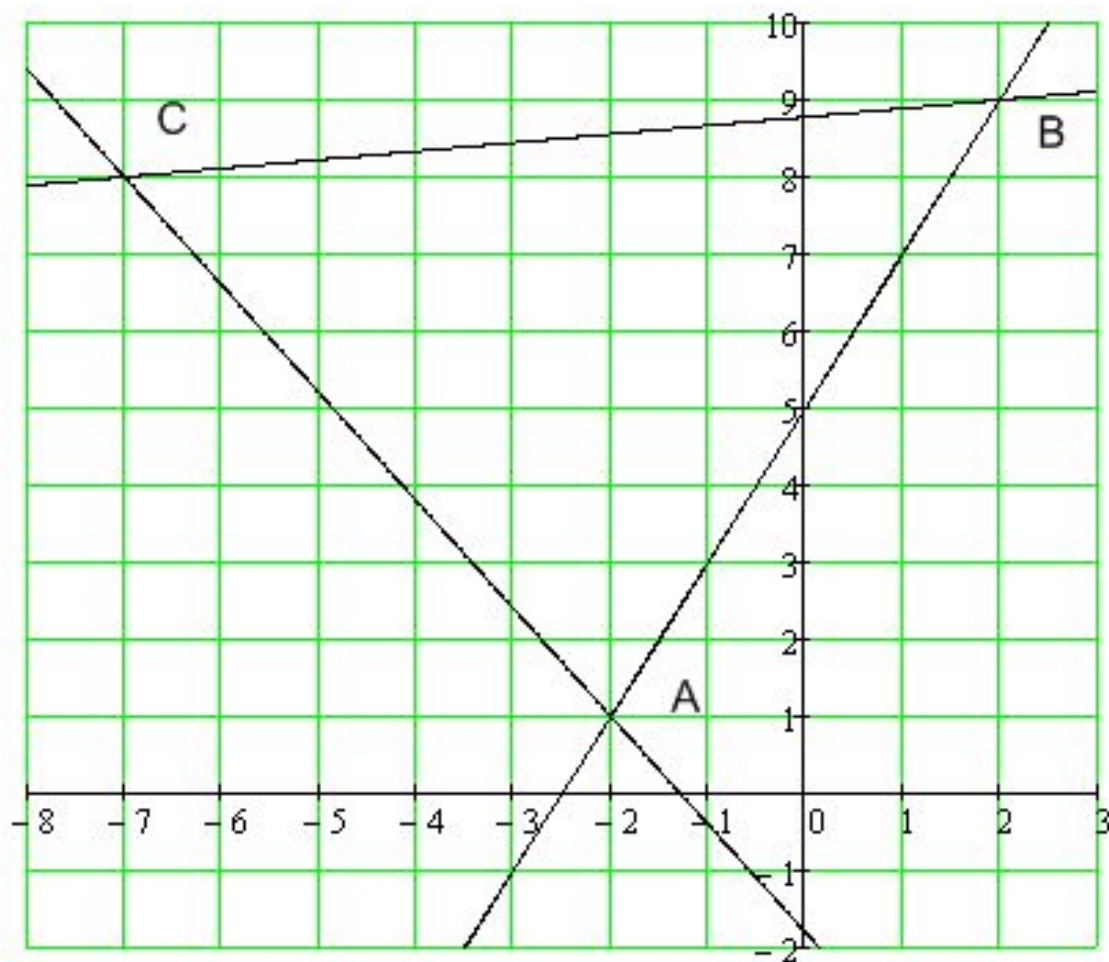
$$y = 2x + 5 \quad y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$\frac{x - 2}{-7 - 2} = \frac{y - 9}{8 - 9}, \quad -\frac{1}{9}(x - 2) = -1(y - 9), \quad \frac{1}{9}(x - 2) = y - 9,$$

$$y = \frac{1}{9}x - \frac{2}{9} + 9, \quad y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

37

Примеры.

 $A(-2,1), B(2,9), C(-7,8)$ 

$$y = 2x + 5$$

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

$$y \geq 2x + 5$$

$$y \geq -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y \leq \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

Примеры.

2) угол C в радианах с точностью до двух знаков;

$$A(-2,1), B(2,9), C(-7,8)$$

Уравнения AC и BC имеют вид:

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5} \qquad y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

Соответственно коэффициенты $K_A = -7/5$, $K_B = 1/9$.

Мы знаем, что
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{-\frac{7}{5} - \frac{1}{9}}{1 + \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \frac{1}{9}} = \frac{-\frac{63+5}{45}}{1 - \frac{7}{45}} = -\frac{68}{45} : \frac{38}{45} = -\frac{68}{45} \cdot \frac{45}{38} = -\frac{34}{19}$$

Примеры.

$$\operatorname{tg} \hat{C} = -\frac{34}{19}, \quad \hat{C} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{34}{19}\right) \approx 2,08$$

3) уравнение высоты AD и ее длину;

Вспомним признак перпендикулярности прямых: $k = -\frac{1}{k_1}$.

В нашем случае $k_1 = \frac{1}{9}$,

Т.е. $K=-9$, тогда уравнение прямой будет записываться по формуле:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad A(-2, 1)$$

$$y - 1 = -9(x + 2)$$

$$AD: \quad y = -9x - 17$$

Примеры.

Расстояние от точки до прямой вычисляется

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$A(-2, 1)$$

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

$$\frac{1}{9}x - y + \frac{79}{9} = 0$$

$$|AD| = \frac{\frac{1}{9} \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + \frac{79}{9}}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{-\frac{2}{9} - \frac{9}{9} + \frac{79}{9}}{\sqrt{\frac{1}{81} + \frac{81}{81}}}$$

$$|AD| = \frac{\frac{68}{9}}{\frac{\sqrt{82}}{9}} = \frac{68}{\sqrt{82}} \approx 7,51$$

Примеры.

4) уравнение медианы CE и координаты точки F пересечения этой медианы с высотой AD .

Чтобы найти уравнение медианы CE , определим сначала координаты точки E , которая является серединой стороны AB .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$A(-2, 1), B(2, 9)$$

$$x = \frac{-2 + 2}{2} = 0, \quad y = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

Примеры.

 $C(-7,8), E(0,5)$

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$CE: \frac{x + 7}{0 + 7} = \frac{y - 8}{5 - 8}; \quad \frac{1}{7}(x + 7) = -\frac{1}{3}(y - 8);$$

$$CE: y - 8 = -\frac{3}{7}(x + 7); \quad y - 8 = -\frac{3}{7}x - 3;$$

$$CE: y = -\frac{3}{7}x + 5.$$

Примеры.

Для нахождения координат точки пересечения медианы и высоты, решим систем уравнений составленную их уравнения медианы и уравнения высоты:

$$CE: y = -\frac{3}{7}x + 5 \quad AD: y = -9x - 17$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{7}x + 5 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} -9x - 17 = -\frac{3}{7}x + 5 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} -63x - 119 = -3x + 35 \\ y = -9x - 17 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -60x = 154 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{77}{30} \\ y = \frac{61}{10} \end{cases}$$

Примеры.

5) уравнение окружности, для которой высота AD

есть диаметр. $|AD| = \frac{68}{\sqrt{82}} \quad R = \frac{68}{2 \cdot \sqrt{82}} = \frac{34}{\sqrt{82}}$

$$AD: \quad y = -9x - 17 \qquad BC: \quad y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

$$\begin{cases} y = -9x - 17 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} = -9x - 17 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 79 = -81x - 153 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 82x = -232 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{116}{41} \\ y = \frac{-116 + 3239}{41 \cdot 9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{116}{41} \\ y = \frac{347}{41} \end{cases},$$

Примеры.

Осталось записать уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{116}{41} \\ y_0 = \frac{347}{41} \end{cases} \quad R = \frac{34}{\sqrt{82}}$$

$$\left(x + \frac{116}{41}\right)^2 + \left(y - \frac{347}{41}\right)^2 = \frac{578}{41}$$