Лекция 1.3. **Законы алгебры логики**

Определение.

Две формулы алгебры логики A и B называются **Равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность формул будем обозначать знаком $\equiv$, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Формула A называется **тождественно истинной** (или **тавтологией**), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в неё переменных.

Формула называется **тождественно ложной** (или **противоречием**), если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в неё переменных.

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология, то формулы A и B равносильны. Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

1. Основные равносильности.

$\left.\begin{array}{l} 1.\ x \wedge x \equiv x \\ 2.\ x \vee x \equiv x \end{array}\right\}$ законы идемпотентности.

$3.\ x \wedge u \equiv x$ $4.\ x \vee u \equiv u$ $5.\ x \wedge л \equiv л$ $6.\ x \vee л \equiv x$

$7.\ x \wedge \bar{x} \equiv л$ - закон противоречия

$8.\ x \vee \bar{x} \equiv u$ - закон исключенного третьего

$9.\ \bar{\bar{x}} \equiv x$ - закон снятия двойного отрицания

$\left.\begin{array}{l} 10.\ x \wedge (y \vee x) \equiv x \\ 11.\ x \vee (y \wedge x) \equiv x \end{array}\right\}$ законы поглощения

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$
2. $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$.
3. $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$.
4. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.
5. $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.
6. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$.

Здесь 3, 4, 5, 6 – законы Моргана.

Ясно, что равносильности 5 и 6 получаются из равносильностей 3 и 4, соответственно, если от обеих частей последних взять отрицания и воспользоваться законом снятия двойного отрицания.

Таким образом, в доказательстве нуждаются первые четыре равносильности. Докажем одну из них: первую.

Так как при одинаковых логических значениях x и y истинными являются формулы $x \leftrightarrow y, x \to y, y \to x$, то истинной будет и конъюнкция $(x \to y) \wedge (y \to x)$. Следовательно, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые истинные значения.

Пусть теперь x и y имеют различные логические значения. Тогда будут ложными эквивалентность $x \leftrightarrow y$ и одна из двух импликаций $x \to y$ или $y \to x$. Но при этом будет ложной и конъюнкция $(x \to y) \wedge (y \to x)$.

Таким образом, и в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые логические значения. Аналогично доказываются остальные равносильности

Из равносительностей этой группы следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Дальнейшее исключение логических операций невозможно. Так, если мы будем использовать только конъюнкцию, то уже такая формула как отрицание x не может быть выражена с помощью операции конъюнкции.

Однако существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций, которыми мы пользуемся. Такой операцией является, например, операция “Штрих Шеффера”.

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Эта операция обозначается символом $x \mid y$ и определяется следующей таблицей истинности:

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$ - коммутативность конъюнкции.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ - коммутативность дизъюнкции.
3. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ - ассоциативность конъюнкции.
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ - ассоциативность дизъюнкции.
5. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
6. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ - дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

4. Дополнительные законы.

1. Закон склеивания (расщепления).

$$xy \vee \overline{x}y \equiv y;\ \ xy \vee x\overline{y} \equiv x;$$

$$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) \equiv y,\ \ (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x.$$

2. Законы поглощения.

$$x \vee xy \equiv x;\ \ x(x \vee y) \equiv x.$$

3. Закон Блейка - Порецкого.

$$x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y.$$

4. Закон свертки логического выражения (СЛВ).

$$xy \vee \overline{x}z \vee yz \equiv xy \vee \overline{x}z.$$

5. Закон двойственности.

<u>Определение.</u>

Формулы A и A^* называются двойственными, если формула A^* получается из формулы A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Имеет место следующий закон двойственности: если формулы A и B равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, т.е. $A^* \equiv B^*$.